öss612

Technische Universität München
Fakultät für Physik

Ferienkurs

Experimentalphysik 1

WS 2017/18

Lösung zu Aufgabenblatt 1

Annika Altwein
Maximilian Ries

Inhaltsverzeichnis

1 Aufgabe 1 (Superposition)

Ein Fensterputzer befindet sich in einem Außenaufzug an der Fassade eines Hochhaues. Der Aufzug befindet sich in $h = 30\,\text{m}$ Höhe und bewegt sich mit einer Geschwindigkeit von $v_0 = 4\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ nach oben, als dem Fensterputzer sein Schwamm herunterfällt. Vernachlässigen sie die Luftreibung.
a) In welcher Höhe befindet sich der Schwamm 0,5s und 2,5s nachdem er die Hand verlassen hat?
b) Auf welcher Höhe befindet sich der Aufzug, wenn der Schwamm gerade den Boden berührt?
c) Berechnen Sie die maximale Geschwingigkeit, die der Schwamm erreicht.
d) Was ist die maximale Höhe über dem Erboden, die der Schwamm erreicht?
e) Skizzieren Sie die Graphen von Beschleunigung a gegen Zeit t, Geschwindigkeit v gegen t, und Höhe z gegen t.

1.1 Lösung Aufgabe 1

a) Die wirkende Beschleunigung ist g in negative z-Richtung. Daraus ergibt sich durch doppeltes integrieren und das einsetzen der jeweiligen Zeiten:

$$a = g \tag{1}$$
$$v = v_0 g \cdot t \tag{2}$$
$$z = z_0 + v_0 \cdot t \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \tag{3}$$
$$t = 0,5s \Rightarrow z = 30,775\text{m} \tag{4}$$
$$t = 2,5s \Rightarrow z = 9,375\text{m} \tag{5}$$
$$\tag{6}$$

b) Am Boden gilt $z = 0$. Setzt man das in Formel (3) ein, so ergibt sich

$$0 = h + v_0 \cdot t \frac{g \cdot t^2}{2} \tag{7}$$
$$\Rightarrow t = \frac{v_0}{g} \pm \sqrt{\frac{v_0^2}{g^2} + \frac{2h}{g}} \tag{8}$$
$$= 2.92s \tag{9}$$

Die negative Lösung ist hier nicht relevant. Diese Zeit eingesetzt in $z_A = h + v_0 t$ liefert eine Höhe von $z_A = 41,7\text{m}$
c) Benutze das Ergebnis aus b): Aufschlagszeitpunkt $t = 2.92$

$$v = v_0 - g \cdot t = -24,616\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \tag{10}$$

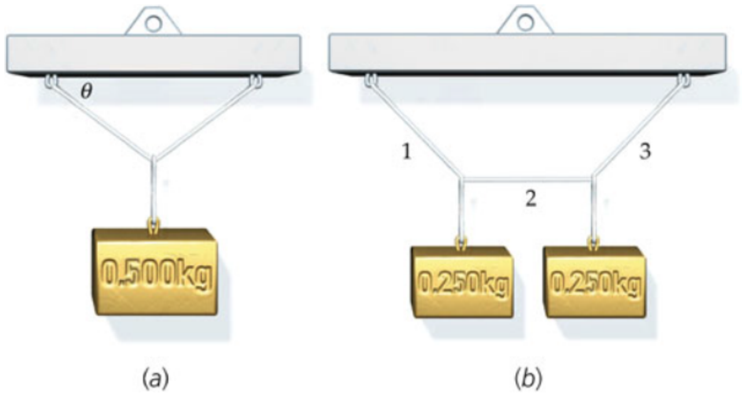


Abbildung 1: Skizze Aufgabe 2

d) z (und demnach Formel (3)) wird maximal für

$$\frac{\partial z}{\partial t} = 0 \tag{11}$$

Das entspricht dem Moment, wenn die Geschwingigkeit in z-Richtung Null ist.

$$0 = v_0 - g \cdot t \tag{12}$$

$$t = \frac{v_0}{g} = 0,41\text{s} \tag{13}$$

Zu diesem Zeitpunkt ist $z(t = 0,41\,\text{s}) = 30,81m$
e) Da die Beschleunigung konstant ist ergibt sich eine Gerade bei $y(t) = 9.81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Wird die Geschwindigkeit gegen die Zeit aufgetragen erhält man eine Gerade mit $g = -9.81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ als Steigung und einen Schnittpunkt mit der X-Achse bei $t = 0,41\,\text{s}$ Trägt man z gegen t auf erhält man eine nach unten geöffnete Parabel mit einem Maximum bei $y(t = 0,41\,\text{s}) = 30,81\text{m}$.

2 Aufgabe 2 (Kräftegleichgewicht)

In Abbildung 1 a) ist ein 0,500kg Gewicht in der Mitte eines 1,25m langen Seils aufgehängt. Die Enden des Seils sind an zwei Punkten im Abstand von 1,00m an der Decke befestigt.
a) Welchen Winkel bildet das Seil mit der Decke?
b) Wie groß ist die Zugkraft in dem Seil?
Das 0,500 kg Gewicht wird entfernt, und an dem Seil werden zwei 0,250 kg Gewichte so befestigt, dass die Längen der drei Seilabschnitte gleich sind (Abbildung 1 b)).
c) Wie groß ist die Zugkraft in jedem Seilabschnitt?

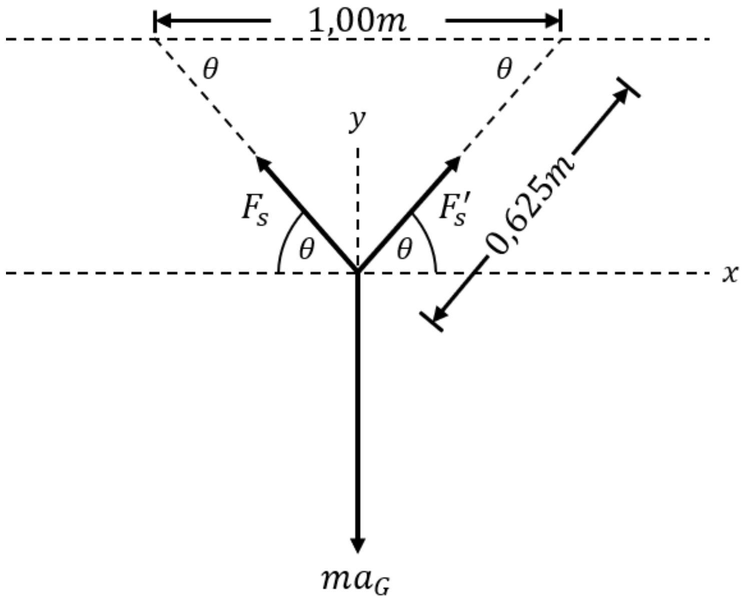


Abbildung 2: Skizze zu a)

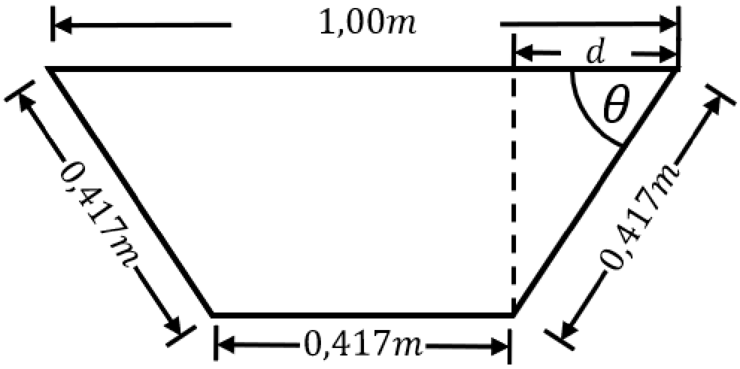


Abbildung 3: Skizze zu Größen bei b)

2.1 Lösung Aufgabe 2

2.2 Lösung Gewichte an Seil

a) Aus Abbildung 2 lesen wir ab:

$$\theta = \arccos \frac{0,50\text{m}}{0,625\text{m}} = 36,9^\circ \approx 37^\circ \tag{14}$$

b) Wir betrachten die y-Komponenten der Gleichung $\Sigma F_{i,y} = ma_y = 0$ für das zweite Newton'sche Axiom im Bezug auf das Gewichtsstück. Mit $|F_S'| = |F_S|$ und

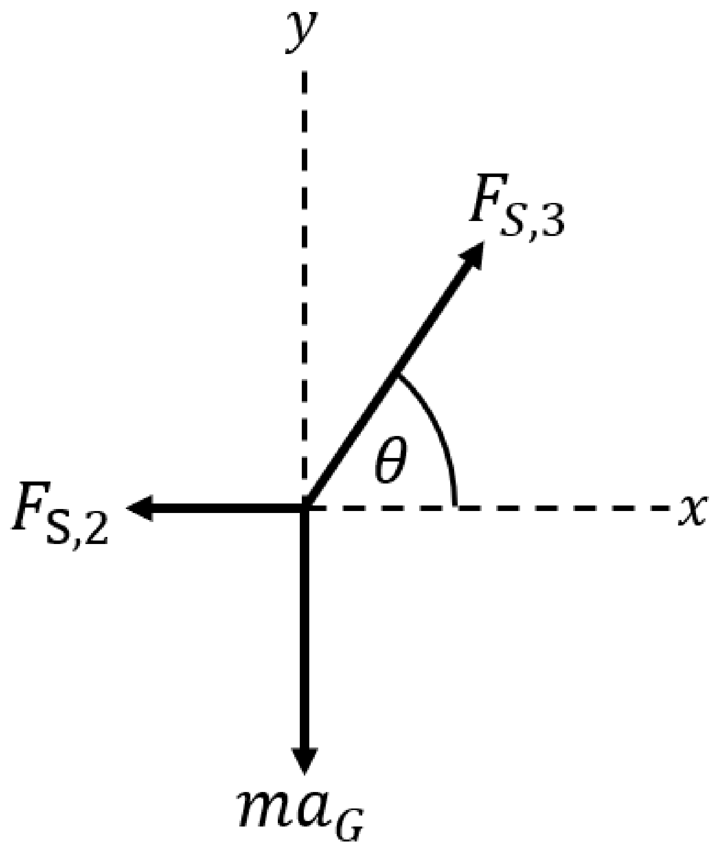


Abbildung 4: Skizze zu Kräften bei b)

$a_y = 0$ erhalten wir:

$$2|F_S|\sin\theta - mg = 0 \tag{15}$$

Damit ergibt sich für den Betrag der Zugkraft

$$|F'_S| = \frac{mg}{2\sin\theta} = \frac{(0,500\text{kg})(9,81\frac{\text{m}}{\text{s}^2})}{2\sin 36,9^\circ} = 4,1\text{N} \tag{16}$$

c) Um den Winkel θ der beiden schrägen Seilabschnitte gegen die Horizontale zu ermitteln, skizzieren wir zunächst die Anordnung und tragen dabei die aus der Angabe zu entnehmenden Größen ein(siehe Abbildung 3). Weil alle Seilabschnitte gleich lang sind, hat jeder von ihnen die Länge $\frac{(1{,}25\text{m})}{3} = 41667\text{m}$. Damit hat die Strecke d die Länge:

$$d = \frac{1,00\text{m} - 0,41667\text{m}}{2} = 0,29167\text{m} \tag{17}$$

Hiermit können wir den Winkel θ berechnen:

$$\theta = \arccos\frac{d}{0,41667\text{m}} = 45,57^\circ \tag{18}$$

Abbildung 4 zeigt die Kräfte am rechten Knoten über dem rechten Gewichtsstück. Auch an diesem Punkt muss wie in Teilaufgabe b) das zweite Newton'sche Axiom $\Sigma F_{i,y} = ma_y = 0$ gelten. Da sich das System in Ruhe befindet, herrscht keine **resultierende** Kraft.

$$|F_{S,3}|\sin\theta - mg = 0 \tag{19}$$

$$\Rightarrow |F_{S,3}| = \frac{mg}{\sin\theta} = 3,434\text{N} \tag{20}$$

$$\approx 3,4\text{N} \tag{21}$$

Um die horizontale Zugkraft $|F_{S,2}|$ zu berechnen, ziehen wir erneut das zweite Newton'sche Axiom heran, diesmal jedoch für die x-Komponenten der Kräfte. Auch hier ist die Beschleunigung $a_x = 0$ und wir erhalten:

$$|F_{S,3}|\cos\theta - |F_{S,2}| = 0 \tag{22}$$

$$\Rightarrow |F_{S,2}| = 2,4\text{N} \tag{23}$$

Da die Anordnung spiegelsymmetrisch ist, muss $|F_{S,1}| = |F_{S,3}| = 3,4\text{N}$ gelten.

3 Aufgabe 3 (Arbeit, Leistung)

Eine elektrische Lokomotive mit einer installierten Leistung von 4,5 MW (DB-Baureihe150) beschleunigt einen Güterzug auf gerader, ebener Strecke von $18\frac{\text{km}}{\text{h}}$

auf $90\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ und braucht dazu bei Einsatz der vollen Leistung 3 Minuten.
a) Vernachlässigen Sie die Reibung und berechnen Sie die Masse des Zuges.
b) Geben Sie die Geschwindigkeit des Zuges $v(t)$ und die beschleunigende Kraft $F(t)$ als Funktion der Zeit.
c) Berechnen Sie die Weg-Zeit-Funktion des Zuges. Wie weit fährt der Zug in diesen drei Minuten?
d.) Kann die Lok diesen Zug auch bei 2% Steigung, d.h. 2m Höhengewinn auf 100m Fahrstrecke, noch auf $90\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ halten?

3.1 Lösung Aufgabe 3

a)

$$P = \frac{\Delta E_{\mathrm{kin}}}{\Delta t} \tag{24}$$

Mit $\Delta E_{\mathrm{kin}} = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2)$ ergibt sich P zu

$$P = \frac{1}{2\Delta t}m(v_2^2 - v_1^2) \tag{25}$$

$$\Rightarrow m = \frac{2P\Delta t}{v_2^2 - v_1^2} \tag{26}$$

$$= 2700\,\mathrm{t} \tag{27}$$

b) Aus $P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = F \cdot v$ folgt

$$2\frac{P}{m}\mathrm{d}t = 2v\mathrm{d}v = \mathrm{d}(v^2) \tag{28}$$

$$F = \frac{P}{v} = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \tag{29}$$

$$\Rightarrow \int_{v_1^2}^{v^2} \mathrm{d}(v^2) = m\int_0^t 2\frac{P}{m}\mathrm{d}t \tag{30}$$

$$v(t) = \sqrt{\frac{2P}{m}t + v_1^2} \tag{31}$$

Ebenso folgt aus $F = \frac{P}{v}$

$$F(t) = \frac{P}{\sqrt{\frac{2P}{m}t + v_1^2}} \tag{32}$$

c) aus $v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ folg

$$s(t) = \int_0^t v(t)\mathrm{d}t \tag{33}$$

$$= \frac{m}{3P}\left[\left(\sqrt{\frac{2P}{m}t + v_1^2}\right)^3 - v_1^3\right] \tag{34}$$

$$\Rightarrow s(t = 3\,\mathrm{min}) = 3100\,\mathrm{m} \tag{35}$$

Die durch die Steigung zusätzlich in z-Richtung benötigte Leistung beträgt

$$P_z = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}E_{pot}}{\mathrm{d}t} = mg\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = mg\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = mg\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}s}v \tag{36}$$

$$= 13,5\,\mathrm{MW} > 4,5\,\mathrm{MW} \tag{37}$$

Im letzten Schritt wurde verwendet, dass $\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}s} = \frac{2}{100}$. Die Lok schafft es folglich <u>nicht</u>, die Geschwindigkeit zu halten.

4 Aufgabe 4 (Kreisbewegung)

Ein Modellflugzeug mit einer Masse von $m = 0,400$kg ist an einer horizontalen Schnur befestigt. Das Flugzeug soll auf einem horizontalen Kreis mit einem Radius von $R = 5,70$m fliegen. (Das Gewicht ist dabei mit der nach oben gerichteten Auftriebskraft, die die Luft auf die Flügel ausübt, im Gleichgewicht.) Das Flugzeug legt in $t = 4,00$s 1,20 Runden zurück.
a) Gesucht ist der Geschwindigkeitsbetrag, mit dem das Flugzeug fliegen muss.
b) Berechnen Sie die Kraft, die auf die Hand ausgeübt wird, die die Schnur hält. (Die Schnur kann als masselos angenommen werden.)

4.1 Lösung Aufgabe 4

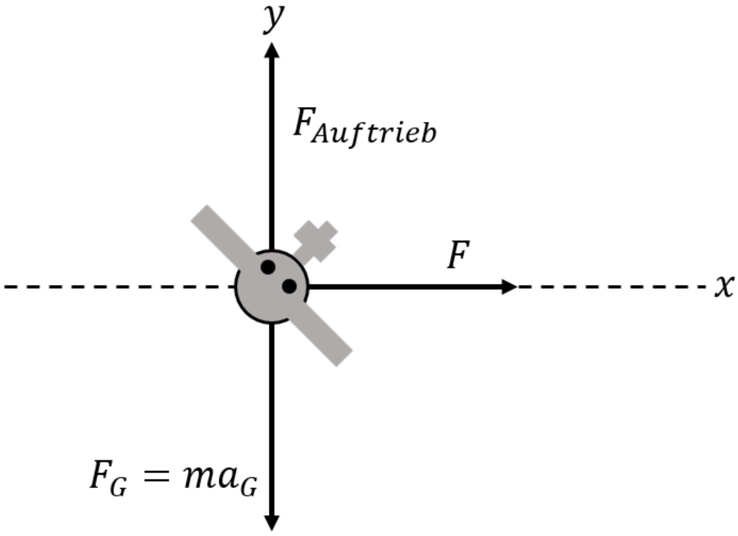
a) Die Geschwindigkeit ergibt sich aus dem Umfang der Kreisbahn und der Umlaufzeit T:

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi(5,70\mathrm{m})}{\frac{4,00}{1,20}\mathrm{s}} = 10,7\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \tag{38}$$

b) Abbildung 4.1 zeigt die auf das Modellflugzeug wirkenden Kräfte. Da das Flugzeug keine Beschleunigung entlang der Schnur erfährt, ergibt sich:

$$|F_S| = m\frac{v^2}{r} = m\frac{\frac{2\pi r}{T}^2}{r} = \frac{4\pi^2 mr}{T^2} \tag{39}$$

$$= 8,10\mathrm{N} \tag{40}$$



5 Aufgabe 5 (Drehmoment)

Beim Stricken ist Ihnen eine Garnrolle (äußerer Radius $R_>$, innerer "Fadenabwickelradius" $R_<$) auf den Boden gefallen und ein Stück weit gerollt. Sie wollen Sie an dem Faden, den Sie noch in der Hand halten zu sich ziehen und müssen feststellen, dass sich die Garnrolle nur immer weiter abrollt. Entnervt lassen Sie den Faden auf den Boden fallen, wo Ihre Katze Ihnen zur Hilfe eilt – auch sie zieht an dem Faden, nur diesmal wickelt sich die Garnrolle dabei auf. Ihr physikalischer Verstand schaltet sich nun doch ein und Sie stellen fest, dass die Richtung, in die sich die Garnrolle dreht davon abhängt, in welchem Winkel ϕ man am Faden zieht. Nun wollen Sie es genauer wissen:
a) Bestimmen Sie, für welche Winkel ϕ zwischen Faden und Boden sich die Rolle im bzw. gegen den Uhrzeigersinn dreht. Was ist der Grenzwinkel ϕ_g, an dem sich die Rolle gerade nicht dreht?
b) Sie ziehen die Garnrolle zu sich hin. Berechnen Sie die Beschleunigung der Rolle, wenn Sie im Winkel ϕ mit der Kraft F am Faden ziehen.
c) Berechnen Sie das Drehmoment M, welches auf die Garnrolle wirkt.

5.1 Lösung Aufgabe 5

a)Wir ersetzen im Folgenden den Winkel ϕ mit α. Der Radius der Garnrolle sei R, der Fadenabrollradius sei r. Der Auflagepunkt A legt die tatsächliche Drehachse fest! Je nach Zugrichtung liegt die Verlängerung der Fadenlinie vor oder hinter dem Drehpunkt A (Bild 1). Das bedeutet, dass der Ortsvektor r bezüglich des Auflagepunktes

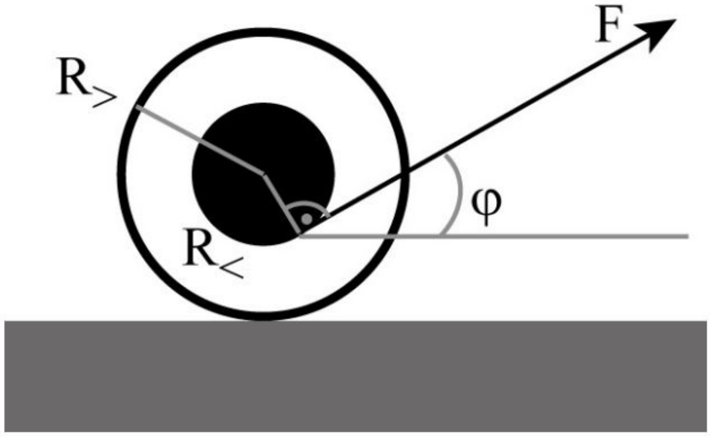


Abbildung 5: Skizze Aufgabe 5

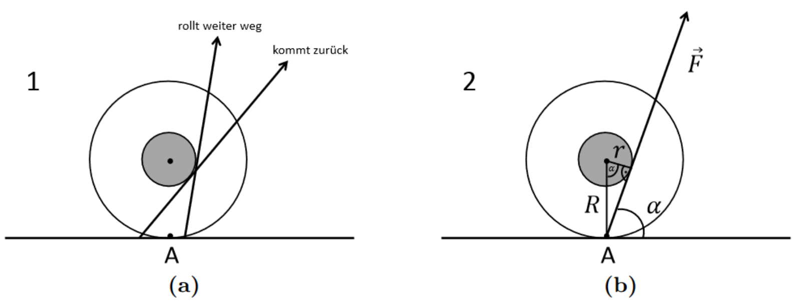


Abbildung 6: Skizze zur Lösung Aufgabe 5

A, an welchem die Kraft F ansetzt, zusammen mit der Kraft F ein Drehmoment wirkt, welches eine Bewegung des Schwerpunkts nach links oder nach rechts bewirkt. Nur für den Fall, der in Abb osGarnLös) dargestellt ist, wirkt sind e und F parallel zueinander und demnach ihr resultierendes Drehmoment Null (Kreuzprodukt zweier aufeinander senkrechter Vektoren ist null). Der Winkel, bei dem die Rolle "durchdreht " ist also gegeben durch $\cos(\alpha) = \frac{r}{R}$.
b)Der Zug am Faden bewirkt eine horizontale Bewegung (Translation des Schwerpunktes), aber auch eine Rotation der Rolle. Für die horizontale Kraftkomponente gilt:

$$m\ddot{x}_s = F\cos(\alpha) - F_H \tag{41}$$

Dabei ist F_H die aufgrund der Haftung horizontal entgegenwirkende Kraft. Sie ist noch unbekannt. Da wir also mit $\ddot{x}$ und F_H zwei Unbekannte haben, brauchen wir eine zweite Gleichung. Wir erhalten sie durch Anwendung des Drehimpulssatzes bzgl. des Schwerpunktes:

$$T = \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = I\ddot{\phi} = -\frac{I}{R}\ddot{x}_s \tag{42}$$

Hier benutzt man für die abgewickelte Strecke $x_s = -\phi R$ das negative Vorzeichen, da die Rolle im Uhrzeigersinn rollt. (Nach mathematischer Konvention ist eine Winkeldrehung gegen den Uhrzeigersinn positiv) Beim Gesamtdrehmoment $\vec{T} = \vec{r}\mathrm{x}\vec{F}$ mit Betrag T muss beachtet werden, dass dem Drehmoment, dass durch den Faden wirkt ($T_F = rF\sin(90°)$) dass durch die Haftreibung bedingte Drehmoment ($T_H = RF_H\sin(90°)$) entgegenwirkt. Insgesamt gilt also $T = T_F - T_H = Fr - F_H R$ und somit

$$F_H = \frac{F \cdot r - T}{R} = \frac{Fr - \frac{I}{R}\ddot{x}_s}{R} \tag{43}$$

$$\Rightarrow m\ddot{x}_s = F\cos(\alpha) - \frac{Fr - \frac{I}{R}\ddot{x}_s}{R} \tag{44}$$

$$\ddot{x}_s = \frac{F(\cos(\alpha) - \frac{r}{R})}{\frac{I}{R^2} + m} \tag{45}$$

Hier sieht man auch noch einmal, dass genau bei $\cos(\alpha) = \frac{r}{R}$ die Beschleunigung ihr Vorzeichen ändert.

6 Aufgabe 6 (Gravitation)

Sie haben ein Gravimeter, das Änderungen des Gravitationsfelds mit einer Empfindlichkeit $\Delta G/G = 1{,}00 \cdot 10^{-11}$ bestimmen kann.
a) Sie verstecken sich mit dem Gerät hinter einem Baum, während Ihr 80 kg schwerer Freund von der anderen Seite auf Sie zu kommt. Wie nah kann Ihr Freund an Sie

herankommen, bevor das Messgerät durch seine Anwesenheit eine Änderung von G feststellt?
b) Sie fahren in einem Heißluftballon und benutzen das Gerät, um Ihre Steiggeschwindigkeit zu messen (es wird angenommen, dass der Ballon eine konstante Beschleunigung erfährt). Welches ist die kleinste Höhenänderung, die Sie mit Ihrem Gerät im Gravitationsfeld der Erde bestimmen können?

$$r_E = 6,37 \cdot 10^6 \mathrm{m} \tag{46}$$

$$m_E = 5,98 \cdot 10^{24} \mathrm{kg} \tag{47}$$

6.1 Lösung Aufgabe 6

a) Das Gravitationsfeld der Erde an ihrer Oberfläche ist $G_E = \Gamma \frac{m_\mathrm{E}}{r_\mathrm{E}^2}$. Wir nehmen die Masse m des Freundes als punktförmig an. Bei der angegebenen relativen Änderung Auflösung von $1{,}00 \cdot 10^{-11}$ ist die geringste noch feststellbare Änderung des Gravitationsfeldes gegeben durch

$$G = \frac{\Gamma m}{r} = G_\mathrm{E} \cdot 1{,}00 \cdot 10^{-11} = (1{,}00 \cdot 10^{-11}) \frac{\Gamma M_\mathrm{E}}{r_\mathrm{E}^2} \tag{48}$$

Lösen wir diese Gleichung nach r auf, erhalten wir für den Abstand, bis zu dem sich Ihr Freund (vom Gerät) unbemerkt nähern kann

$$r = r_\mathrm{E} \cdot \sqrt{\frac{(1{,}00 \cdot 10^{11}) m}{m_E}} = (6{,}37 \cdot 10^6\,\mathrm{m}) \cdot \sqrt{\frac{(1{,}00 \cdot 10^{11}) \cdot 80\,\mathrm{kg}}{5{,}98 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}}} = 7{,}37\,\mathrm{m}. \tag{49}$$

b) Wir leiten G nach r ab.

$$\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}r} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} \frac{\Gamma m}{r^2} = -\frac{2}{r} \frac{\Gamma m}{r^2} = -\frac{2}{r} G \tag{50}$$

Setzen wir $r = r_\mathrm{E}$, können wir dieses Differential zu einer Differenz runden.

$$\frac{\Delta G}{G} = -\frac{2 \Delta r}{r} \tag{51}$$

Mit der gegebenen Genauigkeit des Geräts errechnet man also für die minimale Höhenänderung

$$\Delta r = \left| -2 \frac{\Delta G}{G} \cdot r_\mathrm{E} \right| = \left| -\frac{1}{2} (6{,}37 \cdot 10^6\,\mathrm{m}) \cdot (1{,}00 \cdot 10^{-11}) \right| = 3{,}19 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{m} = 31{,}9\,\mu\mathrm{m} \tag{52}$$

Sie werden also keinen Spaß dabei haben, einen genauen Wert vom Gerät in Ihrer Hand abzulesen.

7 Aufgabe 7 (Superpositon 2)

Eine Kugel verlässt die Gewehrmündung in der Höhe $y_0 = 1,7\text{m}$ über dem Boden mit der Geschwindigkeit $v_0 = 250\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Sie soll ein auf der gleichen Höhe liegendes, $d = 100\text{m}$ von der Mündung entferntes Ziel treffen.
a) Wie weit oberhalb des eigentlichen Zielpunkts liegt der Punkt, den man dabei anpeilen muss?
b) Wie weit hinter dem Ziel trifft die Kugel auf dem Boden auf?

7.1 Lösung Aufgabe 7

Bei Vernachlässigung des Luftwiderstands erfährt die Kugel entlang ihrer Wurfparabel die konstante Erdbeschleunigung. Wir legen das Koordinatensystem so an, wie es in Abbildung 7.1 gezeigt ist. Der Ursprung liegt am Erdboden, $1,7\text{m}$ unterhalb der Gewehrmündung.
a) Für den horizontalen Ort gilt bei beschleunigter Bewegung die allgemeine Gleichung:

$$x(t) = x_0 + v_{0,x}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \tag{53}$$

Im vorliegenden Fall ist $x_0 = 0$ und $v_{0,x} = |v_0| \cos\theta_0$ sowie $a_x = 0$. Damit ergibt sich

$$x(t) = (|v_0| \cos\theta_0)t \tag{54}$$

Analog erhält man für die vertikale Bewegung mit $v_{0,y} = |v_0| \sin\theta_0$ und $a_y = -g$

$$y(t) = y_0 + (|v_0| \sin\theta_0)t - \frac{1}{2}gt^2 \tag{55}$$

Eliminiert man hieraus t und setzt in der Folge $y = y_0$, da sich das Ziel ja auf Höhe der Gewehrmündung befindet, erhält man:

$$y(x) = y_0 + \tan\theta_0 x - \frac{g}{2|v_0|^2 \cos{\theta_0}^2}x^2 \tag{56}$$

$$0 = \tan\theta_0 x - \frac{g}{2|v_0|^2 \cos{\theta_0}^2}x^2 \tag{57}$$

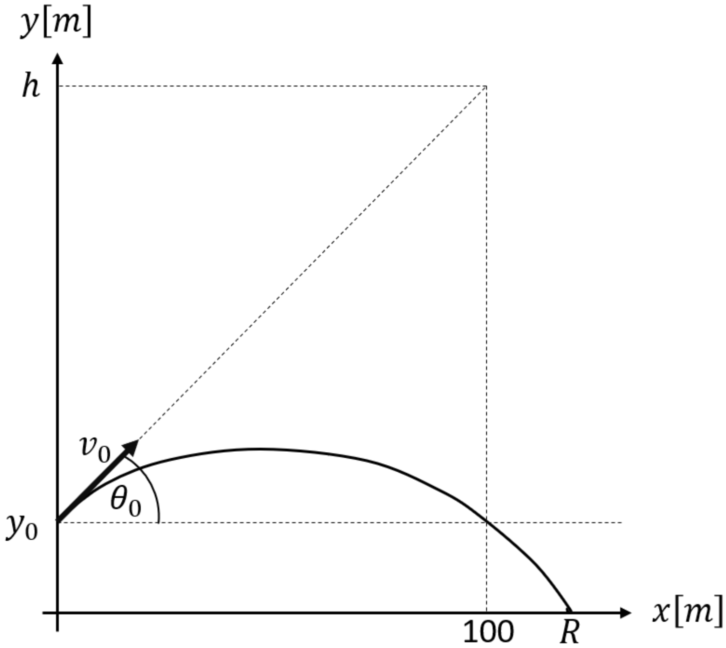
Daraus ergibt sich nun der Winkel θ_0 zu:

$$\theta_0 = \frac{1}{2}\arcsin\frac{xg}{|v_0|^2} = \frac{1}{2}\arcsin\frac{(100\text{m})(9,81\frac{\text{m}}{\text{s}^2})}{(250\frac{\text{m}}{\text{s}})^2} = 0,450^\circ \tag{58}$$

Es gibt noch eine zweite Lösung bei $\theta_0 = 89,6^\circ$, die hier jedoch nicht gesucht ist.
Für die anzupeilende Höhe $h - y_0$ über dem Ziel gilt:

$$\tan\theta_0 = \frac{h - y_0}{(100\text{m})} \tag{59}$$

$$h - y_0 = 0,785\text{m} \tag{60}$$



b)Die Kugel trifft hinter dem Ziel in der Höhe $y = 0$ und in der horizontalen Entfernung R von der Gewehrmündung auf den Boden auf.

$$0 = y_0 + \tan\theta_0 R - \frac{g}{2|v_0|^2 \cos{\theta_0}^2} R^2 \tag{61}$$

Diese quadratische Gleichung hat die physikalisch sinnvolle Lösung $R = 206\text{m}$. Da jedoch nach der horizontalen Entfernung zwischen Auftreffpunkt und Ziel gefragt war, müssen wir hiervon noch die Entfernung des Ziels von der Gewehrmündung abziehen und wir erhalten:

$$\Delta x = R - 100\text{m} = 106\text{m} \tag{62}$$

8 Aufgabe 8 (gleichm. beschl. Bewegung)

Sie fahren mit dem Auto in der Stadt mit $40,0\frac{\text{km}}{\text{h}}$ auf eine Kreuzung zu. Sie sehen, dass die Ampel an der Kreuzung 65m vor Ihnen auf Gelb schaltet. Sie wissen, dass die Ampel an dieser Kreuzung genau $5,0$s gelb bleibt, bevor sie auf Rot schaltet. Zunächst brauchen Sie $1,0$s, um nachzudenken. Anschließend beschleunigen Sie das Auto gleichförmig. Sie schaffen es gerade, mit dem $4,5$m langen Auto über die $15,0$m breite Kreuzung zu kommen, da wird die Ampel auch schon rot. So entgehen

Sie gerade einem Strafzettel für das Überfahren der Kreuzung bei Rot. Unmittelbar nachdem Sie über die Kreuzung sind, nehmen Sie beruhigt den Fuß vom Gaspedal. Kurze Zeit später werden Sie wegen überhöhter Geschwindigkeit angehalten. Sie nehmen an, dass Sie für zu schnelles Überfahren der Kreuzung bestraft werden sollen.
Berechnen Sie diese Geschwindigkeit und entscheiden Sie, ob es sich lohnt, den Bußgeldbescheid anzufechten, wenn Sie davon ausgehen, dass eine Höchstgeschwindigkeit von $50,0\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ gilt.

8.1 Lösung Aufgabe 8

Zwischen dem Zeitpunkt, zu dem die Ampel auf Gelb schaltet, und dem Zeitpunkt, zu dem die hintere Stoßstange des Autos die Kreuzung verlässt, legt das Auto die Strecke

$$\Delta x_{ges} = 65\mathrm{m} + 15\mathrm{m} + 4,5\mathrm{m} = 84,5\mathrm{m} \tag{63}$$

zurück. Einen Teil dieser Strecke, den wir mit Δx_{konst} bezeichnen, legt es dabei mit konstanter Geschwindigkeit zurück, während Sie überlegen. Ziehen wir diese Strecke von der gesamten Strecke ab, erhalten wir die Strecke, in der Sie beschleunigen.

$$\Delta x_{beschl} = \Delta x_{ges} - \Delta x_{konst} \tag{64}$$

Wegen der gleichförmigen Beschleunigung gilt für die dabei zurückgelegte Strecke:

$$\Delta x_{beschl} = v_{Anfang} \Delta t_{beschl} + \frac{1}{2} a (\Delta t_{beschl})^2 \tag{65}$$

Darin ist v_1 die Geschwindigkeit beim Beginn der Beschleunigung. Das Auto erfährt während der Zeitspanne Δt_{beschl} die Beschleunigung a und erreicht dadurch die Geschwindigkeit

$$v_{max} = v_{Anfang} + a \Delta t_{beschl} \tag{66}$$

Also ist $a = \frac{v_{max} - v_{Anfang}}{\Delta t_{beschl}}$. Einsetzen in die obige Gleichung ergibt für die Beschleunigungsstrecke

$$\begin{aligned} \Delta x_{beschl} &= v_{Anfang} \cdot \Delta t_{beschl} + \frac{1}{2} \frac{v_{max} - v_{Anfang}}{\Delta t_{beschl}} (\Delta t_{beschl})^2 && (67) \\ &= v_{Anfang} \cdot \Delta t_{beschl} + \frac{1}{2} (v_{max} - v_{Anfang})(\Delta t_{beschl}) && (68) \end{aligned}$$

Andererseits gilt, wie oben ermittelt:

$$\Delta x_{beschl} = \Delta x_{ges} - \Delta x_{konst} \tag{69}$$

Gleichsetzen, nach v_{max} auflösen und einsetzen der angegebenen Entfernungen und Geschwindigkeiten liefert:

$$v_{max} = \frac{2(\Delta x_{ges} - \Delta x_{konst})}{\Delta t_{beschl}} - v_{Anfang} = 25\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \tag{70}$$

Das sind umgerechnet $90\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$. Sie sollten Ihren Bußgeldbescheid also besser nicht anfechten.