1 Folgen

1.1 Berechnung von Grenzwerten

Bestimmen Sie folgende Grenzwerte:

a) (i) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-2n}{5+3n}$ (ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^3-1}{n(2n+1)^2}$ (iii) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n+n}{3^n-n}$ *Tipp:* $\forall n \in \mathbb{N} : n^2 < 2^n < 3^n$

b) (i) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+n}-n\right)$ (ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{3n}-\sqrt{2n}\right)$ (iii) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\sqrt{n-1}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sin\left(\frac{n^2+1}{n+5}\right)\log\left(\frac{n^2+5}{n^2+3}\right)$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\log\left(n^4+n^2\right)-4\log n\right)$

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n}$

LÖSUNG:

a) (i) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-2n}{5+3n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}-2}{\frac{5}{n}+3} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}-2\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{5}{n}+3\right)} = -\frac{2}{3}$

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^3-1}{n(2n+1)^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2-\frac{1}{n^2}}{\left(2+\frac{1}{n^2}\right)^2} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2-\frac{1}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n^2}\right)^2} = \frac{2-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}{\left(2+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\right)^2} = \frac{1}{2}$

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n+n}{3^n-n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\frac{n}{2^n}}{1-\frac{n}{3^n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n \frac{1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}}{1-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{3^n}} = 0\cdot 1 = 0$

Dabei wurde benutzt, dass $\frac{n}{3^n} \overset{\text{Tipp}}{<} \frac{n}{2^n} = \frac{1}{n}\frac{n^2}{2^n} \overset{\text{Tipp}}{<} \frac{1}{n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, woraus folgt, dass $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{3^n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2^n} = 0$ ist.

b) (i) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-n\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)\left(\sqrt{n^2+n}+n\right)}{\sqrt{n^2+n}+n} \overset{\text{3. Binom}}{=} \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left(n^2+n\right)-n^2}{\sqrt{n^2+n}+n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} = \frac{1}{2}$

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{3n}-\sqrt{2n}\right) = \left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n} = \infty$

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\sqrt{n-1} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\sqrt{n-1} \overset{\text{3. Binom}}{=} \lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\sqrt{n-1} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1-\frac{1}{n}}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} = \frac{1}{2}$

c) $\left|\sin\left(\frac{n^2+1}{n+5}\right)\log\left(\frac{n^2+5}{n^2+3}\right)\right| = \left|\sin\left(\frac{n^2+1}{n+5}\right)\right|\left|\log\left(\frac{n^2+5}{n^2+3}\right)\right| \le \left|\log\left(\frac{n^2+5}{n^2+3}\right)\right| = \left|\log\left(\frac{1+\frac{5}{n^2}}{1+\frac{3}{n^2}}\right)\right| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \log 1 = 0$, also $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\left(\frac{n^2+1}{n+5}\right)\log\left(\frac{n^2+5}{n^2+3}\right) = 0$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\log\left(n^4+n^2\right)-4\log n\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\log\left(n^4+n^2\right)-\log\left(n^4\right)\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\log\left(\frac{n^4+n^2}{n^4}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\log\left(1+\frac{1}{n^2}\right) = \log 1 = 0$

e) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}{n\cdot n\cdot\ldots\cdot n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n}\cdot\ldots\cdot\frac{n}{n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n}\cdot\ldots\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n} = 0\cdot 0\cdot\ldots\cdot 1 = 0$

1.2 Limes Superior und Limes Inferior

Finden Sie alle Häufungspunkte der durch

$$a_n := (-1)^n + \left(2-\frac{1}{n}\right)(-1)^{\frac{1}{2}n(n+1)} \qquad n\in\mathbb{N} \tag{1}$$

gegebenen Folge. Geben Sie die zugehörigen konvergenten Teilfolgen, sowie $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ und $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$ an. Begründen Sie außerdem, warum es keine weiteren Häufungspunkte gibt als die, die Sie angegeben haben.

Hinweis: Schauen sie sich das Verhalten der Terme $(-1)^{\cdots}$ an. Es kann hilfreich sein, z.B. die ersten acht (ggf. mehr) Folgenglieder zu berechnen, um nach Mustern zu suchen.

LÖSUNG:
Als erstes wollen wir die einzelnen Terme der Folge genauer inspizieren. Es gilt:

$$2 - \frac{1}{n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 2 \tag{2}$$

$$(-1)^n = \begin{cases} 1 & n \text{ gerade} \\ -1 & n \text{ ungerade} \end{cases} \tag{3}$$

$$(-1)^{\frac{1}{2}n(n+1)} = \begin{cases} 1 & \frac{1}{2}n(n+1) \text{ gerade} \Leftrightarrow n = 3,4,7,8,11,12,\ldots \\ -1 & \frac{1}{2}n(n+1) \text{ ungerade} \Leftrightarrow n = 1,2,5,6,9,10,\ldots \end{cases} \tag{4}$$

$(-1)^n$ zeigt ein oszillierendes Verhalten mit Periode 2, während $(-1)^{\frac{1}{2}n(n+1)}$ ein oszillierendes Verhalten mit Periode 4 zeigt. Es liegt also nah, dass die Auswahl jedes vierten Folgengliedes eine konvergente Teilfolge erzeugt, die nicht mehr oszilliert. Es seien also $b_n := a_{4n}$, $c_n := a_{4n+1}$, $d_n := a_{4n+2}$, $e_n := a_{4n+3}$. Dann ist

$$b_n = a_{4n} = (-1)^{4n} + \left(2 - \frac{1}{4n}\right)(-1)^{\frac{1}{2}\cdot 4n(4n+1)} = 1 + 2 - \frac{1}{4n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 3 \tag{5}$$

$$c_n = a_{4n+1} = (-1)^{4n+1} + \left(2 - \frac{1}{4n+1}\right)(-1)^{\frac{1}{2}\cdot(4n+1)(4n+2)} = -1 - \left(2 - \frac{1}{4n+1}\right) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} -3 \tag{6}$$

$$d_n = a_{4n+2} = (-1)^{4n+2} + \left(2 - \frac{1}{4n+2}\right)(-1)^{\frac{1}{2}\cdot(4n+2)(4n+3)} = 1 - \left(2 - \frac{1}{4n+2}\right) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} -1 \tag{7}$$

$$e_n = a_{4n+3} = (-1)^{4n+3} + \left(2 - \frac{1}{4n+3}\right)(-1)^{\frac{1}{2}\cdot(4n+3)(4n+4)} = -1 + 2 - \frac{1}{4n+3} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1 \tag{8}$$

$$\tag{9}$$

Die Häufungspunkte sind als $-3, -1, 1, 3$ und es gilt $\limsup_{n\to\infty} a_n = 3$ und $\liminf_{n\to\infty} a_n = -3$. Es gibt keine weiteren Häufungspunkte, da die vier Folgen b_n, c_n, d_n und e_n die ursprüngliche Folge a_n ganz abdecken. Es gilt nämlich $a_n = (c_0, d_0, e_0, b_1, c_1, d_1, e_1, b_2, c_2, d_2, e_2, b_3, \ldots)$. Jede andere konvergente Teilfolge muss damit gegen einen der Grenzwerte von b_n, c_n, d_n oder e_n konvergieren. Man findet keine weitere konvergente Teilfolge, die nicht gegen einen der bereits genannten vier Häufungspunkte konvergiert.

1.3 Unendlicher Potenzturm

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge, die über die Rekursionsvorschrift $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{2}^{a_n}$ definiert ist.

a) Zeigen Sie per vollständiger Induktion, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wächst.
Hinweis: Benutzen sie die Monotonie der Potenzfunktion.

b) Zeigen Sie per vollständiger Induktion, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach oben durch 2 beschränkt ist.
Hinweis: Benutzen sie die Monotonie der Potenzfunktion.

c) Warum konvergiert die Folge also? Argumentieren sie, dass der Grenzwert im Intervall $(0, 2]$ liegen muss.

d) Berechnen Sie den Grenzwert $a := \lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdots}}}$ der Folge.
Hinweis: Es gilt $\lim_{n\to\infty} \sqrt{2}^{a_n} = \sqrt{2}^{\lim_{n\to\infty} a_n}$

LÖSUNG:

a) Induktionsanfang: $a_2 = \sqrt{2}^{\sqrt{2}} \geq \sqrt{2}^{\sqrt{1}} = \sqrt{2} = a_1$. Induktionsschritt: Sei $a_{n+1} \geq a_n$, dann gilt:

$$a_{n+2} = \sqrt{2}^{a_{n+1}} \geq \sqrt{2}^{a_n} = a_{n+1} \tag{10}$$

Somit ist $a_{n+1} \geq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

b) Induktionsanfang: $a_1 = \sqrt{2} \leq \sqrt{4} = 2$. Induktionsschritt: Sei $a_n \leq 2$, dann gilt:

$$a_{n+1} = \sqrt{2}^{a_n} \leq \sqrt{2}^2 = 2 \tag{11}$$

Somit ist $a_n \leq 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

c) Da die Folge monoton und beschränkt ist, konvergiert sie. Es gilt $2 \geq a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, folglich liegt der Grenzwert im Intervall $[0, 2]$. Da $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ außerdem monoton wächst, kann der Grenzwert nicht 0 sein, es sei denn $a_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, was aber offensichtlich nicht gilt.

d) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Somit konvergiert auch $(a_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$, und zwar gegen denselben Grenzwert a. Wir erhalten also:

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{2}^{a_n} = \sqrt{2}^{\lim\limits_{n\to\infty} a_n} = \sqrt{2}^a \tag{12}$$

Die Gleichung $a = \sqrt{2}^a$ hat im Intervall $(0, 2]$ als einzige Lösung $a = 2$.

1.4 Sandwich-Kriterium

Berechnen Sie für $n \in \mathbb{N}$ mithilfe des Sandwich-Kriteriums den Grenzwert der Folgen

a) $\frac{1}{n^2+1}$

b) $\sqrt[n]{n^2 + n}$

c) $\sqrt[n]{3^n + 2^n}$

Hinweis: Zu b) und c): Es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x} = 1$ für $x \in \mathbb{N}$. Benutzen Sie die Monotonie der Wurzel.

LÖSUNG:

a) Es gilt $n^2 - 2n + 1 = (n-1)^2 \geq 0$, also $n^2 + 1 \geq 2n$.
Umstellen ergibt $\frac{1}{n^2+1} \leq \frac{1}{2n}$.
Man erhält das folgende Sandwich:

$$0 = \lim_{n\to\infty} 0 \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2+1} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n} = 0 \tag{13}$$

und damit $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2+1} = 0$

b) Es gilt $\sqrt[n]{n^2 + n} \overset{n\leq n^2}{\leq} \sqrt[n]{n^2 + n^2} = \sqrt[n]{2n^2} = \sqrt[n]{2}\sqrt[n]{n}\sqrt[n]{n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$.
Außerdem gilt $\sqrt[n]{n^2 + n} \overset{n\geq 0}{\geq} \sqrt[n]{n^2} = \sqrt[n]{n}\sqrt[n]{n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1 \cdot 1 = 1$.
Man erhält das folgende Sandwich:

$$1 = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2} \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2 + n} \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2n^2} = 1 \tag{14}$$

und damit $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2 + n} = 1$.

c) Es gilt $\sqrt[n]{3^n + 2^n} \overset{2^n\leq 3^n}{\leq} \sqrt[n]{3^n + 3^n} = \sqrt[n]{2 \cdot 3^n} = 3\sqrt[n]{2} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 3$.
Außerdem gilt: $\sqrt[n]{3^n + 2^n} \overset{2^n\geq 0}{\geq} \sqrt[n]{3^n} = 3 \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 3$.
Man erhält das folgende Sandwich:

$$3 = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n} \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n + 2^n} \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2 \cdot 3^n} = 3 \tag{15}$$

und damit $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n + 2^n} = 3$.

2 Reihen

2.1 Konvergenz von Reihen

a) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und auf absolute Konvergenz:

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4n^2-3}$

(iii) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}n}{n^2+1}$

(iv) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

(v) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-1}$

b) Gegen welchen Wert konvergieren folgende Reihen eigentlich oder uneigentlich?

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{e^n}$

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n-1}{3^n}$

(iii) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{3^n}$

(iv) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2}$ *Hinweis:* Die Summe der ersten n natürlichen Zahlen ist $\frac{n(n+1)}{2}$

(v) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ *Hinweis:* Es gilt $1 = \frac{1}{2}\left((2n+1)-(2n-1)\right)$. Stichwort Teleskopreihe.

LÖSUNG:

a) (i) Wegen $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ konvergiert die Reihe absolut nach dem Wurzelkriterium.

(ii) Wegen $4n^2-3 \leq 4n^2$ gilt $\frac{1}{4n^2-3} \geq \frac{1}{4n^2}$ und wir können die Reihe abschätzen:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4n^2-3} \geq \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty \tag{16}$$

Die Reihe divergiert bestimmt gegen $+\infty$.

(iii) Wegen $\frac{n}{n^2+1} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ ist die Folge $\frac{n}{n^2+1}$ eine Nullfolge. Mit dem Leibnitz-Kriterium konvergiert die Reihe. Absolute Konvergenz ist jedoch nicht gegeben, denn

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left|\frac{(-1)^{n-1}n}{n^2+1}\right| = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{n^2+1} \geq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{2n^2} = \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty \tag{17}$$

(iv) Wegen $\frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \frac{(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{e} < 1$ konvergiert die Reihe absolut nach dem Quotientenkriterium.

(v) Wegen $\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-1} = \left(\frac{n-1}{n-1+1}\right)^{n-1} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{e}$ ist die Folge $\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-1}$ keine Nullfolge. Daher konvergiert die Reihe nicht.

b) (i) Für $n \geq 3$ gilt $\frac{n}{e} \geq \frac{3}{e}$. Damit lässt sich die Reihe abschätzen:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{e^n} = \sum_{n=1}^{2} \left(\frac{n}{e}\right)^n + \sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{n}{e}\right)^n \geq \sum_{n=1}^{2} \left(\frac{n}{e}\right)^n + \sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{3}{e}\right)^n \overset{\frac{3}{e}>1}{=} +\infty \tag{18}$$

(ii) Es handelt sich um die Differenz zweier geometrischer Reihen:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n-1}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{2}{3}} - \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2} \tag{19}$$

(iii) Offenbar ist $\cos(n\pi) = (-1)^n$. Somit erhalten wir eine geometrische Reihe:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{1+\frac{1}{3}} = \frac{3}{4} \tag{20}$$

(iv) Es ist:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2} \tag{21}$$

(v) Dies ist eine Teleksop-Reihe:

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{m}\left(\frac{(2n+1)-(2n-1)}{(2n+1)(2n-1)}\right) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{m}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) \tag{22}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2m-1}-\frac{1}{2m+1}\right)\right) \tag{23}$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2m+1}\right) \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2} \tag{24}$$

2.2 Konvergenzradius

Bestimmen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3}{2^n} z^n$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n} z^{2n}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n z^{n^2}$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} n!(z+1)^n$

LÖSUNG:

a) Es gilt $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^3}{2^n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^{3/n}}{2} = \frac{1}{2}\left(\lim\limits_{n\to\infty} n^{1/n}\right)^3 = \frac{1}{2}$. Der Konvergenzradius ist nach der Formel von Cauchy-Hadamard also 2.

b) Damit die Reihe absolut konvergiert, muss nach dem Quotientenkriterium gelten:

$$\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{\frac{z^{n+1}}{(n+1)^2}}{\frac{z^n}{n^2}}\right| = |z| \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^2 = |z| \overset{!}{<} 1 \tag{25}$$

Damit ist der Konvergenzradius 1.

c) Damit die Reihe absolut konvergiert, muss nach dem Wurzelkriterium gelten:

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{n}{3^n} z^{2n}\right|} = |z|^2 \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{3^n}} = \frac{|z|^2}{3} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \frac{|z|^2}{3} \quad \overset{!}{<} 1 \tag{26}$$

Damit ist der Konvergenzradius $\sqrt{3}$.

d) Damit die Reihe absolut konvergiert, muss nach dem Wurzelkriterium gelten:

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|2^n z^{n^2}\right|} = 2\lim_{n\to\infty} |z|^n = \begin{cases} 0 & |z| < 1 \\ 2 & |z| = 1 \\ \infty & |z| > 1 \end{cases} \overset{!}{<} 1 \tag{27}$$

Damit ist der Konvergenzradius 1.

e) Damit die Reihe absolut konvergiert, muss nach dem Quotientenkriterium gelten:

$$\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{(n+1)!(z+1)^{n+1}}{n!(z+1)^n}\right| = |z+1| \lim_{n\to\infty}(n+1) = \begin{cases} \infty & z \neq -1 \\ 0 & z = -1 \end{cases} \quad \overset{!}{<} 1 \tag{28}$$

Damit ist der Konvergenzradius 0. Die Reihe konvergiert nirgends außer im Punkt $z = -1$.

2.3 Exponentialreihe

a) Zeigen Sie, dass die Exponentialreihe $\exp z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ unendlichen Konvergenzradius hat.

b) Zeigen Sie mit Hilfe der Cauchy-Produktformel:

$$\exp(z) \cdot \exp(z) = \exp(2z) \quad \forall z \in \mathbb{C} \tag{29}$$

Hinweis: Es gilt $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

c) Die auf ganz $\mathbb{R}$ absolut konvergenten Reihenentwicklungen des Sinus und des Cosinus lauten:

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} \qquad \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} \tag{30}$$

Zeigen Sie, dass gilt: $\exp(\mathrm{i}z) = \cos z + \mathrm{i} \sin z$

LÖSUNG:

a) Damit die Reihe absolut konvergiert, muss nach dem Quotientenkriterium gelten:

$$\limsup_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{z^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{z^n}{n!}} \right| = |z| \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 \overset{!}{<} 1 \tag{31}$$

Damit ist der Konvergenzradius ∞.

b) Es gilt:

$$\exp(z) \cdot \exp(z) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \right) \overset{\text{Cauchy}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k z^{n-k}}{k!(n-k)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \tag{32}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} 2^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2z)^n}{n!} = \exp(2z) \tag{33}$$

c) Es gilt:

$$\exp(\mathrm{i}z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}z)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{i}^{2n} \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{i}^{2n+1} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \tag{34}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \mathrm{i} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \cos z + \mathrm{i} \sin z \tag{35}$$