Technische Universität München
Fakultät für Physik

Ferienkurs

Experimentalphysik 1

WS 2017/18

Lösung zu Aufgabenblatt 3

Annika Altwein
Maximilian Ries

Inhaltsverzeichnis

1 Aufgabe 1 (Reibung, Trägheitsmoment, Rotation)

Eine Münze mit einem Gewicht von $m = 100\,\mathrm{g}$ liegt auf einer horizontalen Drehscheibe, die sich mit genau 1,00 Umdrehungen pro Sekunde um ihre Achse dreht. Die Münze liegt 10 cm vom Drehpunkt der Scheibe entfernt.
a) Wie groß ist die Reibungskraft, die auf die Münze wirkt?
b) Wie groß ist der Haftreibungskoeffizient μ_h zwischen der Münze und der Drehscheibe, wenn die Münze bei einer Entfernung von mehr als 16,0 cm vom Drehpunkt heruntergeschleudert wird?
c) Berechnen Sie das Trägheitsmoment der gesamten Drehbank und der Münze zusammen für beide Anordnungen aus der vorangegangenen Teilaufgaben. Nehmen Sie für die Münze und für die Drehscheibe folgende Maße an: $M_{\text{Scheibe}} = 5{,}0\,\mathrm{kg}, R_{\text{Scheibe}} = 20\,\mathrm{cm}, r_{\text{Münze}} = 1{,}0\,\mathrm{cm}$.

1.1 Lösung Aufgabe 1

a) Wir wählen das Koordinatensystem so, dass die x-Achse immer durch die Münze läuft und der Ursprung im Mittelpunkt der Scheibe liegt. Die y-Achse zeigt also nach oben.
Kräfte in y-Richtung:

$$\sum_i F_{i,y} = F_G + F_N = m \cdot g - m \cdot g = 0 \tag{1}$$

Kräfte in x-Richtung:

$$\sum_i F_{i,x} = F_{\text{Reibung}} + F_{Zentrifugal} = \mu_h \cdot m \cdot g + m \cdot \frac{v^2}{r} \tag{2}$$

Die Münze bleibt liegen, die Reibungskraft muss also mindestens so stark wirken wie die Zentrifugalkraft. Nachdem sie sich auf einer Kreisbahn befindet, kann man auch schreiben $v = \frac{2\pi r}{T}$. Für den Betrag der Reibungskraft ergibt sich also

$$|F_{\text{Reibung}}| = \frac{4\pi^2 r \cdot m}{T^2} = \frac{4\pi^2 \cdot 0{,}10\,\mathrm{m} \cdot 0{,}10\,\mathrm{kg}}{(1{,}00\,\mathrm{s})^2} = 0{,}40\,\mathrm{N} \tag{3}$$

b) Wenn die Münze bei 16 cm gerade noch liegen bleibt, ist die Haftreibung dort maximal, es gilt hier also $|F_{R,h}| = |F_{R,h,max}|$. Stellt man diese Formel nach μ_h um, erhält man

$$\mu_h = \frac{|F_{R,h}|}{|F_n|} = \frac{4\pi^2 \cdot m \cdot r}{T^2 \cdot m \cdot g} = \frac{4\pi^2 r}{T^2 g} \tag{4}$$

$$= \frac{4\pi^2 \cdot (0{,}160\,\mathrm{cm})}{9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot (1{,}00\,\mathrm{s})^2} = 0{,}644 \tag{5}$$

c) Wir berechnen die Trägheitsmomente der Drehscheibe und der Münze separat und addieren es am Ende zum Gesamtträgheitsmoment auf. Beide Körper sind homogene Vollzylinder, die um ihre Achse gedreht werden. Das Trägheitsmoment eines Vollzylinders lautet

$$\Theta_{\text{Vollzylinder}} = \frac{1}{2}mr^2 \tag{6}$$

Somit ergibt sich für die Drehbank

$$\Theta_{\text{DB}} = \frac{1}{2}M_{\text{DB}}R_{\text{DB}}^2 \tag{7}$$

Für die Münze wenden wir den Satz von Steiner an: $\Theta_{\text{gesamt}} = \Theta_{\text{Schwerpunkt}} + ma^2$, wobei a der Abstand zur Rotationsachse ist. Das eigene Trägheitsmoment der Münze ist analog zu dem der Drehbank

$$\Theta_{\text{S,Münze}} = \frac{1}{2}mr_{\text{Münze}}^2 \tag{8}$$

So bekommt man als gesamtes Trägheitsmoment der Münze

$$\Theta_{\text{gesamt,Münze}} = \Theta_{\text{S,Münze}} + ma^2 \tag{9}$$

Das gesamte Trägheitsmoment der Anordnung ist dann also

$$\Theta_{\text{gesamt}} = \Theta_{\text{ges,Münze}+\Theta_{\text{DB}}} \tag{10}$$

$$= 0{,}101005\,\text{kg}\,\text{m}^2 \tag{11}$$

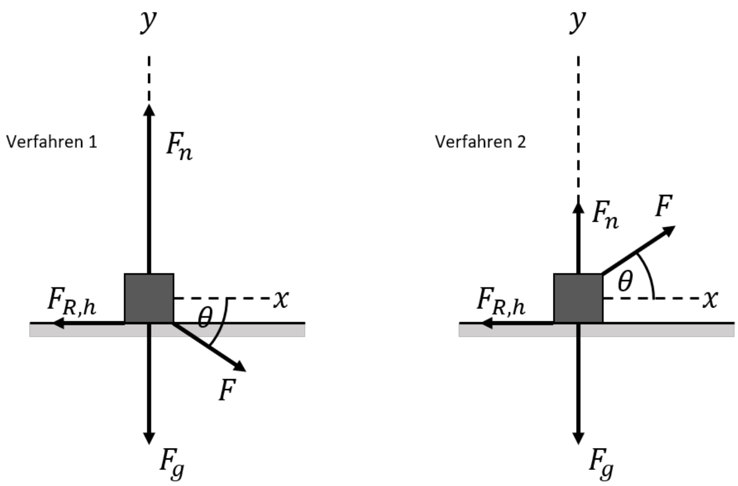
für Teilaufgabe a) bzw.

$$\Theta_{\text{gesamt}} = 0{,}102565\,\text{kg}\,\text{m}^2 \tag{12}$$

für Teilaufgabe b).

2 Aufgabe 2 (Reibung)

Eine 50-kg-Kiste, die auf ebenem Boden liegt, soll verschoben werden. Der Haftreibungskoeffizient zwischen der Kiste und dem Boden beträgt $\mu = 0,60$. Eine Möglichkeit, die Kiste zu verschieben, besteht darin, unter dem Winkel θ zur Horizontalen schräg nach unten auf die Kiste zu drücken. Eine andere Möglichkeit besteht darin, unter dem gleichen Winkel θ zur Horizontalen schräg nach oben an der Kiste zu ziehen.
a) Erklären Sie, weshalb eines der Verfahren weniger Kraft erfordert als das andere.
b) Berechnen Sie die Kraft, die bei dem jeweiligen Verfahren mindestens aufgewendet werden muss, um den Block zu verschieben. Dabei sei $\theta = 30,0°$. Vergleichen Sie die Ergebnisse mit denen, die Sie in beiden Fällen für $\theta = 0°$ erhalten.



2.1 Lösung Aufgabe 2

a) Beim Drücken schräg nach unten (Verfahren 1) wird die Kiste auf den Boden gedrückt, sodass sich die Normalkraft und damit auch die Reibungskraft erhöht. Wird jedoch an der Kiste nach oben gezogen (Verfahren 2), dann wird sie teilweise angehoben, sodass die Normalkraft und die Reibungskraft kleiner werden. Daher erfordert das Verfahren 2 eine geringerer Karft als das Verfahren 1.
b) Anwenden von $\Sigma F_{i,x} = ma_x$ auf die Kiste ergibt:

$$|F|\cos\theta - |F_{R,h,max}| = |F|\cos\theta - \mu_{R,h}|F_n| = ma_x \tag{13}$$

Beim Verfahren 1 wird die Kiste mit der Kraft F nach unten gedrückt. Da wir das Minimum der aufzuwendenden Kraft suchen, können wir den Grenzfall betrachten, in dem die Kiste sich gerade noch nicht bewegt. Wir erhalten damit für die Normalkraft:

$$|F_n| = mg + |F|\sin\theta \tag{14}$$

Beim Verfahren zwei wird die Kiste mit der Kraft F nach oben gezogen und wir bestimmen aus einer analogen Überlegung die Normalkraft zu:

$$|F_n| = mg - |F|\sin\theta \tag{15}$$

Damit die Kiste bewegt werden kann, muss in beiden Fällen gelten:

$$|F_{R,h,max}| < |F|\cos\theta \tag{16}$$

Nutzen wir die bekannte Beziehung für die Normalkraft $|F_{R,h,max}| = \mu_{R,h}|F_n|$ und lösen nach F_1 beziehungsweise F_2 auf, erhalten wir folgende Ungleichungen:

$$|F_1| > \frac{\mu_{R,h}mg}{\cos\theta - \mu_{R,h}\sin\theta} \tag{17}$$

$$|F_2| > \frac{\mu_{R,h}mg}{\cos\theta + \mu_{R,h}\sin\theta} \tag{18}$$

Setzen wir nun $\theta = 30°$, sowie den Haftreibungskoeffizienten $\mu_{R,h}$ und die Masse der Kiste ein.

$$|F_{1,30°}| > 0,52\text{kN} \tag{19}$$
$$|F_{2,30°}| > 0,25\text{kN} \tag{20}$$

Um noch den geforderten Vergleich dieser Ergebnisse mit den Ergebnissen für $\theta = 0°$ durchzuführen, berechnen wir noch F_1 beziehungsweise F_2 für diesen Winkel.

$$|F_{1,0°}| > 0,29\text{kN} \tag{21}$$
$$|F_{2,0°}| > 0,29\text{kN} \tag{22}$$

Die Rechnung liefert das erwartete Ergebnis, da die Verfahren für $\theta = 0°$ identisch sind (es wird nur eine horizontale Kraft ausgeübt).

3 Aufgabe 3 (Auftrieb)

Ein halb mit Wasser gefüllter 200-ml-Becher steht auf der linken Schale einer Balkenwaage; auf der rechten Waagschale liegt eine ausreichende Menge Sand, sodass die Waage sich im Gleichgewicht befindet. Ein an einem Fädchen hängender Würfel mit 4,0cm Kantenlänge wird so tief in das Wasser getaucht, dass er komplett untertaucht, aber den Boden des Bechers nicht berührt. Um die Waage wieder ins Gleichgewicht zu bringen, muss man auf die rechte Waagschale ein Massestück m auflegen. Wie groß ist m?

3.1 Lösung Aufgabe 3

Die auf der rechten Waagschale hinzuzufügende Gewichtskraft muss die Auftriebskraft F_A auf den in das Wasser (Wa) hängenden Würfel (W) ausgleichen. Für deren Betrag gilt

$$|F_A| = F_{\text{G;Wa}} = m_{\text{Wa}}g = \rho_{\text{Wa}}V_W g \tag{23}$$

Dabei wurde eingesetzt, dass das Volumen V_{Wa} des verdrängten Wassers gleich dem Volumen V_W des Würfels ist. Die Gewichtskraft des rechts aufzulegenden Massestücks ist $F_G = mg$, ihr Betrag soll gleich dem der Auftriebskraft F_A sein (wie oben gefordert). $mg = \rho_{\text{Wa}}V_W g$ Dies lässt sich nach der Masse umstellen:

$$m = \rho_{\text{Wa}}V_W \tag{24}$$
$$= 64\text{g} \tag{25}$$

4 Aufgabe 4 (Druck)

Wenn eine Frau in hochhackigen Schuhen läuft, lastet ihr gesamtes Gewicht für einen kurzen Moment auf dem Absatz von einem ihrer Schuhe. Ihre Masse soll 56,0 kg, die Absatzfläche 1cm^2 betragen. Welchen Druck übt sie damit auf den Boden aus? Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem Druck, den ein Elefantenfuß auf den Boden ausübt. Nehmen Sie die Masse des Elefanten mit 5000 kg und die Fläche eines Fußes mit 400cm^2 an; alle vier Füße des Elefanten sind gleichmäßig belastet.

4.1 Lösung Aufgabe 4

Der Druck ist gleich dem Quotienten aus der Gewichtskraft und der Fläche. Damit ergibt sich der Druck des Stöckels auf den Boden zu

$$P = \frac{F_G}{A_{\text{Stöckel}}} \tag{26}$$

$$= 54,9\text{bar} \tag{27}$$

Wir machen nun die Annahme, dass der Elefant still steht, also alle Füße gleichmäßig belastet. Dann erhalten wir für den Druck einen seiner Füße

$$P_E = \frac{F_{\text{G;E}}}{4A_E} \tag{28}$$

$$= 3,07\text{bar} \tag{29}$$

Bildet man nun den Quotienten aus den beiden Werten, ergibt sich $\frac{P}{P_E} = 17,88$. Der Druck des Stöckels auf den Boden ist also fast 18 mal so groß wie der des Fuß eines ruhenden Elefanten.

5 Aufgabe 5 (Auftrieb)

Ein Heliumballon kann eine Last von 750 N und vernachlässigbarem Volumen tragen. Die Hülle des Ballons hat eine Masse von 1,5 kg und sei ebenfalls vernachlässigbar dünn.
a) Welches Volumen hat der Ballon?
b) Nehmen Sie an, der Ballon hätte das doppelte Volumen wie in Teilaufgabe a berechnet. Welche Anfangsbeschleunigung erfährt der Ballon, wenn er eine Last von 900 N trägt und aus Meereshöhe startet. Nehmen Sie dazu an, dass sich die Hülle nur weiter dehnt, sonst aber nicht verändert.

5.1 Lösung Aufgabe 5

Für den Fall, dass der Ballon weder steigt noch sinkt, sind Auftriebskraft und Gewichtskraft von Last, Helium und Hülle exakt im Gleichgewicht.

$$F_A - (m_{\mathrm{H}} - m_{\mathrm{He}} - m_{\mathrm{Last}})g = 0 \tag{30}$$

Mit dem Volumen V des Ballons ergibt sich die Formel zu

$$\rho_{\mathrm{Luft}} V g - m_{\mathrm{H}} g - \rho_{\mathrm{He}} V g - m_{\mathrm{Last}} g = 0 \tag{31}$$

Diese Formel umgestellt nach dem Volumen liefert unter der Annahme, dass $m_{\mathrm{Last}} = \frac{F_{\mathrm{G,Last}}}{g}$

$$\begin{aligned} V &= \frac{m_{\mathrm{H}} + \frac{F_{\mathrm{G,Last}}}{g}}{(\rho_{\mathrm{Luft}} - \rho_{\mathrm{He}})} && (32) \\ &= 76\mathrm{m}^3 && (33) \end{aligned}$$

b) Mit der nach oben beschleunigenden Kraft $m_{\mathrm{ges}} a$ ergibt sich aus der Summe der Kräfte $F_A - F_{\mathrm{G,ges}} = m_{\mathrm{ges}} a$ für a folgende Formel

$$a = \frac{F_A}{m_{\mathrm{ges}}} - g \tag{34}$$

Aufgrund des doppelten Volumens ändert sich die Masse des Heliums im Ballon, ebenso die Auftriebskraft.

$$\begin{aligned} m_{\mathrm{ges}} &= \frac{F_{\mathrm{G,Last}}}{g} + m_{\mathrm{H}} + 2V\rho_{\mathrm{He}} && (35) \\ F_A &= 2Vg\rho_{\mathrm{He}} && (36) \end{aligned}$$

Setzt man das nun in a ein, erhält man

$$\begin{aligned} a &= \frac{2Vg\rho_{\mathrm{He}}}{\frac{F_{\mathrm{G,Last}}}{g} + m_{\mathrm{H}} + 2V\rho_{\mathrm{He}}} - g && (37) \\ &= 5,1\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} && (38) \end{aligned}$$

6 Aufgabe 6 (Bernoulli)

Ein Saugheber oder Ansaugrohr ist ein umgekehrtes U-Rohr, mit dem man eine Flüssigkeit aus einem Tank oder Behälter über den Behälterrand ins Freie entleeren kann. Der große Tank (Position 1 in der Skizze) sei nach oben offen und das Rohr sei komplett mit Wasser gefüllt. Der Ausfluss des Rohres (Position 3 in der Skizze)

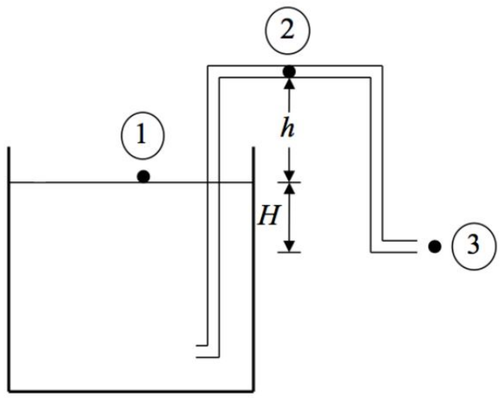


Abbildung 1: Skizze Aufgabe 7

befindet sich eine Höhe $H = 1\,\mathrm{m}$ unterhalb des Wasserspiegels im Tank. Position 2 befindet sich $h = 2\mathrm{m}$ über dem Wasserspiegel. Sie können die Strömung als ideal annehmen und die Veränderung des Wasserstandes im Tank vernachlässigen.
a) Was ist die Geschwindigkeit v_3 mit der das Wasser aus dem Ausfluss strömt?
b) Was ist der Manometerdruck p_2 (d.h. der Druck relativ zum Atmosphärendruck) an der Position 2?

6.1 Lösung Aufgabe 6

a)Mithilfe der Bernoulli-Gleichung von Position 1 und Position 3 lässt sich die Fließgeschwindigkeit an Position 3 wiefolgt berechnen.

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1 = p_3 + \frac{1}{2}\rho v_3^2 + \rho g h_3 \tag{39}$$

Da der Tank und das Rohr offen sind, gilt $p_1 = p_3 = p_0$ mit p_0 als Atmosphärendruck. Desweiteren gilt $h_1 - h_3 = H$. Damit ergibt sich für v_3

$$v_3 = \sqrt{\frac{2\rho g(h_1 - h_3)}{\rho}} \tag{40}$$

$$= \sqrt{2gH} \tag{41}$$

$$= 4,4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \tag{42}$$

b) Die Bernoulligleichung für Position 2 gibt folgenden Zusammenhang

$$p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2 = p_3 + \frac{1}{2}\rho v_3^2 + \rho g h_3 \tag{43}$$

Da der Durchmesser des Rohres konstant ist, ist $v_2 = v_3$, auch gilt nach wie vor $p_3 = p_0$.

$$p_2 - p_0 = \rho g(h_3 - h_2) \tag{44}$$
$$= -\rho g(H + h) \tag{45}$$
$$= -2,94 \cdot 10^4 \, \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2} \tag{46}$$

Der Druck ist also kleiner als der Atmosphärendruck.

7 Aufgabe 7 (Bernoulli, Kontinuitätsgleichung)

Ein Springbrunnen soll eine Fontäne 12 m hoch in die Luft spritzen. Die Düse am Boden der Brunnenschale hat einen Durchmesser von 1,0 cm. Die Pumpe befindet sich 3,0 m unterhalb der Brunnenschale. Das Rohr zur Düse hat einen Durchmesser von 2,0 cm. Berechnen Sie den notwendigen Pumpdruck.

7.1 Lösung Aufgabe 7

Wir verwenden die Indizes W für das Wasser, P für das Rohr (mit dem Durchmesser $d_P = 2$cm) aus der Pumpe sowie D für die Düse (mit dem Duchmesser $d_D = 1$cm. Die Drücke, Durchmesser, Geschwindigkeiten sowie die zu überwindenden Höhen hängen über die Bernoulli-Gleichung miteinander zusammen:

$$P_P + \rho_W g h_P + \frac{1}{2}\rho_W v_P^2 = P_D + \rho_W g h_D + \frac{1}{2}\rho_W v_D^2 \tag{47}$$

Der Druck P_D ist gleich dem Atmosphärendruck P_0, zudem gilt hier $h_P = 0$. Damit ergibt sich

$$P_P + \frac{1}{2}\rho_W v_P^2 = P_0 + \rho_W g h_D + \frac{1}{2}\rho_W v_D^2 \tag{48}$$

Für den Pumpendruck gilt also

$$P_P = P_0 + \rho_W g h_D + \frac{1}{2}\rho_W (v_D^2 - v_P^2) \tag{49}$$

Gemäß der Kontinuitätsgleichung ist $A_P \cdot v_P = A_D \cdot v_D$ und daher $v_P = \frac{A_D}{A_P} v_D = \frac{1}{4} v_D$. Nach dem Austritt aus der Düse wird das Wasser durch die Gravitation gleichmäßig abgebremst bis zu seinem höchsten Punkt. Mittels Bernoulli gilt also $\frac{1}{2} v_D^2 = g\Delta h$. Das setzen wir in die Gleichung für P_P ein

$$P_P = P_0 + \rho_W g h_D + \frac{1}{2}\rho_W \left(2g\Delta h - \frac{2}{16} g\Delta h\right) \tag{50}$$
$$= P_0 + \rho_W g(h_D + \frac{15}{16}\Delta h) \tag{51}$$
$$= 2,4 \cdot 10^5 \mathrm{Pa} \tag{52}$$

8 Aufgabe 8 (Auftrieb)

Ein Becher der Masse 1,00 kg enthält 2,00 kg Wasser; der Becher steht auf einer Waage. Ein Aluminiumblock von 2,00 kg (Dichte von Aluminium: $2.70 \cdot 10^3 \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$) hängt an einer Federwaage und ist in das Wasser vollständig eingetaucht ohne den Boden zu berühren. Welche Werte zeigen die beiden Waagen an?

8.1 Lösung Aufgabe 8

Die Kraft, die die Federwaage als scheinbare Gewichtskraft des Aluminiumblocks anzeigt, ist die Differenz aus Gewichtskraft und Auftriebskraft.

$$\begin{aligned} F_F &= F_G - F_A && (53)\\ &= \rho_{\mathrm{Alu}} V g - \rho_W V g && (54)\\ &= V g (_{\mathrm{Alu}} - \rho_W) && (55)\\ &= 12,4\mathrm{N} && (56) \end{aligned}$$

Die Kraft, die die Untere Waage auf das Becherglas ausübt, ist die Differenz aus der Gewichtskraft von Becherglas, Wasser und Aluminiumblock und der Kraft, die auf die Federwaage oberhalb des Becherglases wirkt.

$$\begin{aligned} |F_{\mathrm{Waage}}| &= m_{\mathrm{ges}} g - F_F && (57)\\ &= (m_B + m_W + m_{\mathrm{Alu}})g - m_{\mathrm{Alu}} g + \rho_W V g && (58)\\ &= (m_B + m_W + \rho_W V)g && (59)\\ &= 36,7\mathrm{N} && (60) \end{aligned}$$