Probeklausur zum Ferienkurs Analysis I für Physiker

Florian Kollmannsberger, Jonas Habel

16.03.2018

Bearbeitungszeit: 90 Minuten
Erlaubte Hilfsmittel: **ein** doppelseitig handschriftlich beschriebenes DIN A4 Blatt
Bei Multiple-Choice-Aufgaben sind **genau** die zutreffenden Aussagen anzukreuzen.
Es können auch mehrere Antworten richtig sein.

1 Komplexe Zahlen

Berechnen sie Real- und Imaginärteil von

(a) $z = (\frac{1+i}{1-i})^k \qquad k \in \mathbb{N}$
Hinweis: Bringen Sie zuerst $\frac{1+i}{1-i}$ auf die übliche Form für eine komplexe Zahl.

(b) $z = (\sqrt{3}+i)^{100}$
Hinweis: Berechnen Sie zuerst die Polardarstellung von $\sqrt{3}+i$.

2 Vollständige Induktion

Sei $\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$. Zeigen Sie:

(a) Für alle $k, n \in \mathbb{N}$ und $k \leq n$ gilt :

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$$

(b) Für alle $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt der Binomische Lehrsatz:

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

Hinweis zu (b): Versuchen Sie, (a) zu verwenden.

3 Folgen und Reihen

a) Bestimmen Sie den Grenzwert: $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^4+1} - n^2\right)$

☐ $-\infty$ ☐ -1 ☐ 0 ☐ $\frac{1}{2}$ ☐ 1 ☐ 2 ☐ $+\infty$ ☐ existiert nicht

b) Gegen welchen Wert konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{e^{in\frac{\pi}{2}}}{2^n}$?

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{in\frac{\pi}{2}}}{2^n} = \qquad\qquad} \tag{1}$$

c) Bestimmen Sie den Konvergenzradius R der Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n} z^{2n}$.

☐ 0 ☐ $\frac{1}{2}$ ☐ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ☐ 1 ☐ $\sqrt{2}$ ☐ 2 ☐ ∞

d) Welche Aussage(n) treffen auf die Potenzreihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n} z^{2n}$ zu, wenn $z = R$ ist?

☐ konvergiert ☐ konvergiert absolut ☐ divergiert bestimmt ☐ divergiert unbestimmt

4 Konvergenzkriterien für Reihen

Prüfen Sie mit dem Wurzel-, Quotienten- und Majorantenkriterium nach, ob die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$ konvergiert.

Hinweis zum Majorantenkriterium: Für $n \geq 4$ gilt $n^2 < 2^n$.

5 Funktionenkonvergenz

Berechnen sie folgende Grenzwerte:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)}\right)$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x - 1}{x}\right)$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{\cos(ax)} - \sqrt{\cos(bx)}}{x^2}\right)$

6 Ableiten oder Taylor

Betrachten sie die Funktion $f : (-2, \infty) - \mathbb{R}, f(x) = -\ln(1 - \frac{x}{2})$

(a) Wie lautet das Taylorpolynom 2. Ordnung $(T_0^2 f)(x)$?

(b) Zeigen sie das für alle $x \in [-1, 1]$ gilt $|(R_0^2 f)(x)| = |f(x) - (T_0^2 f)(x)| \leq \frac{1}{3}$

7 Integration und gleichmäßige Konvergenz

a) Berechnen Sie das Integral $\displaystyle\int_1^{\sqrt{e}} \frac{\sin(\frac{\pi}{2}\ln(x))}{x}\,\mathrm{d}x$

$$\boxed{\int_1^{\sqrt{e}} \frac{\sin(\frac{\pi}{2}\ln(x))}{x}\,\mathrm{d}x = \qquad\qquad} \tag{2}$$

b) Berechnen Sie das Integral $\displaystyle\int_0^1 n^2 x e^{-nx}\,\mathrm{d}x$ für $n \in \mathbb{N}$.

$$\boxed{\int_0^1 n^2 x e^{-nx}\,\mathrm{d}x = \qquad\qquad} \tag{3}$$

c) Gegen welche Funktion $f : (0,1) \longrightarrow \mathbb{R}$ konvergiert die Funktionenfolge $f_n : (0,1) \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto n^2 x e^{-nx}$ punktweise?

$$\boxed{f(x) = \qquad\qquad} \tag{4}$$

d) Ist die Konvergenz von f_n gegen f auch gleichmäßig? Begründen Sie.

8 Differentialgleichungen

Betrachten Sie das Differentialgleichungssystem $\begin{cases} x'(t) = y(t) \\ y'(t) = y(t) \end{cases}$ mit $t \in \mathbb{R}$.

a) Schreiben Sie das Differentialgleichungssystem in der Matrix-Vektor-Schreibweise $X'(t) = AX(t)$, wobei $X \in \mathbb{R}^2$ und $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ ist.
b) Berechnen Sie A^n für $n \in \mathbb{N}_0$.
c) Berechnen Sie $\exp(tA)$ für $t \in \mathbb{R}$.
d) Lösen Sie das Anfangswertproblem $\begin{cases} x'(t) = y(t) \\ y'(t) = y(t) \end{cases}$ mit $\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.