Technische Universität München
Fakultät für Physik

Ferienkurs

Experimentalphysik 1

WS 2017/18

Lösung zu Aufgabenblatt 2

Annika Altwein
Maximilian Ries

Inhaltsverzeichnis

1 Aufgabe 1 (elatsischer und inelastischer Stoß)

Wir betrachten im Folgenden Zusammenstöße einer weißen Billardkugel mit einer schwarzen Billardkugel. Die schwarze Billardkugel befindet sich am Anfang aller Teilaufgaben in Ruhe. Beide Kugeln haben die gleiche Masse. Sie können Komplikationen durch Reibung und „Spin“ vernachlässigen.

a) Zunächst betrachten wir den Fall, dass beide Kugeln zentral stoßen, sodass die Bewegung vor und nach dem Stoß auf einer geraden Linie (die wir als x-Achse nehmen) liegt. Für den Fall, dass die weiße Kugel vor dem Stoß die Geschwindigkeit $v_{\text{vorher}} = (5\,,\,0)\text{m/s}$ hat und der Stoß vollkommen elastisch ist, was sind die Geschwindigkeiten der weißen und der schwarzen Kugel nach dem Stoß?
b) Jetzt gehen wir von den gleichen Anfangsbedingungen aus wie in Teilaufgabe a, nur dass die weiße Kugel plötzlich aus einem Material besteht, das sich durch den Stoß verklebt, sodass der Stoß vollkommen inelastisch ist und die beiden Kugeln nachher als gemeinsame Kugel doppelter Masse weiterlaufen. Was ist die Geschwindigkeit der neuen schwarz-weißen Kugel? Zeigen Sie, dass bei dem Stoß die kinetische Energie nicht erhalten wird.
c) Jetzt gehen wir wieder von einem vollkommen elastischen Stoß aus, betrachten aber den Fall, dass die Kugeln nicht zentral stoßen. Die Geschwindigkeit der weißen Kugel vor dem Stoß sei wieder $v_{\text{vorher}} = (5\,,\,0)\text{m/s}$, die Geschwindigkeit der weißen Kugel nach dem Stoß $v_{\text{nachher}} = (1\,,\,2)\text{m/s}$. Was ist die Geschwindigkeit der schwarzen Kugel nach dem Stoß?
d) Zeigen Sie, dass bei dem Stoß aus der letzten Teilaufgabe die kinetische Energie erhalten bleibt.

1.1 Lösungen Aufgabe 1

a) Elastischer Stoß bedeutet Energie- und Impulserhaltung

$$v_{\text{nachher,weiß}} = \frac{m_{\text{weiß}} - m_{\text{schwarz}}}{m_{\text{weiß}} + m_{\text{schwarz}}} v_{\text{vorher,weiß}} = 0 \tag{1}$$

$$v_{\text{nachher,schwarz}} = \frac{2m_{\text{weiß}}}{m_{\text{weiß}} + m_{\text{schwarz}}} v_{\text{vorher,weiß}} = v_{\text{vorher,weiß}} = (5\,,\,0)\frac{\text{m}}{\text{s}} \tag{2}$$

Dies ist der Fall des „Managerspielzeugs“.

b) Vollkommen inelastischer Stoß bedeutet nur Impulserhaltung

$$
\begin{aligned}
m_{\text{weiß}} \cdot v_{\text{vorher,weiß}} &= m_{\text{gesamt}} \cdot v_{\text{nachher,gesamt}} && (3)\\
\Rightarrow v_{\text{nachher,gesamt}} &= \frac{m_{\text{weiß}}}{m_{\text{gesamt}}} \cdot v_{\text{vorher,weiß}} = \frac{1}{2} v_{\text{vorher,weiß}} = (2{,}5\ ,\ 0)\frac{\text{m}}{\text{s}} && (4)\\
E_{kin,\text{vorher}} &= \frac{1}{2} m_{\text{weiß}} \cdot v^2_{\text{weiß,vorher}} = \frac{25}{2} m_{\text{weiß}} \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} < \frac{1}{2}(2m_{\text{weiß}}) \cdot v^2_{\text{nachher,gesamt}} && (5)\\
&= 6,25 m_{\text{weiß}} \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} = E_{kin,\text{nachher}} && (6)
\end{aligned}
$$

c) Impulserhaltung in x:

$$
\begin{aligned}
p_{\text{vorher}} &= m_{\text{weiß}} \cdot 5\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = p_{\text{nachher}} = m_{\text{weiß}} \cdot 1\,\frac{\text{m}}{\text{s}} + m_{\text{schwarz}} \cdot v_x && (7)\\
m_{\text{weiß}} &= m_{\text{schwarz}} && (8)\\
\Rightarrow v_x &= 4\,\frac{\text{m}}{\text{s}} && (9)
\end{aligned}
$$

Impulserhaltung in y:

$$
\begin{aligned}
p_{\text{vorher}} &= 0! && (10)\\
p_{\text{nachher}} &= m \cdot 2\,\frac{\text{m}}{\text{s}} + m \cdot v_y && (11)\\
\Rightarrow v_y &= -2\,\frac{\text{m}}{\text{s}} && (12)\\
\text{Somit ist } v_{\text{schwarz}} &= (4\ ,\ -2)\frac{\text{m}}{\text{s}} && (13)
\end{aligned}
$$

d)

$$
\begin{aligned}
E_{kin,\text{vorher}} &= \frac{1}{2} m v^2_{\text{vorher}} = \frac{25}{2} m \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} && (14)\\
\overset{!}{=} E_{kin,\text{nachher}} &= \frac{1}{2} m (1^2 + 2^2) \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} + \frac{1}{2} m (4^2 + 2^2) \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} && (15)\\
&= \frac{5}{2} m \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} + \frac{20}{5} m \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} = \frac{25}{2} m \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} && (16)
\end{aligned}
$$

2 Aufgabe 2 (Impulserhaltung)

Das Borisotop ^9B ist instabil und zerfällt in ein Proton und zwei Alphateilchen. Dabei werden $4,4\text{x}10^{-14}$J als kinetische Energie der Zerfallsprodukte frei. Bei einem solchen Zerfall wird die Geschwindigkeit des Protons mit $6,0\text{x}10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ gemessen, wenn der Borkern anfangs in Ruhe ist. Nehmen Sie an, dass beide Alphateilchen gleiche Energien haben. Berechnen Sie, wie schnell und in welche Richtungen bezüglich der Richtung des Protons sich die beiden Alphateilchen bewegen.

2.1 Lösung Aufgabe 2

Als negative x-Richtung nehmen wir, wie in Abbildung 2.1 gezeichnet, die Bewegungsrichtung des Protons nach dem Zerfall.
Die Beträge der Geschwindigkeiten v_α und v'_{alpha} der beiden Alphateilchen sind gleich groß. Wegen der Energieerhaltung muss daher gelten $E_{kin,p} + 2E_{kin,\alpha} = E$. Das ist gleichbedeutend mit

$$\frac{1}{2}m_p v_p^2 + 2(\frac{1}{2}m_\alpha v_\alpha^2) = E \tag{17}$$

Dieser Energiewert E sowie die Geschwindigkeit des Protons sind gegeben. Wir lösen nach der Geschwindigkeit des Alphateilchens auf und setzen die Zahlenwerte ein.

$$v_\alpha = \sqrt{\frac{E - \frac{1}{2}m_p v_p^2}{m_\alpha}} \tag{18}$$

$$= 1,44 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}} \tag{19}$$

Um nun noch den Winkel zwischen den Alphateilchen und der x-Achse zu berechnen, setzen wir Impulserhaltung an. Da der Kern vor dem Zerfall ruhte, müssen sich die Impulse gegenseitig aufheben $p_E = p_A = 0$. Da die Geschwindigkeiten der Alphateilchen betragsmäßig gleich groß sind, wird die Anordnung symmetrisch sein, weshalb im Folgenden nur die x-Komponente betrachtet werden, da sich die y-Komponenten der Impulse aufheben.
Des Weiteren verwenden wir noch, dass die Alphateilchen ungefähr die vierfache Masse des Protons machen ($m_\alpha \approx 4m_p$).

$$2(m_\alpha \cos\theta v_\alpha) - m_p v_p = 0 \tag{20}$$

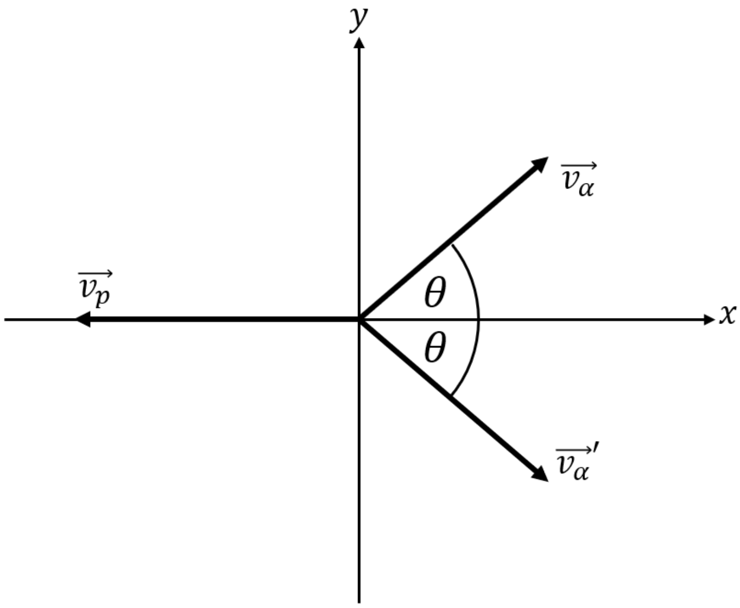
$$2(4m_p \cos\theta v_\alpha) - m_p v_p = 0 \tag{21}$$

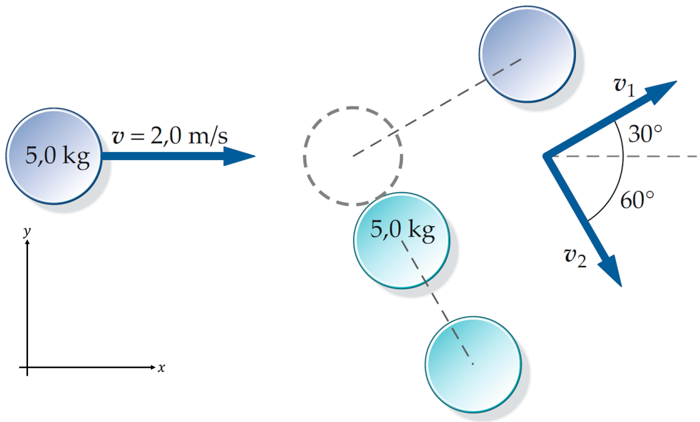
Damit ergibt sich für den Winkel θ

$$\theta = \arccos\left(\frac{v_p}{8v_\alpha}\right) = \pm 59^\circ \tag{22}$$

Abhängig davon, wie man den Winkel definiert (man kann auch den Ergänzungswinkel als Winkel zwischen den Bewegungsrichtungen des Protons und der Alphateilchen definieren), kann auch θ' erhalten werden:

$$\theta' = \pm\,(180^\circ - 59^\circ) = \pm 121^\circ \tag{23}$$





3 Aufgabe 3 (dezentraler Stoß)

Ein Puck der Masse $m = 5,0$kg und der Geschwindigkeit $v = 2,0\frac{\text{m}}{\text{s}}$ stößt auf einen identischen Puck, der auf einer reibungsfreien Eisfläche liegt. Nach dem Stoß entfernt sich der erste Puck mit der Geschwindigkeit v_1 im Winkel von 30° zu seiner ursprünglichen Richtung; der zweite Puck entfernt sich mit v_2 im Winkel von 60° (Abbildung 3).

a) Berechnen Sie die Geschwindigkeiten v_1 und v_2.

b) War der Stoß elastisch?

3.1 Lösung Aufgabe 3

Beachten Sie, dass in der folgenden Lösung v_i für den Betrag des Vektors $\vec{v_i}$ stehen soll.
a) Wegen der Impulserhaltung in in x-Richtung $p_{x,A} = p_{x,E}$ und daher:

$$mv = mv_1 \cos 30^\circ + mv_2 \cos 60^\circ \tag{24}$$
$$\Rightarrow v = v_1 \cos 30^\circ + v_2 \cos 60^\circ \tag{25}$$

Entsprechend erhalten wir für die y-Richtung $p_{y,A} = p_{y,E}$und damit:

$$0 = mv_1 \sin 30^\circ - mv_2 \sin 60^\circ \tag{26}$$
$$\tag{27}$$

Nutzt man nun diese beiden Bedingungen, um v_1 und v_2 zu ermitteln, ergibt sich:

$$v_1 \approx 1,7 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \qquad v_2 \approx 1,0 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \tag{28}$$

b) Ob der Stoß elastisch war, könnten wir ermitteln, indem wir die kinetischen Energien vor und nach dem Stoß berechnen. Wir können aber auch einfach den Winkel zwischen den beiden Endgeschwindigkeiten v_1 und v_2 betrachten. Er beträgt 90°, also war der Stoß elastisch.

4 Aufgabe 4 (Impulserhaltung)

Ein Neutron der Masse m_n stößt zentral elastisch mit einem ruhenden Atomkern der Masse m_K zusammen.
a) Zeigen Sie, dass für die kinetische Energie des Kerns $E_{kin,K} = \left[\frac{4m_n m_K}{(m_n+m_K)^2}\right] E_{kin,n}$ gilt, wobei $E_{kin,n}$ die kinetische Anfangsenergie des Neutrons angibt.
b) Zeigen Sie, dass für den anteiligen Energieverlust des Neutrons bei diesem Stoß gilt:

$$\frac{-\Delta E_{kin,n}}{E_{kin,n}} = \frac{4\frac{m_n}{m_K}}{\left[1 + \frac{m_n}{m_K}\right]^2} \tag{29}$$

c) Zeigen Sie, dass dieser Ausdruck sowohl für $m_n \ll m_K$ als auch für $m_n = m_K$ plausible Ergebnisse liefert. Welche Art von ruhenden Kernen sollte man verwenden, wenn es das Ziel ist, dass die Neutronen bei dem Stoß möglichst viel ihrer kinetischen Energie verlieren?
Die Masse eines Kohlenstoffkerns ist etwa zwölfmal so groß wie die eines Neutrons.
d) Verwenden Sie das Ergebnis aus Aufgabenteil b), um zu zeigen, dass die kinetische Energie eines Neutrons nach n zentralen Stößen mit einem ruhenden Kohlenstoffkern

nur noch etwa $0,716^n$ seiner anfänglichen kinetischen Energie $E_{kin,0}$ beträgt.
Die Neutronen, die bei der Spaltung eines Urankerns frei werden, haben eine kinetische Energie von etwa $E_{kin,0} = 2,0\text{MeV}$. Damit ein solches Neutron in einem Reaktor einen weiteren Urankern spalten kann, muss seine kinetische Energie auf etwa $0,020\text{eV}$ verringert werden.
e) Wie viele zentrale Stöße mit ruhenden Kohlenstoffkernen braucht man für diesen Energieverlust?

4.1 Lösung Aufgabe 4

a) Die beiden relevanten Informationen in der Angabe sind, dass der Stoß **zentral** und **elastisch** stattfindet.
Dem entnehmen wir, dass wir keine trigonometrischen Funktionen brauchen, um die Impulse richtig zu beschreiben und dass Energieerhaltung gilt.

$$m_n v_1 = m_n v_2 + m_k v_k \qquad \frac{1}{2} m_n v_1^2 = \frac{1}{2} m_n v_2^2 + \frac{1}{2} m_k v_k^2 \tag{30}$$

$$m_n(v_1 - v_2) = m_k v_k \qquad m_n(v_1^2 - v_2^2) = m_n(v_1 - v_2)(v_1 + v_2) = m_k v_k^2 \tag{31}$$

Teilen wir nun die rechte Seite durch die linke Seite, erhalten wir:

$$v_1 + v_2 = v_k \tag{32}$$

$$\rightarrow m_n v_1 = m_n v_2 + m_k(v_1 + v_2) \tag{33}$$

$$\rightarrow (m_n - m_k)v_1 = (m_n + m_k)v_2 \tag{34}$$

$$\Rightarrow v_2 = \frac{m_n - m_k}{m_n + m_k} v_1 \tag{35}$$

Nun wissen wir, dass $E_k = E_{n,1} - E_{n,2}$ und $E_{n,i} = \frac{1}{2} m_n v_i^2$. Damit erhalten wir als kinetische Energie des Kerns nach dem Stoß:

$$E_k = \frac{1}{2} m_n v_1^2 - \frac{1}{2} m_n v_2^2 \tag{36}$$

$$= \frac{1}{2} m_n v_1^2 \left[1 - \left(\frac{m_n - m_k}{m_n + m_k}\right)^2\right] \tag{37}$$

$$= E_{n,1} \frac{4 m_n m_k}{(m_n + m_k)^2} \tag{38}$$

b) Da im System Energieerhaltung gelten muss, ist $-\Delta E_{kin,n} = E_k$. Somit erhalten wir:

$$\frac{-\Delta E_{kin,n}}{E_{kin,n}} = \frac{4 m_n m_k}{(m_n + m_k)^2} \tag{39}$$

$$= \frac{4 \frac{m_n}{m_K}}{\left[1 + \frac{m_n}{m_K}\right]^2} \tag{40}$$

c)

- $\boldsymbol{m_n \ll m_K}$ **:**
  Wir erhalten $\frac{-\Delta E_{kin,n}}{E_{kin,n}} \approx 0$, was sich mit dem bekannten Ergebnis deckt: Stößt ein sehr leichter Gegenstand einen sehr viel schwereren Gegenstand, wird der leichte Gegenstand einfach reflektiert, nahezu ohne an Geschwindigkeit zu verlieren.

- $\boldsymbol{m_n = m_K}$ **:**
  Wir erhalten $\frac{-\Delta E_{kin,n}}{E_{kin,n}} = 1$. Auch dies ist physikalisch sinnvoll, da bei einem zentralen, elastischen Stoß zwischen zwei gleich schweren Körpern, von denen sich einer zu Beginn in Ruhe befindet, die gesamte kinetische Energie von Körper 1 auf Körper 2 übertragen wird, sodass Körper 1 nach dem Stoß ruht.

d) Nutzen wir nun das Ergebnis aus Aufgabenteil b), um das Verhältnis der Energie des Neutrons nach einem Stoß $E_{kin,n,E}$ zur Anfangsenergie des Neutrons $E_{kin,n,0}$ zu bestimmen:

$$\frac{E_{kin,n,E}}{E_{kin,n,0}} = 1 - \frac{\Delta E_{kin,n}}{E_{kin,n,0}} = \frac{(m_n - m_k)^2}{(m_n + m_k)^2} \tag{41}$$

Setzen wir die Masse des Kohlenstoffkerns als das zwölffache der Masse des Neutrons ein, erhalten wir als Anteil der Energie nach dem Stoß von der ursprünglichen Energie:

$$\frac{E_{kin,n,E}}{E_{kin,n,0}} = \frac{121}{169} = 0,716 \tag{42}$$

Also beträgt die Energie nach n Stößen $E_{kin,n,E} = 0,716^n E_{kin,n,0}$.
e) Wir setzen die angegebenen Werte in soeben verifizierte Formel ein:

$$0,020\text{eV} = 0,716^n 2,0\text{MeV} \tag{43}$$

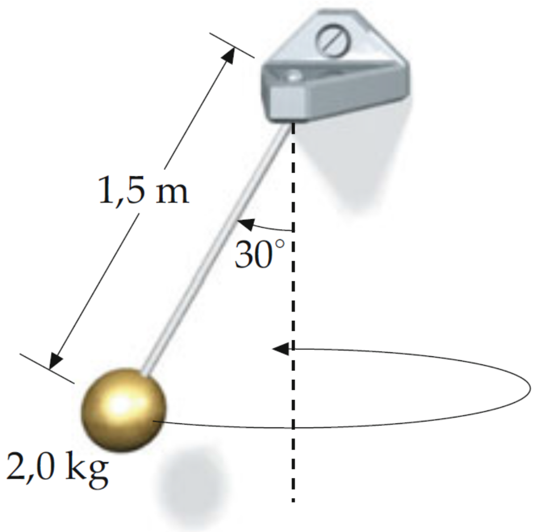
$$\Rightarrow \; 0,716^n = 10^{-8} \tag{44}$$

Logarithmieren und Auflösen nach n ergibt:

$$n = \frac{-8}{\log 0,716} \approx 55 \tag{45}$$

5 Aufgabe 5 (Drehimpulserhaltung)

Eine Kugel von $m = 2,0$kg ist an einer Schnur der Länge $l = 1,5$m befestigt und bewegt sich von oben gesehen gegen den Uhrzeigersinn auf einer horizontalen Kreisbahn. Eine solche Anordnung nennt man konisches Pendel (5). Die Schnur bildet



mit der Vertikalen einen Winkel $\theta = 30°$.
a) Bestimmen Sie die horizontale und die vertikale Komponente des Drehimpulses L der Kugel bezüglich der Aufhängung im Punkt P.
b) Berechnen Sie den Betrag von $\frac{dL}{dt}$ und zeigen Sie, dass er genauso groß ist wie der Betrag des Drehmoments, das durch die Schwerkraft bezüglich des Aufhängungspunkts ausgeübt wird.

5.1 Lösung Aufgabe 5

a) Der Drehimpuls der Kugel ist $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} = m\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}$. Gemäß dem zweiten Newton'schen Axiom gilt für die Kräfte, die auf die Kugel wirken:

$$\sum F_x = F_S \sin\theta = m\,\frac{v^2}{r\,\sin\theta} \tag{46}$$

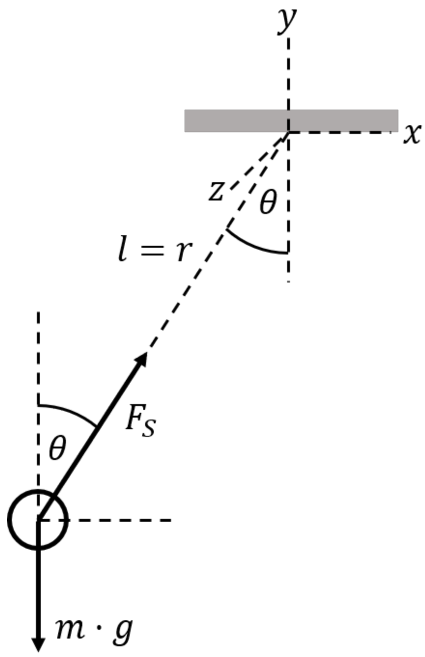
$$\sum F_y = F_S \cos\theta - mg = 0 \tag{47}$$

Wir eliminieren die Zugkraft F_S und lösen nach dem Betrag der Geschwindigkeit auf:

$$v = \sqrt{r\,g\,\sin\theta\,\tan\theta} = 2,06\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \tag{48}$$

Für den Ortsvektor erhalten wir

$$\boldsymbol{r} = (1,5\,\mathrm{m})\sin 30°\,(\cos\omega t\ \hat{\boldsymbol{x}} + \sin\omega t\ \hat{\boldsymbol{y}}) - (1,5\,\mathrm{m})\cos 30°\ \hat{\boldsymbol{z}} \tag{49}$$



Es ist $\boldsymbol{\omega} = \omega\hat{\boldsymbol{z}}$ und die Geschwindigkeit der Kugel ergibt sich durch zeitliche Ableitung des Ortsvektors:

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = (0,75\,\mathrm{m}\ \ \omega)\,(-\sin\omega t\ \ \hat{\boldsymbol{x}} + \cos\omega t\ \ \hat{\boldsymbol{y}}) \tag{50}$$

Für den Betrag der Winkelgeschwindigkeit erhalten wir gemäß $\omega = \frac{v}{r}$:

$$\omega = \frac{2,06\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{(1,5\,\mathrm{m})\ \sin 30^\circ} \tag{51}$$

Einsetzen ergibt für die Geschwindigkeit (beachte, dass der Betrag der Winkelgeschwindigkeit ein unnötiger Zwischenschritt ist, da der Betrag der Geschwindigkeit bereits bekannt ist und die Richtung der Geschwindigkeit, die wir aus der Ableitung des Ortsvektors erhalten normiert ist):

$$\boldsymbol{v} = (2,06\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}})\,(-\sin\omega t\ \ \hat{\boldsymbol{x}} + \cos\omega t\ \ \hat{\boldsymbol{y}}) \tag{52}$$

Damit erhalten wir für den Drehimpuls:

$$\boldsymbol{L} = m\boldsymbol{r}\ \times\ \boldsymbol{v} \tag{53}$$
$$= (2,0\,\mathrm{kg})\ [(1,5\,\mathrm{m})\sin 30^\circ\,(\cos\omega t\ \ \hat{\boldsymbol{x}} + \sin\omega t\ \ \hat{\boldsymbol{y}}) - (1,5\,\mathrm{m})\cos 30^\circ\ \ \hat{\boldsymbol{z}}]\ \times \tag{54}$$
$$\left[(2,06\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}})\,(-\sin\omega t\ \ \hat{\boldsymbol{x}} + \cos\omega t\ \ \hat{\boldsymbol{y}})\right] \tag{55}$$
$$= [5,35\,(\cos\omega t\ \ \hat{\boldsymbol{x}} + \sin\omega t\ \ \hat{\boldsymbol{y}}) + (3,09\hat{\boldsymbol{z}})]\ \mathrm{J}\cdot\mathrm{s} \tag{56}$$

Die horizontale und vertikale Komponente von $\boldsymbol{L}$ sind:

$$\boldsymbol{L}_{hor} = [5,35\,(\cos\omega t\ \hat{\boldsymbol{x}} + \sin\omega t\ \hat{\boldsymbol{y}})]\ \mathrm{J}\cdot\mathrm{s} \tag{57}$$
$$\boldsymbol{L}_{vert} = (3,09\ \hat{\boldsymbol{z}})\,\mathrm{J}\cdot\mathrm{s} \tag{58}$$

b) Die zeitliche Änderung des Drehimpulses erhalten wir durch differenzieren nach der Zeit:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = [5,35\,\omega(-\sin\omega t\ \hat{\boldsymbol{x}} + \cos\omega t\ \hat{\boldsymbol{y}})]\ \mathrm{J} \tag{59}$$

und ihr Betrag ist:

$$\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t}\right| = (5,35\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}\cdot\mathrm{s})\,(2,75\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}) = 15\mathrm{N}\cdot\mathrm{m} \tag{60}$$

Mit $M = \boldsymbol{r}\,\times\,\boldsymbol{F}$ erhalten wir für den Betrag des Drehmoments M:

$$M = m\,g\,r\,\sin\theta \tag{61}$$
$$= 15\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{m} \tag{62}$$

6 Aufgabe 6 (Drehimpuls, Trägheit)

Ein drehbares Serviertablett besteht aus einem schweren Kunststoffzylinder, der sich reibungsfrei um seine senkrecht stehende Symmetrieachse drehen kann. Der Zylinder hat einen Radius von $r_{Zyl} = 15\mathrm{cm}$ und eine Masse von $m_0 = 0,25\mathrm{kg}$. Auf dem Tablett befindet sich 8,0cm von der Achse entfernt eine Küchenschabe ($m_{Schabe} = 0,015\mathrm{kg}$). Sowohl das Tablett als auch die Schabe sind anfangs in Ruhe. Dann beginnt die Schabe auf einem Kreis mit dem Radius $r_{Schabe} = 8,0\mathrm{cm}$ zu laufen. Der Mittelpunkt der Kreisbahn liegt auf der Drehachse des Tabletts. Die Geschwindigkeit der Schabe bezüglich des Tabletts ist $v_{Schabe,Teller} = 0,010\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Wie hoch ist dann die Geschwindigkeit der Schabe bezüglich des Raums?

6.1 Lösung Aufgabe 6

Die Geschwindigkeit der Küchenschabe relativ zum Raum ist $v_R = v_K - \omega_T\,r_K$. Darin ist $\omega\,r_K$ die Geschwindigkeit des Tabletts am Ort der Küchenschabe, ebenfalls relativ zum Raum. Der gesamte Drehimpuls bleibt erhalten. Da das Tablett und die Schabe zu Beginn ruhen, ist er Null. Also ist $L_T - L_K = 0$, wobei L_T der Drehimpuls des Tabletts und L_K der Drehimpuls der Küchenschabe ist. Der Drehimpuls des Tabletts ist gegeben durch:

$$L_T = I_T\,\omega = \frac{1}{2}\,m_T\,r_t^2\,\omega_T \tag{63}$$

Für den Drehimpuls der Küchenschabe gilt:

$$L_K = I_K\,\omega_R = m_K\,r_K^2\,\left(\frac{v_K}{r_K} - \omega_T\right) \tag{64}$$

Einsetzen in die Beziehung $L_T - L_K = 0$ ergibt:

$$\frac{1}{2}\,m_T\,r_T^2\,\omega_T - m_K\,r_K^2\,\left(\frac{v_K}{r_K} - \omega_T\right) = 0 \tag{65}$$

$$\Rightarrow \omega_T = \frac{2\,m_K\,r_K\,v_K}{m_T\,r_T^2 + 2\,m_K\,r_K^2} \tag{66}$$

Also ist die Geschwindigkeit der Küchenschabe relativ zum Raum:

$$v_R = v_K - \omega_T\,r_K = v_K - \frac{2\,m_K\,r_K^2\,v_K}{m_T\,r_T^2 + 2\,m_K\,r_K^2} \tag{67}$$

$$= 0,967\,\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}} \tag{68}$$

Größen mit Index R bezeichnen hierbei Größen der Küchenschabe relativ zum Raum.

7 Aufgabe 7 (Rotation)

Berechnen Sie die Rotationsenergie der Erde bezüglich ihrer Drehachse und vergleichen Sie diesen Wert mit der kinetischen Energie aufgrund der Bahnbewegung des Massenmittelpunkts der Erde um die Sonne. Betrachten Sie hierfür die Erde als eine gleichförmige Kugel mit einer Masse von $M = 6,0\mathrm{x}10^{24}$kg und einem Radius von $r_E = 6,4\mathrm{x}10^6$m. Der Radius der als kreisförmig angenommenen Erdbahn beträgt $r_B = 1,5\mathrm{x}10^{11}$m.

7.1 Lösung Aufgabe 7

Die Rotationsenergie der Erde um ihre eigene Achse ist gegeben durch $E_{Rot} = \frac{1}{2}I_{Rot}\omega_{Rot}^2$.
Die Winkelgeschwindigkeit der Erde bei Rotation um ihre Achse ist:

$$\omega_{Rot} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{2\pi\mathrm{rad}}{86400\mathrm{s}} = 7,27 \cdot 10^{-5}\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}} \tag{69}$$

Der Angabe entnehmen wir, dass die Erde als homogene Kugel zu betrachten ist, weshalb ihr Trägheitsmoment durch

$$I_{Rot} = \frac{2}{5}m_E r_E^2 = 9,,83 \cdot 10^{37}\mathrm{kgm}^2 \tag{70}$$

gegeben. Damit erhalten wir für die Rotationsenergie:

$$E_{Rot} = \frac{1}{2} I_{Rot} \omega_{Rot}^2 = 2,60 \cdot 10^{29} \mathrm{J} \tag{71}$$

Der Schwerpunkt des Systems aus Erde und Sonne befindet sich sehr nahe beim Sonnenzentrum und der Abstand zwischen beiden Körpern (der Radius der Erdbahn) ist sehr groß gegen die Ausdehnung der Objekte. Daher können wir diesen durch den Abstand der Erde vom Schwerpunkt des Systems annähern und die Körper als Massenpunkte betrachten.
Das lässt uns zwei Möglichkeiten, die kinetische Energie der Erde aufgrund ihrer Bahnbewegung zu berechnen. Zum einen können wir ihre Bahngeschwindigkeit berechnen und dann über die gewohnte Formel $E_{kin,Bahn} = \frac{1}{2} m v^2$ zum Ergebnis gelangen, zum anderen können wir das Problem als eine Rotation um eine zur eigenen Symmetrieachse parallelen Achse betrachten. Dann müssen wir den Satz von Steiner anwenden, um das Trägheitsmoment zu bestimmen und dieses dann in die bereits verwendete Formel $E_{Rot,Bahn} = \frac{1}{2} I_{Rot,Bahn} \omega_{Rot,Bahn}^2$ einsetzen. Im Folgenden wird gezeigt, dass (und warum) beide Wege zum gleichen Ergebnis führen.

- **Bahngeschwindigkeit**:
  Die Bahngeschwindigkeit berechnet sich unter der Annahme einer konstanten Geschwindigkeit (die auf einer Kreisbahn gegeben wäre) als Quotient aus Umfang und Umlaufzeit:

  $$v_{Bahn} = \frac{2\pi r_B}{365,24 \cdot 86400} \tag{72}$$

  Damit ergibt sich die kinetische Energie der Bahnbewegung:

  $$E_{kin,Bahn} = \frac{1}{2} m v_{Bahn}^2 \approx 2,68 \cdot 10^{33} \mathrm{J} \tag{73}$$

- **Trägheitsmoment**:
  Die Winkelgeschwindigkeit der Erde um die Sonne ist:

  $$\omega_{Rot,Bahn} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{2\pi \mathrm{rad}}{365,24 \cdot 86400 \mathrm{s}} = 1,99 \cdot 10^{-7} \frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}} \tag{74}$$

  Da wir die Erde als Massenpunkt angenähert haben, entspricht ihr Trägheitsmoment dem Beitrag durch den Satz von Steiner:

  $$I_{Rot,Bahn} = m_E r_{Bahn}^2 \tag{75}$$

  Einsetzen liefert:

  $$E_{Rot,Bahn} = \frac{1}{2} I_{Rot,Bahn} \omega_{Rot,Bahn}^2 \approx 2,68 \cdot 10^{33} \mathrm{J} \tag{76}$$

Wir erhalten also, wie erwartet, auf beide Weisen die gleiche Energie. Dies kann man sich recht einfach herleiten:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \qquad T = \frac{2\pi r}{v} \tag{77}$$

$$\tag{78}$$

$$\Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{\frac{2\pi r}{v}} = \frac{v}{r} \tag{79}$$

$$\tag{80}$$

$$\frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} m v^2 \tag{81}$$

$$\tag{82}$$

$$\frac{1}{2} I \left(\frac{v}{r}\right)^2 = \frac{1}{2} m v^2 \tag{83}$$

$$\tag{84}$$

$$\frac{1}{2} m r^2 \left(\frac{v}{r}\right)^2 = \frac{1}{2} m v^2 \tag{85}$$

Abschließend vergleichen wir noch die Energie der Bahnbewegung mit der aus der Rotation um die eigene Achse resultierenden Energie:

$$\frac{E_{kin,Bahn}}{E_{Rot}} = \frac{2,68 \cdot 10^{33}\mathrm{J}}{2,60 \cdot 10^{29}\mathrm{J}} \approx 10^4 \tag{86}$$

8 Aufgabe 8 (Rotation, Trägheit)

Ein 90kg schwerer Professor steigt auf einen reibungsfreien Drehstuhl. Der Professor kann als homogener Zylinder mit einem Radius von 20cm genähert werden. Das Trägheitsmoment eines Vollzylinders ist allgemein durch $I = \frac{1}{2}mr^2$ gegeben, das eines Hohlzylinders durch $I = mr^2$, wobei m die Masse und r der Radius des Zylinders sind.
a)In jeder Hand hat er eine Hantel mit (jeweils) $m_H = 2,5$kg, die er anfänglich mit symmetrisch ausgestreckten Armen auf einem Abstand von (jeweils) $l_A = 1m$ von seiner Drehachse hält. Ein Student gibt ihm Schwung, so dass er sich mit einer Umdrehung pro Sekunde dreht. Was ist seine Drehgeschwindigkeit, wenn er die Arme an seinen Körper (auf $l_K = 0,2$m) heranzieht? Sie können zunächst die Masse der Arme vernachlässigen.
b) Wie ändert sich das Ergebnis von a) qualitativ, wenn die Masse der Arme berücksichtigt wird?
c) Nach dem er von einem freundlichen Studenten wieder abgebremst wurde, legt der Professor die Hanteln weg und nimmt stattdessen ein bleiverstärktes Rad zur Hand. Das Rad hat eine Masse von 5 kg, einen Radius von 0,5 m und seine Masse sei vollständig in einem dünnen Rand lokalisiert. Zunächst setzt sich der Professor

auf den in Ruhe befindlichen Drehstuhl und hält das sich mit 4 Umdrehungen pro Sekunde drehende Rad so, dass die Radachse vertikal steht und sich das Rad (von oben gesehen) gegen den Uhrzeigersinn dreht. Nun dreht der Professor das Rad um 180°, d.h. so dass sich das Rad um eine vertikale Achse im Uhrzeigersinn dreht. Was passiert mit dem Professor? (Hinweis: Zeichnen sie den Drehimpuls vor und nach der Drehung der Radachse.) Sie können davon ausgehen, dass das System aus Professor und Rad ein Gesamtträgheitmoment von $I_{\mathrm{P+R}} = 5\mathrm{kgm}^2$ hat.

8.1 Lösung Aufgabe 8

a)Auf das System Professor-Hantel wirkt kein Drehmoment, sein Drehimpuls bleibt also erhalten. Die Drehgeschwindigkeit ändert sich also aufgrund des veränderten Trägheitsmoments durch das Anziehen der Arme. Für das Trägheitsmoment des Professors gilt $I_P = \frac{1}{2} m_p \cdot r_P^2$. Für den Fall, dass er seine Arme gestreckt hat, ist das Trägheitsmoment des gesamten Systems gegeben über

$$I_1 = I_P + 2 \cdot m_H \cdot l_A^2 \tag{87}$$

Zieht er nun seine Arme an, verringert sich das Trägheitsmoment aufgrund des geringeren Abstands der Hanteln zur Rotationsachse zu

$$I_2 = I_P + 2 \cdot m_H \cdot l_K^2 \tag{88}$$

Die Drehimpulserhaltung liefert den Zusammenhang $I_1\omega_1 = I_2\omega_2$. Für die Drehgeschwindigkeit nach dem Anziehen der Arme gilt also

$$\omega_2 = \frac{I_1\omega_1}{I_2} \tag{89}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} m_p \cdot r_P^2 + 2 \cdot m_H \cdot l_A^2}{\frac{1}{2} m_p \cdot r_P^2 + 2 \cdot m_H \cdot l_K^2} \cdot \omega_1 \tag{90}$$

$$= 21,4 \frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}} \tag{91}$$

Das entspricht einer Frequenz von $f = \frac{\omega}{2\pi} = 3,4\mathrm{Hz}$.
b) Da Massenbeiträgt zum Trägheitsmoment mit r^2 gewichtet werden, führt die Verlagerung von Masse von der Drehachse weg nach außen immer zu einer Zunahme des Trägheitsmoments. Wenn also nun ein Teil der Masse des Professors durch seine Arme nach außen gestreckt wird, vergrößert sich sein Trägheitsmoment und somit auch I_1. Das Trägheitsmoment nach Anziehen der Arme I_2 bleibt jedoch näherungsweise gleich, da die Arme eng am Körper anliegen. Insgesamt vergößert sich das Verhältnis $\frac{I_1}{I_2}$ im Vergleich zum Fall der masselosenÄrme und die Winkelgeschwindigkeit ω_2 wird dementsprechend ebenfalls größer als in Aufgabenteil a).
c) Das Rad kann als Hohlzylinder genähert werden, sodass $I_{\mathrm{Rad}} = m_{\mathrm{Rad}} r_{\mathrm{Rad}}^2$. Im System Professor-Rad gilt nach wie vor Drehimpulserhaltung. Dreht der Professor

nun des Rad um 180°, ändert sich das Vorzeichen des Drehimpulses (betrachte hierzu die vektorielle Schreibweise) zu $\vec{L}'_{\text{Rad}} = -\vec{L}_{\text{Rad}}$ Da der Gesamtdrehimpuls jedoch erhalten bleiben muss, gilt $\vec{L}_{\text{Rad}} = -\vec{L}_{\text{Rad}} + \vec{L}_{\text{Prof+Rad}}$, der Professor mit dem Rad in der hand begintt also, sich zu drehen.

$$\omega_{\text{Prof+Rad}} = \frac{2I_{\text{Rad}}}{I_{\text{P+R}}} \cdot \omega_{\text{Rad}} \tag{92}$$

$$= 12,6\frac{\text{rad}}{\text{s}} \tag{93}$$