Aufgaben zum Ferienkurs Analysis I für Physiker

Florian Kollmannsberger, Jonas Habel

15.03.2018

1 Integration

1.1 Stammfunktionen

Bestimmen Sie je eine Stammfunktion der folgenden Funktionen:

a) $x \mapsto \cos^2 x$

b) $x \mapsto \frac{1}{\tan x}$

c) $x \mapsto x^x(1+\log x)$ *Hinweis:* Substitution $z = x \log x$

d) $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ *Hinweis:* Substitution $x = \sin z$

1.2 Integrale

Berechnen Sie den Wert der folgenden Integrale:

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, e^{-\sin x} \, \mathrm{d}x$

b) $\int_0^{\infty} \cos x \, e^{-2x} \, \mathrm{d}x$

c) $\int_{-\infty}^{0} e^x \sqrt{e^x + 1} \, \mathrm{d}x$

d) $\int_0^{\infty} x^n e^{-x} \, \mathrm{d}x$ $n \in \mathbb{N}$ *Hinweis:* n-mal partielle Integration

e) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos^3 x}{1-\sin x} \, \mathrm{d}x$ *Hinweis:* $1 - \sin^2 x = (1+\sin x)(1-\sin x)$

1.3 Konvergenz uneigentlicher Integrale

Untersuchen Sie die folgenden Integrale auf Konvergenz:

a) (i) $\int_0^1 \frac{1}{x+\sin x} \, \mathrm{d}x$ (ii) $\int_0^1 \frac{1}{x+\cos x} \, \mathrm{d}x$

b) $\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}+x^2+x^5}$

c) $\int_0^1 \frac{1}{\log x} \, \mathrm{d}x$ *Hinweis:* Für alle $x > 0$ gilt $\log x \leq x - 1$

d) $\int_0^{\infty} \frac{x^n}{e^x - 1}$ $n \in \mathbb{Z}$ *Hinweis:* Für $0 < x < 1$ gilt $x + 1 < e^x < 2x + 1$

2 Gleichmäßige Konvergenz

2.1 Punktweise und gleichmäßige Konvergenz einfacher Funktionenfolgen

Gegeben seien die drei Funktionenfolgen

$$f_n : (0,1] \longrightarrow \mathbb{R}; \quad x \longmapsto f_n(x) := \begin{cases} n & x < \frac{1}{n} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{1}$$

$$g_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}; \quad x \longmapsto g_n(x) := \begin{cases} 1 - nx & x < \frac{1}{n} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{2}$$

$$h_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}; \quad x \longmapsto h_n(x) := \begin{cases} \frac{1}{n} & x < \frac{1}{n} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{3}$$

a) Berechnen Sie $\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$, $\int_0^1 g_n(x)\,\mathrm{d}x$ und $\int_0^1 h_n(x)\,\mathrm{d}x$.

b) Ermitteln Sie die Funktionen, gegen die die drei Funktionenfolgen punktweise konvergieren.

c) Bei welchen der drei Funktionenfolgen ist die Konvergenz gleichmäßig, bei welchen nicht? Begründen Sie ihre Antwort.

2.2 Gleichmäßige Konvergenz von Potenzreihen

a) Bestimmen Sie den Konvergenzradius R der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$.

b) Gegen welche Funktion konvergiert die Potenzreihe innerhalb ihres Konvergenzradius punktweise?

c) Zeigen Sie: Die Potenzreihe konvergiert gleichmäßig auf jedem Intervall $[-r, r]$ mit $0 \leq r < R$.

d) Konvergiert die Potenzreihe auch auf den Intervall $(-R, R)$ gleichmäßig?

3 Differentialgleichungen

3.1 Harmonischer Oszillator

Ein eindimensionales Federpendel wird durch die Differentialgleichung

$$x''(t) + x(t) = 0 \tag{4}$$

beschrieben. Dabei bezeichnet $x(t)$ die Auslenkung des Pendels aus der Ruhelage. Die Kreisfrequenz des Federpendels ist 1.

a) Schreiben Sie diese Differentialgleichung zweiter Ordnung als ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung der Form $\begin{pmatrix} x'(t) \\ x''(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix}$, wobei $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

b) Zeigen Sie durch vollständige Induktion über $n \in \mathbb{N}_0$, dass für die n-te Potenz der Matrix A gilt:

$$A^n = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & n \text{ gerade} \\ (-1)^{\frac{n+1}{2}} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & n \text{ ungerade} \end{cases} \tag{5}$$

c) Berechnen Sie das Matrixexponential $\exp(tA)$. *Zwischenergebnis:* $\exp(tA) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$

d) Lösen Sie das Anfangswertproblem $x''(t) + x(t) = 0$ mit $\begin{pmatrix} x(0) \\ x'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, d.h. man schubst das Pendel aus seiner Ruhelage heraus an.

Jetzt wirke eine konstante externe Kraft $f \in \mathbb{R}$ auf das Pendel. Dann wird das Pendel durch die inhomogene Differentialgleichung

$$x''(t) + x(t) = f \tag{6}$$

beschrieben.

e) Schreiben Sie diese inhomogene Differentialgleichung zweiter Ordnung als ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung der Form $\begin{pmatrix} x'(t) \\ x''(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix} + b$, wobei $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ und $b \in \mathbb{R}^2$.

f) Lösen Sie nun das Anfangswertproblem $x''(t)+x(t) = f$ mit $\begin{pmatrix} x(0) \\ x'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ mithilfe der Lösungsformel für inhomogene Differentialgleichungen. *Hinweis:* Die Matrix $\exp(tA)$ ist orthonormal, deswegen gilt $\exp(-tA) = (\exp(tA))^{-1} = (\exp(tA))^T$.