Blatt 3 Lösung
Stetigkeit, Funktionengrenzwerte, Ableitung und Taylorentwicklung

Jonas Habel, Florian Kollmannsberger

17. März 2018

1 Stetigkeit

Finden sie für die folgenden Funktionen den maximalen Definitionsbereich. Entscheiden sie ob die Funktionen auf dem Definitionsbereich stetig sind und ob sie gegebenenfalls stetig fortsetzbar sind.

(a) $g_1(x) = \frac{1-\sqrt{|x|+1}}{x}$

(b) $g_2(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x+3)}{x^2-3x+2}$

(c) $g_3(x) = \frac{1-\sqrt{|x|+1}}{|x|}$

(d) $g_4(x) = \frac{x^3}{x^4+|x|^3}$

Hinweis: $|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$

Lösung:

(a) Das Argument der Wurzel ist immer positiv, das einzige Problem kommt vom Zähler der für x=0 null ist. Der maximale Definitionsbereich ist damit $D = \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Im Definitionsbereich ist die Funktion als Verknüpfung stetiger Funktionen wieder stetig. Wir berechnen den Limes von oben und unten für $x \to 0$. Wir unterscheiden dabei zwischen zwei Fällen, um den Betrag los zu werden.

$$\lim_{x\downarrow 0} g_3(x) = \lim_{x\downarrow 0} \frac{1-\sqrt{x+1}}{x} = \lim_{x\downarrow 0} \frac{(1-\sqrt{x+1})(1+\sqrt{x+1})}{x(1+\sqrt{x+1})} = \lim_{x\downarrow 0} \frac{1-(x+1)}{x(1+\sqrt{x+1})} \tag{1}$$

$$= \lim_{x\downarrow 0} \frac{-x}{x(1+\sqrt{x+1})} = \lim_{x\downarrow 0} \frac{-1}{(1+\sqrt{x+1})} = \frac{-1}{1+1} = \frac{-1}{2} \tag{2}$$

$$\lim_{x\uparrow 0} g_3(x) = \lim_{x\uparrow 0} \frac{1-\sqrt{1-x}}{x} = \lim_{x\uparrow 0} \frac{(1-\sqrt{1-x})(1+\sqrt{1-x})}{x(1+\sqrt{1-x})} = \lim_{x\uparrow 0} \frac{1-(1-x)}{x(1+\sqrt{1-x})} \tag{3}$$

$$= \lim_{x\uparrow 0} \frac{x}{x(1+\sqrt{x+1})} = \lim_{x\uparrow 0} \frac{1}{(1+\sqrt{x+1})} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \tag{4}$$

Wir sehen das die Grenzwerte nicht gleich sind, deswegen lassen sich die Funktion nicht stetig fortsetzen.

(b) Nenner und der Zähler sind Polynome also stetig solange der Nenner ungleich null ist. Wir berechnen die Nullstellen des Nenners: $x_{1,2} = \frac{3\pm\sqrt{3^2-4\cdot 2}}{2} = \frac{3\pm 1}{2}$ Die Nullstellen sind eins und zwei, wir sehen also das wir zwei einfache hebbare Polstellen haben, die Funktion lässt sich stetig fortsetzen.

(c) Das Argument der Wurzel ist immer positiv, das einzige Problem kommt vom Zähler der für x=0 null ist. Der maximale Definitionsbereich ist damit $D = \mathbb{R}\backslash\{0\}$.Im Definitionsbereich ist die Funktion als Verknüpfung stetiger Funktionen wieder stetig. Wir berechnen den limes von oben und unten für $x \to 0$. Wir unterscheiden dabei zwischen zwei Fällen, um den Betrag los zu werden.

$$\lim_{x\downarrow 0} g_3(x) = \lim_{x\downarrow 0} \frac{1-\sqrt{x+1}}{x} = \lim_{x\downarrow 0} \frac{(1-\sqrt{x+1})(1+\sqrt{x+1})}{x(1+\sqrt{x+1})} = \lim_{x\downarrow 0} \frac{1-(x+1)}{x(1+\sqrt{x+1})} \tag{5}$$

$$= \lim_{x\downarrow 0} \frac{-x}{x(1+\sqrt{x+1})} = \lim_{x\downarrow 0} \frac{-1}{(1+\sqrt{x+1})} = \frac{-1}{1+1} = \frac{-1}{2} \tag{6}$$

$$\lim_{x\uparrow 0} g_3(x) = \lim_{x\uparrow 0} -\frac{1-\sqrt{1-x}}{x} = \lim_{x\uparrow 0} -\frac{(1-\sqrt{1-x})(1+\sqrt{1-x})}{x(1+\sqrt{1-x})} = \lim_{x\uparrow 0} -\frac{1-(1-x)}{x(1+\sqrt{1-x})} \tag{7}$$

$$= \lim_{x\uparrow 0} -\frac{x}{x(1+\sqrt{x+1})} = \lim_{x\uparrow 0} -\frac{1}{(1+\sqrt{x+1})} = \frac{-1}{1+1} = \frac{-1}{2} \tag{8}$$

Da der Grenzwert von beiden Richtungen gleich ist lässt sich die Funktion stetig fortsetzen.

(d) x^4 und $|x|^3$ sind immer nicht negativ, die einzige Definitionslücke ist damit bei x=0, der maximale Definitionsbereich ist $D = \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Im Definitionsbereich ist die Funktion als Verknüpfung stetiger Funktionen wieder stetig. Wir untersuchen nun den links- bzw. rechtsseitigen Grenzwert gegen 0.

$$\lim_{x\uparrow 0} g_4(x) = \lim_{x\uparrow 0} \frac{x^3}{x^4 - x^3} = \lim_{x\uparrow 0} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{-1} = -1 \tag{9}$$
$$\lim_{x\downarrow 0} g_4(x) = \lim_{x\downarrow 0} \frac{x^3}{x^4 + x^3} = \lim_{x\downarrow 0} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{1} = 1 \tag{10}$$

Der linksseitige und der rechtsseitige Grenzwert stimmen nicht überein und deswegen kann die Funktion auch nicht stetig fortgesetzt werden.

1.1 Mehr Stetigkeit

Zeigen sie das $f(x) = \begin{cases} sin(\frac{1}{x}) & x \neq 0 \\ 0 & sonst \end{cases}$ nicht stetig bei null ist.

Lösung:

Unstetigkeit zeigt oft über die Folgencharakterisierung der Stetigkeit. Hier geht es darum speziell zwei Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\tilde{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zu finden für die $f(x_n)$ und $f(\tilde{x}_n)$ gegen unterschiedliche Werte konvergieren wärend x_n und $\tilde{x}_n$ gegen das gleiche konvergieren. Zwei Folgen wären hier $x_n = \frac{1}{n\pi}$ und $\tilde{x}_n = \frac{1}{n\pi+\frac{\pi}{2}}$. Es gilt $sin(x_n) = sin(\frac{1}{\frac{1}{n\pi}}) = sin(n\pi) = 0 \forall n \in \mathbb{N}$ und $sin(\tilde{x}_n) = sin(\frac{1}{\frac{1}{n\pi+\frac{\pi}{2}}}) = sin(n\pi + \frac{\pi}{2}) = \pm 1 \forall n \in \mathbb{N}$. Obwohl beide Folgen gegen null konvergieren, konvergieren $sin(x_n)$ und $sin(\tilde{x}_n)$ nicht gegen den gleichen Wert, $sin(\tilde{x}_n)$ konvergiert nicht ein mal.

2 Mehr Funktionengrenzwerte

Finden sie die folgenden Funktionengrenzwerte.

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(x-1)^2 \cdot (2x + x^2 + x\sin(x))}{x^2(3 - \frac{2}{x})}$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x-1}}{\frac{2}{x} - \frac{3}{2x^2}}$

(c) $\lim\limits_{x\downarrow 0} \frac{e^x}{\ln(x)}$

(d) $\lim\limits_{x\downarrow 0} \ln(x)x$

(e) $\lim\limits_{x\to 0} (\frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(x+1)}))$

(f) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)+\cos(x)}{x}$

(g) $\lim_{x\uparrow\frac{\pi}{2}}(\cos(x))^{(x-\frac{\pi}{2})}$

(h) $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x^6+1)}{\ln(x^3)}$

(i) $\lim_{x\to 1}\sin(x\pi)\ln|x-1|$

(j) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\tan(x)(x-\frac{\pi}{2}))$

Hinweis: $a\cdot b=\frac{b}{\frac{1}{a}}$
Lösung:

(a) $\lim_{x\to 0}\frac{(x-1)^2\cdot(2x+x^2+x\sin(x))}{x^2(3-\frac{2}{x})}\overset{\text{l'Hôpital}}{=}$
$\lim_{x\to 0}\frac{2(x-1)\cdot(2x+x^2+x\sin(x))+(x-1)^2\cdot(2+2x+\sin(x)+x\cos(x))}{6x-2}=$
$\frac{2(0-1)\cdot(2\cdot 0+0^2+0\cdot\sin(0))+(0-1)^2\cdot(2+2\cdot 0+\sin(0)+0\cdot\cos(0))}{6\cdot 0-2}=-1$

(b) $\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}}{\frac{2}{x}-\frac{3}{2x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{x}{x-1}}{2-\frac{3}{2x}}\overset{\text{l'Hôpital}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x-1-x}{(x-1)^2}}{\frac{3}{2x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{2x^2}{3(x-1)^2}=0$

(c) $\lim_{x\downarrow 0}\frac{e^x}{\ln(x)}=0$

(d) $\lim_{x\downarrow 0}\ln(x)x=\lim_{x\downarrow 0}\frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}}\overset{\text{l'Hôpital}}{=}\lim_{x\downarrow 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\downarrow 0}-x=0$

(e) $\lim_{x\to 0}(\frac{1}{x}-\frac{1}{\ln(x+1)}))=\lim_{x\to 0}(\frac{\ln(x+1)-x}{x\ln(x+1)}))\overset{\text{l'Hôpital}}{=}\lim_{x\to 0}(\frac{\frac{1}{x+1}-1}{\ln(x+1)+\frac{x}{x+1}}))\overset{\text{l'Hôpital}}{=}$
$\lim_{x\to 0}(\frac{-\frac{1}{(x+1)^2}}{\frac{1}{x+1}+\frac{x+1-x}{(x+1)^2}}))=-\frac{1}{2}$

(f) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)+\cos(x)}{x}\overset{\text{l'Hôpital}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-\sin(x)}{1}=1$

(g) $\lim_{x\uparrow\frac{\pi}{2}}(\cos(x))^{(x-\frac{\pi}{2})}=\lim_{x\uparrow\frac{\pi}{2}}e^{\ln((\cos(x))^{(x-\frac{\pi}{2})})}=\lim_{x\uparrow\frac{\pi}{2}}e^{(x-\frac{\pi}{2})\ln(\cos(x))}=\lim_{x\uparrow\frac{\pi}{2}}e^{\frac{\ln(\cos(x))}{\frac{1}{(x-\frac{\pi}{2})}}}\overset{\text{l'Hôpital}}{=}$
$\lim_{x\uparrow\frac{\pi}{2}}e^{\frac{\frac{\sin(x)}{(\cos(x))}}{\frac{1}{(x-\frac{\pi}{2})^2}}}=\lim_{x\uparrow\frac{\pi}{2}}e^{\frac{(x-\frac{\pi}{2})^2\sin(x)}{\cos(x)}}=e$

(h) $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x^6+1)}{\ln(x^3)}\overset{\text{l'Hôpital}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{6x^5}{x^6+1}}{\frac{3x^2}{(x^3)}}=\lim_{x\to\infty}\frac{6x^6}{3(x^6+1)}=0$

(i) $\lim\limits_{x\to 1}\sin(x\pi)\ln|x-1| = \lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln|x-1|}{\frac{1}{\sin(x\pi)}} \overset{\text{l'Hôpital}}{=} \lim\limits_{x\to 1}\frac{\frac{1}{(x-1)}}{\frac{\pi\cos(\pi x)}{(\sin(x\pi))^2}} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{(\sin(x\pi))^2}{(x-1)\pi\cos(\pi x)} \overset{\text{l'Hôpital}}{=}$
$\lim\limits_{x\to 1}\frac{\pi(\sin(x\pi))\cos(x\pi)}{\pi\cos(\pi x)+(x-1)\pi^2\sin(\pi x)} = 0$

(j) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\tan(x)(x-\frac{\pi}{2})) = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(x-\frac{\pi}{2})}{\frac{1}{\tan(x)}} \overset{\text{l'Hôpital}}{=} \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\frac{1}{-\tan(x)^2\cos(x)^2}} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} -\tan(x)^2\cos(x)^2 =$
$-\infty$

3 Ableitungen

Berechnen sie die Ableitungen der folgenden Funktionen und entscheiden sie wo die Ableitung existiert.

(a) $f(x) = \frac{x}{x+\sqrt{a^2+x^2}}$

(b) $f(x) = \sqrt{\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}}$

(c) $f(x) = \frac{x^2-sin(x)cos(x)}{2}$

(d) $f(x) = \frac{x^2-(sin(x)cos(x))^2}{2x}$

(e) $f(x) = e^{1-x^2}$

(f) $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$

(g) $f(x) = x\ln(x+\sqrt{x^2+1}) - \sqrt{x^2+1}$

(h) $f(x) = \frac{x^2\sin(\pi\cdot x)}{cos(x)+1}$

(i) $f(x) = \cos(\sin(\cos(x^2)))$

(j) $f(x) = \frac{1}{e^{\sqrt{x}\cos(x)}}$ für $x > 0$.

(k) $f(x) = x^x$

(l) $f(x) = \sin^2(e^{\cos(3x)})$

Berechnen sie bei k und l auch die zweite Ableitung.
Lösung:

(a) $\frac{df(x)}{dx} = \frac{x+\sqrt{a^2+x^2}-x(1+\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}})}{(x+\sqrt{a^2+x^2})^2} = \frac{\sqrt{a^2+x^2}-\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}}{(x+\sqrt{a^2+x^2})^2}$

(b) $\frac{df(x)}{dx} = \sqrt{\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}}\frac{(e^x+e^{-x})(e^x+e^{-x})-(e^x-e^{-x})(e^x-e^{-x})}{2(e^x+e^{-x})^2} = \sqrt{\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}}(\frac{1}{2}-\frac{(e^x-e^{-x})^2}{2(e^x+e^{-x})^2})$

(c) $\frac{df(x)}{dx} = x - \frac{1}{2}cos(x)^2 + \frac{1}{2}sin(x)^2$

(d) $\frac{df(x)}{dx} = \frac{1}{2} - \frac{4x\sin(x)\cos(x)(\cos(x)^2 - \sin(x)^2) - 2(sin(x)cos(x))^2}{4x^2}$

(e) $\frac{df(x)}{dx} = -2xe^{1-x^2}$

(f) $\frac{df(x)}{dx} = \frac{2x(x^2+1)-2x(x^2-1)}{(x^2+1)^2} = \frac{4x}{(x^2+1)^2}$

(g) $\frac{df(x)}{dx} = \ln(x+\sqrt{x^2+1}) + x\frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}} - \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \ln(x+\sqrt{x^2+1}) + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{x+\sqrt{x^2+1}} - \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \ln(x+\sqrt{x^2+1}) + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \ln(x+\sqrt{x^2+1})$

(h) $\frac{df(x)}{dx} = \frac{(2xsin(\pi\cdot x)+x^2\pi\cos(\pi\cdot x))(cos(x)+1)+\sin(x)x^2sin(\pi\cdot x)}{(cos(x)+1)^2}$

(i) $\frac{df(x)}{dx} = 2x\sin(\sin(\cos(x^2))\cos(\cos(x^2))\sin(x^2)$

(j) $\frac{df(x)}{dx} = \frac{d(e^{-\sqrt{x}\cos(x)})}{dx} = -e^{-\sqrt{x}\cos(x)})(\frac{1}{2\sqrt{x}}\cos(x) - \sqrt{x}\sin(x)))$

(k) $\frac{df(x)}{dx} = \frac{d(e^{x\ln(x)})}{dx} = e^{x\ln(x)}(\ln(x)+\frac{x}{x}) = e^{x\ln(x)}(\ln(x)+1)$
$\frac{d^2f(x)}{dx^2} = \frac{d(e^{x\ln(x)}(\ln(x)+1))}{dx} = (\ln(x)+1)^2e^{x\ln(x)} + \frac{1}{x}e^{x\ln(x)}$

(k) $\frac{df(x)}{dx} = 2\sin(e^{\cos(3x)})\cos(e^{\cos(3x)})e^{\cos(3x)}3\sin(3x)$
$\frac{d^2f(x)}{dx^2} = \frac{d(2\sin(e^{\cos(3x)})\cos(e^{\cos(3x)})e^{\cos(3x)}3\sin(3x))}{dx} = 2\cos(e^{\cos(3x)})(\cos(e^{\cos(3x)})e^{\cos(3x)}3\sin(3x))^2 - 2\sin(e^{\cos(3x)})\sin(e^{\cos(3x)})(e^{\cos(3x)}3\sin(3x))^2 + 2\sin(e^{\cos(3x)})\cos(e^{\cos(3x)})e^{\cos(3x)}(3\sin(3x))^2 + 2\sin(e^{\cos(3x)})\cos(e^{\cos(3x)})e^{\cos(3x)}9\cos(3x)$

4 Zwischenwertsatz

Zeigen sie das $cos(x) = x$ eine Lösung im Intervall $(0, \frac{\pi}{2})$ hat.

Lösung: $cos(x) = x \leftrightarrow cos(x) - x = 0$. Das Problem einen Fixpunkt zu finden, also das was in der Aufgabe verlangt ist, ist äquivalent zur Aufgabe eine Nullstelle zu finden. Nun gilt $cos(0) - 0 = 1$ und $cos(\frac{\pi}{2}) - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$. Da cos(x) und x stetig sind muss es nach Zwischenwertsatz für alle Werte dazwischen, ein x im Intervall $(0, \frac{\pi}{2})$ geben für das der Funktionswert angenommen wird, also auch eine Nullstelle. Um zu zeigen das etwas eine Nullstelle hat, braucht man für den Zwischenwertsatz, nur eine auf einem Intervall stetige Funktion die auf dem Intervall einen positiven und einen negativen Funktionswert hat. In der Regel kann man hier die Ränder des Intervalls probieren, ansonsten etwas tüfteln.

5 Taylorentwicklung

Berechnen sie die Taylorentwicklung

(a) $T^N_{x_0}sin(x), N \in \mathbb{N}$ um $x_0 = 0$ und schätzen sie den Fehler. Weiter schätzen sie für $x_0 = \pi$ den Fehler bei $x = x_0 - 1$.

(b) $T^4_{x_0}\ln(\cos(x))$ um $x_0 = 0$. Schätzen sie den Fehler $|\ln(\cos(x)) - T^4_{x_0}\ln(\cos(x))|$ für $|x| \leq \frac{\pi}{12}, |x| \leq \frac{\pi}{6}$ und $|x| \leq \frac{\pi}{3}$

(c) $T^2_{x_0}\sqrt[4]{x}$ um $x_0 = 1$. Schätzen sie den Fehler für $x \in (\frac{9}{10}, \frac{11}{10})$

(d) $T^2_{x_0}\sin(xe^x)$ um $x_0 = 0$. Schätzen sie den Fehler von $T^1_{x_0}\sin(xe^x)$ um $x_0 = 0$ für $x \in [-0.1, 0.1]$

Lösung:

(a) Wir berechnen die nte Ableitungen

$$\begin{cases} \sin(x) & n = 4k, k \in \mathbb{N} \\ \cos(x) & n = 4k+1, k \in \mathbb{N} \\ -\sin(x) & n = 4k+2, k \in \mathbb{N} \\ -\cos(x) & n = 4k+3, k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

und werten bei null aus

$$\begin{cases} 0 & n = 4k, k \in \mathbb{N} \\ 1 & n = 4k+1, k \in \mathbb{N} \\ 0 & n = 4k+2, k \in \mathbb{N} \\ -1 & n = 4k+3, k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Das Taylorpolynom ist damit $\displaystyle\sum_{i=0}^{\lfloor\frac{N-1}{2}\rfloor} \frac{(-1)^i}{(2i+1)!}x^{2i+1}$ Die Art und Weise wie i in der Summe auftaucht ist so gewählt, das nur die ungeraden Summanden auftauchen, da alle geraden Ableitungen bei null, 0 sind. Die Obergrenze muss dann so angepasst werden das falls N gerade ist nur bis N-1 summiert wird. Das das funktioniert sieht man indem man für gerades und ungerades N den Faktor $2\lfloor\frac{N-1}{2}\rfloor + 1$ ausrechnet. Der Fehlerterm $|(R^N_\pi f)(x)| = |\frac{(x-\pi)^{N+1}}{(N+1)!}| \begin{cases} |\sin(x)| & n = 4k \text{ oder } 4k+2, k \in \mathbb{N} \\ |\cos(x)| & n = 4k+1 \text{ oder } 4k+2, k \in \mathbb{N} \end{cases}$ Der Kosinus ist im Intervall $[\pi - 1, \pi]$ maximal für π und dort gleich 1, der Sinus ist maximal bei $\pi - 1$ und hat dort den Wert $\sin(\pi - 1)$. Der Fehler ist damit maximal $|\frac{1}{(N+1)!}| \begin{cases} |\sin(\pi-1)| & n = 4k \text{ oder } 4k+2, k \in \mathbb{N} \\ 1 & n = 4k+1 \text{ oder } 4k+2, k \in \mathbb{N} \end{cases}$

(b) Die Ableitungen sind $f'(x) = -\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$, $f''(x) = -\frac{1}{\cos(x)^2}$, $f'''(x) = -\frac{2\sin(x)}{\cos(x)^3}$, $f^{(4)}(x) = -\frac{2(\cos(x)^4+3\sin(x)^2\cos(x)^2)}{\cos(x)^6} = -\frac{2(1+2\sin(x)^2)}{\cos(x)^4}$ und $f^{(5)}(x) = -\frac{2(4\sin(x)\cos(x)^5+(1+2\sin(x)^2)4\cos(x)^3\sin(x))}{\cos(x)^8} = -\frac{2(4\sin(x)\cos(x)^2+(1+2\sin(x)^2)4\sin(x))}{\cos(x)^5} = -\frac{8\sin(x)(\cos(x)^2+1+2\sin(x)^2)}{\cos(x)^5} = -\frac{8\sin(x)(2+\sin(x)^2)}{\cos(x)^5}$ Eingesetzt gibt das $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = -1$,$f'''(0) = 0$,$f^{(4)} = -2$. Damit ist das Taylorpolynom $(T^4_0 f)(x) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12}$. Der Betrag des Fehlerterms ist $|\frac{8\sin(x)(2+\sin(x)^2)}{\cos(x)^5}\frac{x^5}{5!}| = |\frac{8\sin(x)(2+\sin(x)^2)}{\cos(x)^5}\frac{x^5}{5!}| \leq |\frac{8\sin(a)(2+\sin(a)^2)}{\cos(a)^5}\frac{a^5}{5!}|$ für $|x| \leq a$ da der Sinus nahe null größer wird desto größer das Argument ist und der Bruch größer je kleiner der Cosinus. damit ist der Fehler

$$|(R_0^4 f)(x)| = |f(x) - T_0^4 f(x)| \begin{cases} 5.22 \cdot 10^{-5} & \text{für } a = \frac{\pi}{12} \\ 6.06 \cdot 10^{-3} & \text{für } a = \frac{\pi}{6} \\ 6.40 & \text{für } a = \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

(c) Wir berechnen die Ableitungen $f'(x) = \frac{1}{4x^{\frac{3}{4}}}$, $f''(x) = -\frac{3}{16x^{\frac{7}{4}}}$ und $f'''(x) = \frac{21}{64x^{\frac{11}{4}}}$ Ausgewertet bei 1, $f(1) = 1$, $f'(1) = \frac{1}{4}$, $f''(1) = -\frac{3}{16}$. Damit ist das Taylorpolynom $(T_1^2 f)(x) = 1 + \frac{1}{4}(x-1) - \frac{3}{32}(x-1)^2$ Der Fehlerterm nach Lagrange Restgliedabschätzung ist $R_1^2 f = \frac{f'''(x)}{3!}(x-1)^3 = \frac{7(x-1)^3}{128}\xi^{\frac{-11}{4}}$ mit $\xi \in [x_0, x]$ Da $\xi^{\frac{-11}{4}}$ am größten ist falls ξ am kleinsten ist gilt für $x \in [\frac{9}{10}, \frac{11}{10}$ das $R_1^2 f = \frac{7(x-1)^3}{128}\xi^{\frac{-11}{4}} = \frac{7(-\frac{1}{10})^3}{128}(\frac{9}{10})^{\frac{-11}{4}}$

(d) Wir berechnen die Ableitungen $f'(x) = \cos(xe^x)(e^x + xe^x)$
, $f''(x) = -\sin(xe^x)(e^x + xe^x)^2 + \cos(xe^x)(2e^x + xe^x)$
und werten aus $f(0) = 1$, $f'(0) = 1$ und $f(0) = 2$. Daraus ergibt sich das Taylorpolynom $x + x^2$. Der Betrag des maximalen Fehlers im Intervall $[-0.1, 0.1]$ für die Taylorapproximation 1.Ordnung ist dann $|R_0^1 f| = |(-\sin(\xi e^\xi)(e^\xi + \xi e^\xi)^2 + \cos(\xi e^\xi)(2e^\xi + \xi e^\xi))\frac{x^2}{2!}| \leq |((e^\xi + \xi e^\xi)^2 + (2e^\xi + \xi e^\xi))\frac{x^2}{2!}|$ indem wir sinus und cosinus mit 1 bzw -1 abschätzen und setzen dann um den maximalen Fehler zu erhalten $x = \xi = 0.1$: $|((e^{0.1} + 0.1 \cdot e^{0.1})^2 + (2e^{0.1} + 0.1 \cdot e^{0.1}))\frac{(0.1)^2}{2!}|$

6 Lipschitzstetigkeit

Entscheiden Sie ob $\sin(x)$ Lipschitzstetig auf ganz $\mathbb{R}$ ist.
Lösung: Nach Satz aus der Vorlesung ist $\sin(x)$ Lipschitzstetig falls $\frac{d\sin(x)}{dx}$ beschränkt ist. Die Ableitung ist cos(x) und ist beschränkt durch -1 und 1. Damit ist sin(x) Lipschitzstetig.