Blatt 3
Stetigkeit und Differentialrechnung

Jonas Habel, Florian Kollmannsberger

March 14, 2018

1 Stetigkeit

Finden sie für die folgenden Funktionen den maximalen Definitionsbereich. Entscheiden sie ob die Funktionen auf dem Definitionsbereich stetig sind und ob sie gegebenenfalls stetig fortsetzbar sind.

(a) $g_1(x) = \frac{1-\sqrt{|x|+1}}{x}$

(b) $g_2(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x+3)}{x^2-3x+2}$

(c) $g_3(x) = \frac{1-\sqrt{|x|+1}}{|x|}$

(d) $g_4(x) = \frac{x^3}{x^4+|x|^3}$

1.1 Mehr Stetigkeit

Zeigen sie das $f(x) = \begin{cases} sin(\frac{1}{x}) & x \neq 0 \\ 0 & sonst \end{cases}$ nicht stetig bei null ist.

2 Mehr Funktionengrenzwerte

Finden sie die folgenden Funktionengrenzwerte.

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(x-1)^2 \cdot (2x + x^2 + x\sin(x))}{x^2(3-\frac{2}{x})}$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(x-1)^2 \cdot (2x + x^2 + x\sin(x))}{x^2(3-\frac{2}{x})}$

(c) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x-1}}{\frac{2}{x} - \frac{3}{2x^2}}$

(d) $\lim\limits_{x\downarrow 0} \frac{e^x}{\ln(x)}$

(e) $\lim\limits_{x\downarrow 0} x\ln(x)$

(f) $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{1}{x}-\frac{1}{\ln(x+1)}))$

(g) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin(x)+\cos(x)}{x}$

(h) $\lim\limits_{x\uparrow 0}(\cos(x))^{(x-\frac{\pi}{2})}$

(i) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(x^6+1)}{\ln(x^3)}$

(j) $\lim\limits_{x\to\infty}\sin(x\pi)\ln|x-1|$

(k) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\tan(x)(x-\frac{\pi}{2}))$

3 Ableitungen

Berechnen sie die Ableitungen der folgenden Funktionen und entscheiden sie wo die Ableitung existiert.

(a) $f(x)=\frac{x}{x+\sqrt{a^2+x^2}}$

(b) $f(x)=\sqrt{\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}}$

(c) $f(x)=\frac{x^2-sin(x)cos(x)}{2}$

(d) $f(x)=\frac{x^2-(sin(x)cos(x))^2}{2x}$

(e) $f(x)=e^{1-x^2}$

(f) $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+1}$

(g) $f(x)=x\ln(x+\sqrt{x^2+1})-\sqrt{x^2+1}$

(h) $f(x)=\frac{x^2 sin(\pi\cdot x)}{cos(x)+1}$

(i) $f(x)=cos(sin(cos(x^2)))$

(j) $f(x)=\frac{1}{e^{\sqrt{x}cos(x)}}$ für x¿0.

(k) $f(x)=x^x$

(l) $f(x)=sin^2(e^{cos(3x)})$

Berechnen sie bei k und l auch die zweite Ableitung.

4 Zwischenwertsatz

Zeigen sie das $cos(x)=x$ eine Lösung im Intervall $(0,\frac{\pi}{2})$ hat.

5 Taylorentwicklung

Berechnen sie die Taylorentwicklung

(a) $T^N_{x_0} sin(x), N \in \mathbb{N}$ um $x_0 = 0$ und schätzen sie den Fehler. Weiter schätzen sie für $x_0 = \pi$ den Fehler bei $x = x_0 - 1$.

(b) $T^4_{x_0} \ln(\cos(x))$ um $x_0 = 0$. Schätzen sie den Fehler $|\ln(\cos(x)) - T^4_{x_0} \ln(\cos(x))|$ für $|x| \leq \frac{\pi}{12}, |x| \leq \frac{\pi}{6}$ und $|x| \leq \frac{\pi}{3}$

(c) $T^2_{x_0} \sqrt[4]{x}$ um $x_0 = 1$. Schätzen sie den Fehler für $x \in (\frac{9}{10}, \frac{11}{10})$

(d) $T^2_{x_0} \sin(xe^x)$ um $x_0 = 0$. Schätzen sie den Fehler von $T^1_{x_0} \sin(xe^x)$ um $x_0 = 0$ für $x \in [-0.1, 0.1]$

6 Lipschitzstetigkeit

Entscheiden Sie ob $\sin(x)$ Lipschitzstetig auf ganz $\mathbb{R}$ ist.