Technische Universität München
Fakultät für Physik

Ferienkurs

Experimentalphysik 1

WS 2017/18

Aufgabenblatt 4

Annika Altwein
Maximilian Ries

Inhaltsverzeichnis

1 Aufgabe 1 (Schwingungen)

Nach militärischen Spezifikationen müssen elektronische Geräte Beschleunigungen bis zu $10g = 98,1\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ (darin ist g die Erdbeschleunigung) aushalten. Um sicherzustellen, dass die Produkte Ihrer Firma diesen Anforderungen entsprechen, sollen Sie einen Rütteltisch verwenden, der ein Gerät bei verschiedenen Frequenzen und Amplituden diesen Beschleunigungen aussetzt. Wie groß muss die Frequenz sein, wenn ein Gerät einer Schwingungsamplitude von 1,5cm unterliegt, um es gemäß der militärischen 10-g-Spezifizierung zu testen?

1.1 Lösung Aufgabe 1

Mit $\omega = 2\pi f$ gilt für die maximale Beschleunigung eines Oszillators $a_{\text{max}} = A\omega^2 = 4\pi^2 A f^2$ (Betrachte $x(t) = A\cos(\omega t)$ und leite diesen Term zwei mal ab, dann betrachte den Vorfaktor) Daraus resultiert für die Frequenz f

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{a_{\text{max}}}{A}} \tag{1}$$

$$= 13\text{Hz} \tag{2}$$

2 Aufgabe 2 (Schwingungen, Trägheit)

Eine zylindrische Scheibe mit einem Radius $r = 0,80$m und einer Masse von $m = 6,00$kg habe eine homogene Massendichte. In der Entfernung d vom Mittelpunkt der Scheibe befindet sich ein kleines Loch, an dem man die Scheibe aufhängen kann.
a) Wie groß muss d sein, damit die Schwingungsdauer dieses physikalischen Pendels 2,50s beträgt?
b) Wie muss man d wählen, damit die Schwingungsdauer minimal wird? Wie groß ist diese minimale Schwingungsdauer?

2.1 Lösung Aufgabe 2

a) Die Differenzialgleichung dieser Schwingung ergibt sich aus der Betrachtung des wirkenden Drehmoments.

$$|\vec{D}| = |\vec{r}\text{x}\vec{F}| \tag{3}$$

$$= mgd\sin\alpha \tag{4}$$

Das Drehmoment ist gleichzeitig die Ableitung des Drehimpulses $L = I\omega$. Daraus ergibt sich unter der Berücksichtigung, dass das Drehmoment rücktreibend wirkt, folgende DGL:

$$-mgd\sin\alpha = I\ddot{\alpha} \tag{5}$$

Mit der Kleinwinkelnäherung eribgt sich das zu

$$\ddot{\alpha} + \frac{mgd}{I}\alpha = O \tag{6}$$

Es gilt also $\omega = \sqrt{\frac{mgd}{I}} = \frac{2\pi}{T}$. Das Trägheitsmoment dieser Anordnung ergibt sich mit dem Satz von Steiner zu $I = \frac{1}{2}mr^2 + md^2$. Setzt man das in ω ein, kann die Gleichung aufgelöst werden zu

$$d^2 - \frac{gT^2}{4\pi^2}d + \frac{r^2}{2} = 0 \tag{7}$$

Diese quadratische Gleichung hat zwei Lösungen. Die eine ($d = 1,31$m) ist physikalisch nicht sinnvoll, da der Radius der Scheibe nur 0,8m beträgt. Der gesuchte Abstand ist also $d = 24$cm
b) Für die Periodendauer T ergibt sich folgende Formel:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{2}mr^2 + md^2}{mgd}} \tag{8}$$

Die Extrema der Periodendauer lassen sich nun ermitteln, indem man diese Formel nach d ableitet und mit null gleichsetzt.

$$\frac{2d^2 - \left(\frac{1}{2}r^2 + d^2\right)}{\sqrt{g}d^2} = 0 \tag{9}$$

Es ist ausreichend, den Zähler der linken Seite zu beachten, $2d^2 - (\frac{1}{2r^2+d^2}) = 0$. Daraus ergibt sich $d_{\text{min}} = \frac{r}{\sqrt{2}}$. Dies setzen wir wieder in den Ausdruck für die Periodendauer ein und erhalten

$$\begin{aligned} T_{\text{min}} &= 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{2}r^2 + d_{\text{min}}^2}{gd_{\text{min}}}} && (10)\\ &= 2,1\text{s} && (11) \end{aligned}$$

Um mathematisch korrekt zu zeigen, dass dieser Wert ein Minimum und kein Maximum ist, müsste nun entweder der Graph oder die zweite Ableitung betrachtet werden. Das soll für uns aber in diesem Fall als gegeben betrachtet werden.

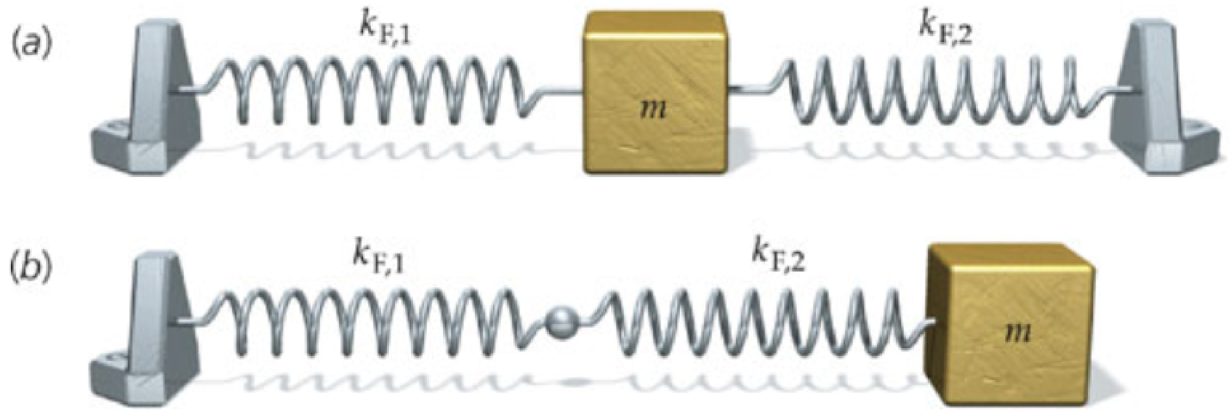

Abbildung 1: Skizze Federpendel

3 Aufgabe 3 (Schwingung Feder)

Abbildung 1 zeigt zwei Arten, wie man eine Masse m an zwei waagerechten Federn befestigen kann. Zeigen Sie, dass die Masse mit der Frequenz$v = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_{F,\text{eff}}}{m}}$ schwingt, wobei die effektive Federkonstante $k_{F,\text{eff}}$ gegeben ist durch
a) $k_{F,\text{eff}} = k_{F,1} + k_{F,2}$ bzw durch
b)$\frac{1}{k_{F,\text{eff}}} = \frac{1}{k_{F,1}} + \frac{1}{k_{F,2}}$.
(Hinweis: Berechnen Sie den Betrag der Gesamtkraft auf einen Körper für eine kleine Auslenkung x und schreiben Sie $F = -k_{F,\text{eff}} \cdot x$. Beachten Sie, dass sich die Federn in Teilaufgabe b) um verschiedene Beträge dehnen, deren Summe x ergibt.)

3.1 Lösung Aufgabe 3

a) Beide Federn werden bei diesem Aufbau stets gleich weit ausgelenkt. Die resultierende Kraft, die auf die Masse m wirkt, ist hier gegeben durch

$$\begin{aligned} F &= -k_{F,1}x - k_{F,2}x && (12) \\ &= -x(k_{F,1} + k_{F,2}) && (13) \\ &= -xk_{\text{eff}} && (14) \end{aligned}$$

Also ist $k_{\text{eff}} = k_{F,1} + k_{F,2}$.
b)Feder 2 übt auf die Masse m die gleiche Kraft aus wie auf Feder 1. Gleichzeitig müssen die Beträgt der beiden Federkräfte F_1 und F_2 gleich groß sein. Es ergibt sich also

$$F = -k_{F,1}x_1 = -k_{F,2}x_2 \tag{15}$$

Die Beziehung von x_1 und x_2 ergibt sich also zu $x_1 = \frac{k_{F,2}}{k_{F,1}} x_2$. Die gesamte Auslenkung x ist durch folgenden Zusammenhang definiert

$$x_1 + x_2 = -\frac{F}{k_{\text{eff}}} \tag{16}$$

Setzt man in diese Gleichung die erste Beziehung von F, $k_{F,1}$ und $k_{F,2}$ ein ebenso wie die Beziehung zwischen x_1 und x_2, so ergibt sich folgender Zusammenhang:

$$k_{\text{eff}} = -\frac{F}{x_1 + x_2} \tag{17}$$

$$= \frac{k_{F,1} x_1}{x_1 + \frac{k_{F,1}}{k_{F,2}} x_1} \tag{18}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{k_{F,1}} + \frac{1}{k_{F,2}}} \tag{19}$$

Die Kehrwerte der beiden Seiten liefern das geforderte Ergebnis

$$\frac{1}{k_{F,\text{eff}}} = \frac{1}{k_{F,1}} + \frac{1}{k_{F,2}} \tag{20}$$

4 Aufgabe 4 (stehende Wellen)

Für einen Eintrag ins Guiness Book of World Records bauen Sie einen riesigen Kontrabass mit 5 m langen Saiten, die an den Enden fest eingespannt sind. Eine Saite hat eine lineare Massendichte von $40\frac{\text{g}}{\text{m}}$ und eine Grundfrequenz von 20Hz.
a) Berechnen Sie die Frequenz und Wellenlänge der 1. Oberschwingung
b) Was ist die Spannkraft in der Saite? (Hinweis: Die Wellengeschwindigkeit hängt von der Spannkraft und der linearen Massendichte ab. Wenn Sie die Formel nicht kennen, hilft die Betrachtung der Einheiten!)
c) Was wäre die Frequenz der Grundschwingung, wenn Sie die Saite mit einer für Saiteninstrumente üblichen Spannkraft von 100N spannen? Welche Konsequenz hätte das für ein Konzert, das diese Frequenz verwendet?

4.1 Lösung Aufgabe 4

a) Für die Frequenz einer stehenden Welle mit zwei festen Enden, der Ausbreitungsgeschwingigkeit c und der Länge L gilt

$$f_n = (n+1)\frac{c}{2L} \tag{21}$$

$$\Rightarrow f_1 = 2\frac{c}{2L} = 2f_0 \tag{22}$$

$$= 40Hz \tag{23}$$

Da es sich um die erste Oberschwingung handelt, gilt $\lambda = L = 5$m b) Bezeichet man die Spannkraft mit τ und die Massendichte mit μ, so gilt

$$c = \sqrt{\frac{\tau}{\mu}} \tag{24}$$

$$f_0 = \frac{c}{2L} \tag{25}$$

$$\Rightarrow 2Lf_0 = \sqrt{\frac{\tau}{\mu}} \tag{26}$$

$$\tau = 4L^2 f_0^2 \mu \tag{27}$$

$$= 1600\,\mathrm{N} \tag{28}$$

c) Ausgehend von der Formel für c aus der vorherigen Teilaufgabe ergibt sich als Formel für f_0 in Abhängigkeit der Spannkraft τ

$$f_0 = \frac{c}{2L} = \frac{\sqrt{\frac{\tau}{\mu}}}{2L} \tag{29}$$

$$f_0' = 5\,\mathrm{Hz} \tag{30}$$

Die errechnete Frequenz von 5Hz ist niedriger als das, was man als Mensch maximal hören kann (etwa 20Hz).

5 Aufgabe 5 (Wellen)

Wale in den Ozeanen kommunizieren durch Schallübertragung unter Wasser. Ein Wal stößt einen Laut von 50,0Hz aus, um ein eigensinniges Kalb dazu zu bringen, wieder zum Rudel zurückzukehren. Die Schallgeschwindigkeit in Wasser beträgt etwa $1500\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.
a) Wie lang braucht der Schall zum 1,20km entfernten Kalb?
b) Wie groß ist die Wellenlänge dieses Tons im Wasser?
c) Wie sieht die Lösung der Wellengleichung in diesem Fall aus?(Die Lautstärke des Tons ist Ihnen nicht bekannt)
d) Wenn die Wale dicht an der Wasseroberfläche sind, kann ein Teil der Schallenergie in die Luft gebrochen werden. Welche Frequenz und welche Wellenlänge hat der Schall über Wasser? ($c_{Luft} = 343\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

5.1 Lösung Aufgabe 5

a) Die Zeitspanne, die der Ton zum Zurücklegen der Strecke d benötigt, ist gegeben durch $\Delta t = \frac{d}{v_W}$, wobei v_W die Schallgeschwindigkeit im Wasser ist.

$$\Delta t = \frac{d}{v_W} = 0,8\mathrm{s} \tag{31}$$

b) Die Wellenlänge des Tons im Wasser ist

$$\lambda_W = \frac{v_W}{f} = 30\mathrm{m} \tag{32}$$

c) Die Lösung der Wellengleichung hat die allgemeine Form

$$\begin{aligned} \phi(x,t) &= A \sin kx - \omega t && (33)\\ &= A \sin 2\pi \left(\frac{1}{\lambda} x - f \cdot t\right) && (34)\\ \Rightarrow &= A \sin 2\pi \left(\frac{1}{0,8\mathrm{m}} x - 50Hz \cdot t\right) && (35) \end{aligned}$$

d)Die Freuquenz des Tons bleibt unverändert, lediglich die Wellenlänge ändert sich aufgrund der veränderten Schallgeschwindigkeit in Luft zu

$$\lambda_F = \frac{v_L}{f} = 6,86\mathrm{m} \tag{36}$$

6 Aufgabe 6 (stehende Wellen)

Drei aufeinanderfolgende Resonanzfrequenzen einer Orgelpfeife sind 1310Hz, 1834Hz und 2358Hz.
a) Ist die Pfeife an einem Ende geschlossen oder an beiden Seiten offen?
b) Welche Grundfrequenz hat die Pfeife?
c) Welche effektive Länge hat die Pfeife?

6.1 Lösung Aufgabe 6

a) Bei einer stehenden Wellen mit zwei festen bzw zwei losen Enden gilt (für $n \in \mathbb{N}_0$)

$$L = \left(n + \frac{1}{2}\right) \cdot \lambda_n \qquad f_n = (n+1) f_0 \tag{37}$$

Für zwei aufeinander folgende Frequenzen gilt also $f_{n+1} - f_n = f_0$. Setzt man darin die ersten beiden gegebenen Frequenzen ein, erhält man

$$\Delta f = (1834 - 1310)\mathrm{Hz} = 524\mathrm{Hz} = f_0 \tag{38}$$

Aus der Definition der n-ten Frquenz folgt

$$\frac{f_n}{f_0} = n + 1 \qquad \textbf{aber:} \ \frac{1310\mathrm{Hz}}{524\mathrm{Hz}} = 2,5 \tag{39}$$

Da das keine ganze Zahl ist, ist die Orgelpfeie nicht an beiden Enden offen.
b) Da für stehende Wellen mit einem festen und einem losen Ende gilt, dass $f_n = (2n+1)f_0$, also $f_{n+1} - f_n = 2f_0$, ist die Grundfrequenz der Peife nicht 524Hz, sondern

$$f_0 = \frac{1}{2}(1834\text{Hz} - 1310\text{Hz}) = 262\text{Hz} \tag{40}$$

c) Für die Länge einer stehenden Welle mit einem festen und einem losen Ende gilt $L = \frac{n+\frac{1}{2}}{2}\lambda_n$. Da $c = \lambda \cdot f$, ergibt sich für $n = 0$

$$L = \frac{0 + \frac{1}{2}}{2} \cdot \frac{c}{f_0} \tag{41}$$

$$= 32,7\text{cm} \tag{42}$$