Probeklausur zum Ferienkurs Analysis I für Physiker

Florian Kollmannsberger, Jonas Habel

16.03.2018

Bearbeitungszeit: 90 Minuten
Erlaubte Hilfsmittel: **ein** doppelseitig handschriftlich beschriebenes DIN A4 Blatt
Bei Multiple-Choice-Aufgaben sind **genau** die zutreffenden Aussagen anzukreuzen.
Es können auch mehrere Antworten richtig sein.

1 Komplexe Zahlen

Berechnen sie Real- und Imaginärteil von

(a) $z = (\frac{1+i}{1-i})^k \qquad k \in \mathbb{N}$
Hinweis: Bringen Sie zuerst $\frac{1+i}{1-i}$ auf die übliche Form für eine komplexe Zahl.

(b) $z = (\sqrt{3}+i)^{100}$
Hinweis: Berechnen Sie zuerst die Polardarstellung von $\sqrt{3}+i$.

LÖSUNG:

(a) $(\frac{1+i}{1-i})^k = (\frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)})^k = (\frac{2i}{2})^k = i^k$ ist 1 für $k = 4n$, i für $k = 4n+1$, -1 für $k = 4n+2$ und , -i für $k = 4n+3, \quad n \in \mathbb{N}$.

(b) Der Betrag von $\sqrt{3}+i$ ist 2, und es gilt $\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos(\phi)$. Damit ist $\phi = \pm\frac{\pi}{6}$. Da $sin(\frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{2}$ negativ ist, ist der Winkel zur reelen Achse $\phi = \frac{\pi}{6}$ und deswegen, $\sqrt{3}+i = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$. Eingesetzt ergibt $z^{100} = (2e^{i\frac{\pi}{6}})^{100} = 2^{100}e^{i\frac{100\pi}{6}} = 2^{100}e^{i\frac{2\pi}{3}} = 2^{100}(\cos(\frac{2\pi}{3}) + i\sin(\frac{2\pi}{3})) = 2^{100}(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})$

2 Vollständige Induktion

Sei $\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$. Zeigen Sie:

(a) Für alle $k, n \in \mathbb{N}$ und $k \leq n$ gilt :

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$$

(b) Für alle $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt der Binomische Lehrsatz:

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

Hinweis zu (b): Versuchen Sie, (a) zu verwenden.

LÖSUNG:

(a) $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{k \cdot n!}{k!(n-k+1)!} + \frac{(n-k+1)\cdot n!}{k!(n-k+1)!} = \frac{((n-k+1)+k)\cdot n!}{k!(n+1-k)!} = \binom{n+1}{k}$

(b) I.A.: $(1+x)^1 = 1+x, \quad \sum_{k=0}^{1}\binom{1}{k}x^k = \binom{1}{0}x^0 + \binom{1}{1}x^1 = 1+x$

I.B.: $(1+x)^n = \quad \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$

I.S.:

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) \overset{\text{I.B.}}{=} (1+x)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{k+1} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k \tag{1}$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}x^k + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k = \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}x^k + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}x^k + x^{n+1} + 1 \tag{2}$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right)x^k + x^{n+1} + 1 \overset{\text{(a)}}{=} \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}x^k + x^{n+1} + 1 = \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}x^k \tag{3}$$

3 Folgen und Reihen

a) Bestimmen Sie den Grenzwert: $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^4+1} - n^2\right)$

☐ $-\infty$ ☐ -1 ☐ 0 ☐ $\frac{1}{2}$ ☐ 1 ☐ 2 ☐ $+\infty$ ☐ existiert nicht

b) Gegen welchen Wert konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{in\frac{\pi}{2}}}{2^n}$?

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{in\frac{\pi}{2}}}{2^n} = \qquad} \tag{4}$$

c) Bestimmen Sie den Konvergenzradius R der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n n}z^{2n}$.

☐ 0 ☐ $\frac{1}{2}$ ☐ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ☐ 1 ☐ $\sqrt{2}$ ☐ 2 ☐ ∞

d) Welche Aussage(n) treffen auf die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n n}z^{2n}$ zu, wenn $z = R$ ist?

☐ konvergiert ☐ konvergiert absolut ☐ divergiert bestimmt ☐ divergiert unbestimmt

LÖSUNG:

a) $\sqrt{n^4+1} - n^2 = \frac{\left(\sqrt{n^4+1}-n^2\right)\left(\sqrt{n^4+1}+n^2\right)}{\sqrt{n^4+1}+n^2} = \frac{n^4+1-n^4}{\sqrt{n^4+1}+n^2} = \frac{1}{\sqrt{n^4+1}+n^2} = \frac{\frac{1}{n^2}}{\sqrt{1+\frac{1}{n^4}}+1} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

b) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{in\frac{\pi}{2}}}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{i}{2}\right)^n \overset{\text{geom. Reihe}}{=} \frac{1}{1-\frac{i}{2}} = \frac{1+\frac{i}{2}}{\left(1+\frac{i}{2}\right)\left(1-\frac{i}{2}\right)} = \frac{1+\frac{i}{2}}{1+\frac{1}{4}} = \frac{2}{5}(2+i)$

Die geometrische Reihe kann man anwenden, da $\left|\frac{i}{2}\right| = \frac{1}{2} < 1$ ist.

c) Wir schreiben die Potenzreihe um als $\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$, wobei $a_n = \begin{cases}\frac{(-1)^{n/2}}{2^{n/2}\frac{n}{2}} & n \text{ gerade} \\ 0 & n \text{ ungerade}\end{cases}$ ist.

Es gilt:

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \begin{cases}\sqrt[n]{\frac{1}{2^{n/2}\frac{n}{2}}} & n \text{ gerade} \\ 0 & n \text{ ungerade}\end{cases} = \begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt[n]{2}}{\sqrt[n]{n}} & n \text{ gerade} \\ 0 & n \text{ ungerade}\end{cases} \tag{5}$$

Wegen $\frac{\sqrt[n]{2}}{\sqrt[n]{n}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$ hat die Folge $\sqrt[n]{|a_n|}$ die Häufungspunkte 0 und $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Folglich ist $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.
Mit der Formel von Cauchy-Hadamard folgt für den Konvergenzradius $R = \sqrt{2}$.

ALTERNATIV:

Es gilt:

$$\sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^n}{2^n n} z^{2n}\right|} = \sqrt[n]{\frac{1}{2^n n}}|z|^2 = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}|z|^2 \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}|z|^2 \tag{6}$$

Damit die Reihe konvergiert, muss nach dem Wurzelkriterium gelten:

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^n}{2^n n} z^{2n}\right|} = \frac{1}{2}|z|^2 \overset{!}{<} 1 \tag{7}$$

Umformen ergibt $|z| < \sqrt{2}$. Damit ist der Konvergenzradius $R = \sqrt{2}$.

d) Für $z = R = \sqrt{2}$ erhalten wir $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n}(\sqrt{2})^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n} 2^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$. Nach dem Leibnitzkriterium konvergiert diese Reihe, jedoch nicht absolut.

4 Konvergenzkriterien für Reihen

Prüfen Sie mit dem Wurzel-, Quotienten- und Majorantenkriterium nach, ob die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$ konvergiert.

Hinweis zum Majorantenkriterium: Für $n \geq 4$ gilt $n^2 < 2^n$.

LÖSUNG:

- Wurzelkriterium: $\sqrt[n]{\frac{n^2}{3^n}} = \frac{\sqrt[n]{n}^2}{3} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{3} < 1$. Die Reihe konvergiert nach dem Wurzelkriterium.
- Quotientenkriterium: $\frac{\frac{(n+1)^2}{3^{n+1}}}{\frac{n^2}{3^n}} = \frac{1}{3}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{3} < 1$. Die Reihe konvergiert nach dem Quotientenkriterium.
- Majorantenkriterium: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n} = \sum\limits_{n=1}^{3} \frac{n^2}{3^n} + \sum\limits_{n=4}^{\infty} \frac{n^2}{3^n} < \underbrace{\sum\limits_{n=1}^{3} \frac{n^2}{3^n}}_{<\infty} + \underbrace{\sum\limits_{n=4}^{\infty} \frac{2^n}{3^n}}_{<\infty} < \infty$. Die Reihe konvergiert nach dem Majorantenkriterium. Dabei wurde verwendet, dass $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{2^n}{3^n}$ nach dem Wurzelkriterium (alternativ: wegen der geometrischen Summenformel) konvergiert.

5 Funktionenkonvergenz

Berechnen sie folgende Grenzwerte:

(a) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)}\right)$

(b) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{e^x - 1}{x}\right)$

(c) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{\cos(ax)} - \sqrt{\cos(bx)}}{x^2}\right)$

LÖSUNG:

(a) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin(x)}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin(x)-x}{x\sin(x)}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\cos(x)-1}{\sin(x)+x\cos(x)}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{-\sin(x)}{2\cos(x)-x\sin(x)}\right) = 0$

(b) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{e^x-1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{e^x}{1}\right) = 1$

(c) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{\cos(ax)}-\sqrt{\cos(bx)}}{x^2}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{2x}\left(\frac{b\sin(bx)}{2\sqrt{\cos(bx)}}-\frac{a\sin(ax)}{2\sqrt{\cos(ax)}}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{4}\left(\frac{b^2\cos(bx)\sqrt{\cos(bx)}+b^2\frac{\sin^2(bx)}{2\sqrt{\cos(bx)}}}{\cos(bx)}-\right.$
$\left.\frac{a^2\cos(ax)\sqrt{\cos(ax)}+a^2\frac{\sin^2(ax)}{2\sqrt{\cos(ax)}}}{\cos(ax)}\right) = \frac{b^2-a^2}{4}$

6 Ableiten oder Taylor

Betrachten sie die Funktion $f:(-2,\infty)-\mathbb{R}, f(x) = -\ln(1-\frac{x}{2})$

(a) Wie lautet das Taylorpolynom 2. Ordnung $(T_0^2 f)(x)$?
(b) Zeigen sie das für alle $x \in [-1,1]$ gilt $|(R_0^2 f)(x)| = |f(x)-(T_0^2 f)(x)| \leq \frac{1}{3}$

LÖSUNG:

(a) $f(0)=0, f'(x)=\frac{1}{2-x}, f'(0)=\frac{1}{2}, f''(x)=\frac{1}{(2-x)^2}, f''(0)=\frac{1}{4}$

$$(T_0^2 f)(x) = \frac{1}{2}x+\frac{1}{8}x^2$$

(b) $f'''(x) = \frac{2}{(2-x)^3}$

$$(R_0^2 f)(x) = f(x)-(T_0^2 f)(x) = \frac{f'''(\xi)}{3!}(x-0)^3 \text{ mit } \xi \text{ zwischen 0 und x.}$$

$f'''(\xi)$ ist maximal, falls der Nenner möglichst klein ist. Dies ist für $\xi = 1$ der Fall, damit ist $f'''(\xi) \leq 2$. Der Term x^3 ist auch bei 1 maximal. Damit ist $|(R_0^2 f)(x)| \leq \frac{1}{3}$.

7 Integration und gleichmäßige Konvergenz

a) Berechnen Sie das Integral $\int_1^{\sqrt{e}} \frac{\sin(\frac{\pi}{2}\ln(x))}{x}\,\mathrm{d}x$

$$\boxed{\int_1^{\sqrt{e}} \frac{\sin(\frac{\pi}{2}\ln(x))}{x}\,\mathrm{d}x = \qquad} \tag{8}$$

b) Berechnen Sie das Integral $\int_0^1 n^2 x e^{-nx}\,\mathrm{d}x$ für $n \in \mathbb{N}$.

$$\boxed{\int_0^1 n^2 x e^{-nx}\,\mathrm{d}x = \qquad} \tag{9}$$

c) Gegen welche Funktion $f:(0,1)\longrightarrow\mathbb{R}$ konvergiert die Funktionenfolge $f_n:(0,1)\longrightarrow\mathbb{R},\ x\longmapsto n^2xe^{-nx}$ punktweise?

$$\boxed{f(x) = \qquad} \tag{10}$$

d) Ist die Konvergenz von f_n gegen f auch gleichmäßig? Begründen Sie.

LÖSUNG:

a) Integration durch Substitution: $\displaystyle\int_1^{\sqrt{e}} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\ln(x)\right)}{x}\,\mathrm{d}x \overset{z=\ln(x)}{=} \int_0^{\ln(\sqrt{e})} \sin\left(\frac{\pi}{2}z\right)\,\mathrm{d}z = \left[-\frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}z\right)\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{\pi} - \frac{\sqrt{2}}{\pi}$

b) partielle Integration: $\displaystyle\int_0^1 n^2xe^{-nx}\,\mathrm{d}x \overset{z=nx}{=} \int_0^n ze^{-z}\,\mathrm{d}z \overset{\text{p.I.}}{=} \left[-ze^{-z}\right]_0^n - \int_0^n -e^{-z}\,\mathrm{d}z = -ne^{-n} - \left[e^{-z}\right]_0^n = 1-(n+1)e^{-n}$

c) Es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} n^2xe^{-nx} = x\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{e^{nx}} = 0$ für alle $x \in (0,1)$, da die Exponentialfunktion jedes Polynom dominiert. Die Grenzfunktion ist also $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$.

d) Die Konvergenz ist nicht gleichmäßig, da Limes und Integral nicht vertauschen. Es gilt:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 n^2xe^{-nx}\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\left(1-(n+1)e^{-n}\right) = 1 \neq 0 = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x \tag{11}$$

8 Differentialgleichungen

Betrachten Sie das Differentialgleichungssystem $\begin{cases} x'(t) = y(t) \\ y'(t) = y(t) \end{cases}$ mit $t \in \mathbb{R}$.

a) Schreiben Sie das Differentialgleichungssystem in der Matrix-Vektor-Schreibweise $X'(t) = AX(t)$, wobei $X \in \mathbb{R}^2$ und $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ ist.
b) Berechnen Sie A^n für $n \in \mathbb{N}_0$.
c) Berechnen Sie $\exp(tA)$ für $t \in \mathbb{R}$.
d) Lösen Sie das Anfangswertproblem $\begin{cases} x'(t) = y(t) \\ y'(t) = y(t) \end{cases}$ mit $\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

LÖSUNG:

a) $\underbrace{\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}}_{=:X'(t)} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=:A} \underbrace{\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}}_{=:X(t)}$

b) $A^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A^n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ für $n \in \mathbb{N}$

c) $\exp(tA) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^nA^n}{n!} = A^0 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^nA^n}{n!} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^nA^n}{n!} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}(e^t-1) = \begin{pmatrix} 1 & e^t-1 \\ 0 & e^t \end{pmatrix}$

d) Die Lösung des AWP lautet $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \exp(tA)\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & e^t-1 \\ 0 & e^t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-e^t \\ -e^t \end{pmatrix}$