1 Integration

1.1 Stammfunktionen

Bestimmen Sie je eine Stammfunktion der folgenden Funktionen:

a) $x \mapsto \cos^2 x$

b) $x \mapsto \frac{1}{\tan x}$

c) $x \mapsto x^x(1 + \log x)$ *Hinweis:* Substitution $z = x \log x$

d) $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ *Hinweis:* Substitution $x = \sin z$

LÖSUNG:

a) $\int_0^x \cos^2 t \,\mathrm{d}t = \int_0^x \cos t \cdot \cos t \,\mathrm{d}t \overset{\text{p.I.}}{=} [\sin t \cdot \cos t]_0^x - \int_0^x \sin t \cdot (-\sin t) \,\mathrm{d}t = [\sin t \cdot \cos t]_0^x + \int_0^x \sin^2 t \,\mathrm{d}t = [\sin t \cdot \cos t]_0^x + \int_0^x 1 - \cos^2 t \,\mathrm{d}t = [\sin t \cdot \cos t + t]_0^x - \int_0^x \cos^2 t \,\mathrm{d}t$
Auflösen nach $\int_0^x \cos^2 t \,\mathrm{d}t$ ergibt: $\int_0^x \cos^2 t \,\mathrm{d}t = \frac{1}{2} (\sin t \cdot \cos t + t)_0^x = \frac{1}{2} (\sin x \cdot \cos x + x)$

b) $\int_{\frac{\pi}{2}}^x \frac{1}{\tan t} \,\mathrm{d}t = \int_{\frac{\pi}{2}}^x \frac{\cos t}{\sin t} \,\mathrm{d}t \overset{z=\sin t}{=} \int_1^{\sin x} \frac{1}{z} \,\mathrm{d}z = [\log|z|]_1^{\sin x} = \log|\sin z|$

c) $\int_0^x t^t(1 + \log t) \,\mathrm{d}t = \int_0^x e^{t \log t}(1 + \log t) \,\mathrm{d}t \overset{z=t \log t}{=} \int_0^{x \log x} e^z \,\mathrm{d}z = [e^z]_0^{x \log x} = e^{x \log x} - 1 = x^x - 1$

d) $\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \,\mathrm{d}t = \int_0^{\arcsin x} \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 t}} \cos t \,\mathrm{d}t = \int_0^{\arcsin x} 1 \,\mathrm{d}t = [t]_0^{\arcsin x} = \arcsin x$

1.2 Integrale

Berechnen Sie den Wert der folgenden Integrale:

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, e^{-\sin x} \,\mathrm{d}x$

b) $\int_0^{\infty} \cos x \, e^{-2x} \,\mathrm{d}x$

c) $\int_{-\infty}^0 e^x \sqrt{e^x + 1} \,\mathrm{d}x$

d) $\int_0^{\infty} x^n e^{-x} \,\mathrm{d}x$ $n \in \mathbb{N}$ *Hinweis:* n-mal partielle Integration

e) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos^3 x}{1-\sin x} \,\mathrm{d}x$ *Hinweis:* $1 - \sin^2 x = (1 + \sin x)(1 - \sin x)$

LÖSUNG:

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, e^{-\sin x} \,\mathrm{d}x \overset{z=\sin x}{=} \int_0^1 e^{-z} = [-e^{-z}]_0^1 = 1 - \frac{1}{e}$

b) $\int_0^{\infty} \cos x \, e^{-2x} \,\mathrm{d}x \overset{\text{p.I.}}{=} \left[-\frac{1}{2} \cos x \, e^{-2x}\right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} (-\sin x) \left(-\frac{1}{2} e^{-2x}\right) \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \sin x \, e^{-2x} \,\mathrm{d}x \overset{\text{p.I}}{=} \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(\left[-\frac{1}{2} \sin x \, e^{-2x}\right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \cos x \left(-\frac{1}{2} e^{-2x}\right) \,\mathrm{d}x \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \int_0^{\infty} \cos x \, e^{-2x} \,\mathrm{d}x$
Auflösen nach $\int_0^{\infty} \cos x \, e^{-2x} \,\mathrm{d}x$ ergibt: $\frac{5}{4} \int_0^{\infty} \cos x \, e^{-2x} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$. Also $\int_0^{\infty} \cos x \, e^{-2x} \,\mathrm{d}x = \frac{2}{5}$

c) $\int_{-\infty}^0 e^x \sqrt{e^x + 1} \,\mathrm{d}x \overset{z=e^x}{=} \int_0^1 \sqrt{z + 1} \,\mathrm{d}z = \left[\frac{2}{3} (z + 1)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{2}{3} \left(2\sqrt{2} - 1\right) \approx 1,22$

d) $\int_0^{\infty} x^n e^{-x} \,\mathrm{d}x \overset{\text{p.I.}}{=} [-x^n e^{-x}]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} n x^{n-1}(-e^{-x}) = n \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x}$
Durch rekursives Einsetzen folgt $\int_0^{\infty} x^n e^{-x} \,\mathrm{d}x = n! \int_0^{\infty} x^0 e^{-x} = n! \, [-e^{-x}]_0^{\infty} = n!$

e) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos^3 x}{1-\sin x} \,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos x \cos^2 x}{1-\sin x} \,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos x \left(1-\sin^2 x\right)}{1-\sin x} \,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos x (1-\sin x)(1+\sin x)}{1-\sin x} \,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos x (1 + \sin x) \,\mathrm{d}x \overset{z=\sin x}{=} \int_0^{\sin \frac{\pi}{6}} 1 + z \,\mathrm{d}z = \left[z + \frac{z^2}{2}\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$

1.3 Konvergenz uneigentlicher Integrale

Untersuchen Sie die folgenden Integrale auf Konvergenz:

a) (i) $\int_0^1 \frac{1}{x+\sin x}\,\mathrm{d}x$ (ii) $\int_0^1 \frac{1}{x+\cos x}\,\mathrm{d}x$

b) $\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}+x^2+x^5}$

c) $\int_0^1 \frac{1}{\log x}\,\mathrm{d}x$ *Hinweis:* Für alle $x > 0$ gilt $\log x \leq x - 1$

d) $\int_0^\infty \frac{x^n}{e^x-1}$ $n \in \mathbb{Z}$ *Hinweis:* Für $0 < x < 1$ gilt $x + 1 < e^x < 2x + 1$

LÖSUNG:

a) (i) Für $x \geq 0$ gilt $x + \sin x \leq 2x$. Damit folgt $\int_0^1 \frac{1}{x+\sin x}\,\mathrm{d}x \geq \int_0^1 \frac{1}{2x} = \infty$. Das Integral konvergiert nicht.

(ii) Für $0 \leq x \leq 1$ gilt $x + \cos x \geq x + \cos 1$. Damit folgt $0 \leq \int_0^1 \frac{1}{x+\cos x}\,\mathrm{d}x \leq \int_0^1 \frac{1}{x+\cos 1}\,\mathrm{d}x = [\log(x + \cos 1)]_0^1 = \log(1 + \cos 1) - \log 1 < \infty$. Das Integral konvergiert.

b) Für $x > 0$ gilt $\frac{1}{\sqrt{x}+x^2+x^5} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$ sowie $\frac{1}{\sqrt{x}+x^2+x^5} \leq \frac{1}{x^5}$. Damit folgt:

$$0 \leq \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}+x^2+x^5}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}+x^2+x^5}\,\mathrm{d}x + \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}+x^2+x^5}\,\mathrm{d}x \tag{1}$$

$$< \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x + \int_1^\infty \frac{1}{x^5}\,\mathrm{d}x = \left[2\sqrt{x}\right]_0^1 - \left[\frac{1}{4x^4}\right]_1^\infty = 2 - \frac{1}{4} < \infty \tag{2}$$

Das Integral konvergiert also.

c) Es gilt $\log x \leq x - 1$, also $\frac{1}{\log x} \geq \frac{1}{x-1}$, und damit $\int_0^1 \frac{1}{\log x}\,\mathrm{d}x \geq \int_0^1 \frac{1}{x-1} = \infty$. Das Integral konvergiert nicht.

d) Für $x > 0$ gilt $\frac{1}{e^x-1} \leq \frac{2}{e^x} = 2e^{-x}$. Für $0 < x < 1$ gilt $\frac{1}{2x} \leq \frac{1}{e^x-1} \leq \frac{1}{x}$. Außerdem gilt:

$$\int_0^\infty \frac{x^n}{e^x-1}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^n}{e^x-1}\,\mathrm{d}x + \int_1^\infty \frac{x^n}{e^x-1} \tag{3}$$

Der zweite Summand ist konvergent, denn er kann abgeschätzt werden:

$$0 \leq \int_1^\infty \frac{x^n}{e^x-1}\,\mathrm{d}x \leq 2\int_1^\infty x^n e^{-x}\,\mathrm{d}x \overset{3.2a)}{<} \infty \tag{4}$$

Für den ersten Summanden gelten die Abschätzungen

$$0 \leq \int_0^1 \frac{x^n}{e^x-1}\,\mathrm{d}x < \int_0^1 \frac{x^n}{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^{n-1} \overset{n>0}{<} \infty \tag{5}$$

$$\int_0^1 \frac{x^n}{e^x-1}\,\mathrm{d}x \geq \int_0^1 \frac{x^n}{2x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 x^{n-1}\,\mathrm{d}x \overset{n\leq 0}{=} \infty \tag{6}$$

Also konvergiert der erste Summand genau dann, wenn $n > 0$ ist. Damit konvergiert auch das gesamte Integral nur für $n > 0$.

2 Gleichmäßige Konvergenz

2.1 Punktweise und gleichmäßige Konvergenz einfacher Funktionenfolgen

Gegeben seien die drei Funktionenfolgen

$$f_n : (0,1] \longrightarrow \mathbb{R}; \quad x \longmapsto f_n(x) := \begin{cases} n & x < \frac{1}{n} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{7}$$

$$g_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}; \quad x \longmapsto g_n(x) := \begin{cases} 1 - nx & x < \frac{1}{n} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{8}$$

$$h_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}; \quad x \longmapsto h_n(x) := \begin{cases} \frac{1}{n} & x < \frac{1}{n} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{9}$$

a) Berechnen Sie $\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$, $\int_0^1 g_n(x)\,\mathrm{d}x$ und $\int_0^1 h_n(x)\,\mathrm{d}x$.

b) Ermitteln Sie die Funktionen, gegen die die drei Funktionenfolgen punktweise konvergieren.

c) Bei welchen der drei Funktionenfolgen ist die Konvergenz gleichmäßig, bei welchen nicht? Begründen Sie ihre Antwort.

LÖSUNG:

a) $\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{n}} n\,\mathrm{d}x = n \cdot \frac{1}{n} = 1$
$\int_0^1 g_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{n}} 1 - nx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n} - \frac{1}{2}n\frac{1}{n^2} = \frac{1}{2n}$
$\int_0^1 h_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}$

b) Zu f_n: Sei $x \in (0,1]$. Dann ist $f_n(x) = 0$ für alle $n > \frac{1}{x}$ und f_n konvergiert gegen die Nullfunktion.
Zu g_n: Sei $x \in (0,1]$. Dann ist $g_n(x) = 0$ für alle $n > \frac{1}{x}$. Für $x = 0$ gilt $g_n(0) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Damit konvergiert g_n gegen die Funktion $x \longmapsto \begin{cases} 1 & x = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$.
Zu h_n: Sei $x \in (0,1]$. Dann ist $h_n(x) = 0$ für alle $n > \frac{1}{x}$. Für $x = 0$ gilt $h_n(0) = \frac{1}{n} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Damit konvergiert h_n gegen die Nullfunktion.

c) Zu f_n: Wegen $1 \stackrel{\text{a)}}{=} \lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x \neq \int_0^1 \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = 0$ kann die Konvergenz von f_n nicht gleichmäßig sein.
Zu g_n: Da alle g_n stetig sind, die Grenzfunktion aber unstetig ist, kann g_n nicht gleichmäßig konvergieren.
Zu h_n: Es gilt $\sup\limits_{x\in[0,1]} \left| h_n(x) - \lim\limits_{n\to\infty} h_n(x) \right| = \sup\limits_{x\in[0,1]} h_n(x) = \frac{1}{n} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Daher konvergiert h_n gleichmäßig.

2.2 Gleichmäßige Konvergenz von Potenzreihen

a) Bestimmen Sie den Konvergenzradius R der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$.

b) Gegen welche Funktion konvergiert die Potenzreihe innerhalb ihres Konvergenzradius punktweise?

c) Zeigen Sie: Die Potenzreihe konvergiert gleichmäßig auf jedem Intervall $[-r, r]$ mit $0 \leq r < R$.

d) Konvergiert die Potenzreihe auch auf den Intervall $(-R, R)$ gleichmäßig?

LÖSUNG:

a) Wegen $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1} = 1$ hat die Potenzreihe nach der Formel von Cauchy-Hadamard den Konvergenzradius $R = 1$.

b) Die Potenzreihe konvergiert innerhalb ihres Konvergenzradius punktweise gegen die Funktion $\frac{1}{1-x}$ (geometrische Reihe).

c) Es gilt:

$$\sup_{|x|\leq r}\left|\sum_{n=0}^{N} x^n - \frac{1}{1-x}\right| = \sup_{|x|\leq r}\left|\frac{1-x^{N+1}}{1-x} - \frac{1}{1-x}\right| = \sup_{|x|\leq r}\frac{|x|^{N+1}}{|1-x|} = \frac{r^{N+1}}{1-r} \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{10}$$

Damit konvergiert die Potenzreihe im Intervall $[-r,r]$ gleichmäßig. Es wurde im vorletzten Schritt ausgenutzt, dass $\frac{|x|^{N+1}}{|1-x|}$ stetig ist, sowie für $0 < x \leq r$ streng monoton steigend und für $-r \leq x < 0$ streng monoton fallend ist. Die einzigen beiden Kandidaten für das Supremum liegen also bei $\pm r$. Außerdem gilt $\frac{r^{N+1}}{1+r} < \frac{r^{N+1}}{1-r}$, also liegt das Supremum bei $+r$. Im letzten Schritt wurde ausgenutzt, dass $r < R = 1$ ist und damit $r^{N+1} \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$ gilt.

d) Wähle die Folge $x_N := 1 - \frac{1}{N} < 1$. Dann gilt:

$$\sup_{|x|<1}\left|\sum_{n=0}^{N} x^n - \frac{1}{1-x}\right| \overset{\text{c)}}{=} \sup_{|x|<1}\frac{|x|^{N+1}}{|1-x|} \geq \frac{|x_N|^{N+1}}{|1-x_N|} = \frac{\left(1-\frac{1}{N}\right)^{N+1}}{\frac{1}{N}} = (N-1)\left(1-\frac{1}{N}\right)^{N} \tag{11}$$

$$\overset{N\to\infty}{\longrightarrow} \infty \cdot \frac{1}{e} = \infty > 0 \tag{12}$$

Damit konvergiert die Potenzreihe im Intervall $(-R,R) = (-1,1)$ nicht gleichmäßig, sondern nur punktweise.

3 Differentialgleichungen

3.1 Harmonischer Oszillator

Ein eindimensionales Federpendel wird durch die Differentialgleichung

$$x''(t) + x(t) = 0 \tag{13}$$

beschrieben. Dabei bezeichnet $x(t)$ die Auslenkung des Pendels aus der Ruhelage. Die Kreisfrequenz des Federpendels ist 1.

a) Schreiben Sie diese Differentialgleichung zweiter Ordnung als ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung der Form $\begin{pmatrix} x'(t) \\ x''(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix}$, wobei $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

b) Zeigen Sie durch vollständige Induktion über $n \in \mathbb{N}_0$, dass für die n-te Potenz der Matrix A gilt:

$$A^n = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & n \text{ gerade} \\ (-1)^{\frac{n+1}{2}} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & n \text{ ungerade} \end{cases} \tag{14}$$

c) Berechnen Sie das Matrixexponential $\exp(tA)$. *Zwischenergebnis:* $\exp(tA) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$

d) Lösen Sie das Anfangswertproblem $x''(t) + x(t) = 0$ mit $\begin{pmatrix} x(0) \\ x'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, d.h. man schubst das Pendel aus seiner Ruhelage heraus an.

Jetzt wirke eine konstante externe Kraft $f \in \mathbb{R}$ auf das Pendel. Dann wird das Pendel durch die inhomogene Differentialgleichung

$$x''(t) + x(t) = f \tag{15}$$

beschrieben.

e) Schreiben Sie diese inhomogene Differentialgleichung zweiter Ordnung als ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung der Form $\begin{pmatrix} x'(t) \\ x''(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix} + b$, wobei $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ und $b \in \mathbb{R}^2$.

f) Lösen Sie nun das Anfangswertproblem $x''(t)+x(t) = f$ mit $\begin{pmatrix} x(0) \\ x'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ mithilfe der Lösungsformel für inhomogene Differentialgleichungen. *Hinweis:* Die Matrix $\exp(tA)$ ist orthonormal, deswegen gilt $\exp(-tA) = (\exp(tA))^{-1} = (\exp(tA))^T$.

LÖSUNG:

a) Es gilt $\begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} x'(t) \\ x''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'(t) \\ -x(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_{=:A} \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix}$.

b) Induktionsanfang, $n = 0$: $A^0 = (-1)^0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1}$.

Induktionsschritt, $n \to n+1$: Es gibt zwei Fälle, die unterschieden werden müssen:

- n gerade, also $n+1$ ungerade:

$$A^{n+1} = A^n \cdot A \overset{\text{I.V.}}{=} (-1)^{\frac{n}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = (-1)^{\frac{n}{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{16}$$

$$= (-1)^{\frac{n+2}{2}} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{17}$$

- n ungerade, also $n+1$ gerade:

$$A^{n+1} = A^n \cdot A \overset{\text{I.V.}}{=} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = (-1)^{\frac{n+1}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{18}$$

c) Es gilt:

$$\exp(tA) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!} = \sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ gerade}}}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n + \sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ ungerade}}}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n \tag{19}$$

$$\overset{\text{b)}}{=} \sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ gerade}}}^{\infty} \frac{t^n}{n!} (-1)^{\frac{n}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ ungerade}}}^{\infty} \frac{t^n}{n!} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{20}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} (-1)^k \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} (-1)^{k+1} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{21}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k)!} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{22}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k)!} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} \tag{23}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cos t + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \sin t \tag{24}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \tag{25}$$

d) Es gilt:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix} = \exp(tA) \begin{pmatrix} x(0) \\ x'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \tag{26}$$

Die Lösung des Anfangswertproblems lautet also $x(t) = \sin t$.

e) Es gilt $\begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} x'(t) \\ x''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'(t) \\ -x(t) + f \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_{=:A} \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}}_{:=b}.$

f) Mit der Lösungsformel für inhomogene Differentialgleichungen folgt:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix} &= \exp(tA)\left(\begin{pmatrix} x(0) \\ x'(0) \end{pmatrix} + \int_0^t \exp(-sA)b(s)\,\mathrm{d}s\right) && (27)\\
&= \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + f\int_0^t \begin{pmatrix} \cos s & -\sin s \\ \sin s & \cos s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\,\mathrm{d}s\right) && (28)\\
&= \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + f\int_0^t \begin{pmatrix} -\sin s \\ \cos s \end{pmatrix}\,\mathrm{d}s\right) && (29)\\
&= \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}\int_0^t \begin{pmatrix} -\sin s \\ \cos s \end{pmatrix}\,\mathrm{d}s && (30)\\
&= \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} \cos s \\ \sin s \end{pmatrix}\right]_0^t && (31)\\
&= \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos t - 1 \\ \sin t \end{pmatrix} && (32)\\
&= \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} \cos t(\cos t - 1) + \sin^2 t \\ -\sin t(\cos t - 1) + \cos t \sin t \end{pmatrix} && (33)\\
&= \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} 1 - \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} && (34)\\
& && (35)
\end{aligned}$$

Die Lösung des Anfangswertproblems lautet also $x(t) = \sin t + f(1 - \cos t)$. Dies kann sogar noch weiter umgeformt werden, indem man $A\cos\phi := 1$ und $A\sin\phi := -f$ definiert. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
x(t) &= \sin t + f(1-\cos t) = \sin t - f\cos t + f = A\cos\phi\sin t + A\sin\phi\cos t + f && (36)\\
&= A\sin(t+\phi) + f && (37)
\end{aligned}$$

Man erhält eine Schwingung um f mit einer Amplitude $A = \sqrt{(A\cos\phi)^2 + (A\sin\phi)^2} = \sqrt{1+f^2}$ und einer Phasenverschiebung $\phi = \arctan\left(\frac{A\sin\phi}{A\cos\phi}\right) = -\arctan f$. Im Grenzfall $f \longrightarrow 0$ erhält man wieder die homogene Lösung aus d).