Aufgaben zum Ferienkurs Analysis I für Physiker

Florian Kollmannsberger, Jonas Habel

13.03.2018

1 Folgen

1.1 Berechnung von Grenzwerten

Bestimmen Sie folgende Grenzwerte:

a) (i) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-2n}{5+3n}$ (ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^3-1}{n(2n+1)^2}$ (iii) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n+n}{3^n-n}$ *Tipp:* $\forall n \in \mathbb{N} : n^2 < 2^n < 3^n$

b) (i) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+n} - n\right)$ (ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{3n} - \sqrt{2n}\right)$ (iii) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\sqrt{n-1}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sin\left(\frac{n^2+1}{n+5}\right) \log\left(\frac{n^2+5}{n^2+3}\right)$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\log\left(n^4+n^2\right) - 4\log n\right)$

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n}$

1.2 Limes Superior und Limes Inferior

Finden Sie alle Häufungspunkte der durch

$$a_n := (-1)^n + \left(2 - \frac{1}{n}\right)(-1)^{\frac{1}{2}n(n+1)} \qquad n \in \mathbb{N} \tag{1}$$

gegebenen Folge. Geben Sie die zugehörigen konvergenten Teilfolgen, sowie $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ und $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$ an. Begründen Sie außerdem, warum es keine weiteren Häufungspunkte gibt als die, die Sie angegeben haben.
Hinweis: Schauen sie sich das Verhalten der Terme $(-1)^{\cdots}$ an. Es kann hilfreich sein, z.B. die ersten acht (ggf. mehr) Folgenglieder zu berechnen, um nach Mustern zu suchen.

1.3 Unendlicher Potenzturm

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge, die über die Rekursionsvorschrift $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{2}^{a_n}$ definiert ist.

a) Zeigen Sie per vollständiger Induktion, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wächst.
Hinweis: Benutzen sie die Monotonie der Potenzfunktion.

b) Zeigen Sie per vollständiger Induktion, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach oben durch 2 beschränkt ist.
Hinweis: Benutzen sie die Monotonie der Potenzfunktion.

c) Warum konvergiert die Folge also? Argumentieren sie, dass der Grenzwert im Intervall $(0, 2]$ liegen muss.

d) Berechnen Sie den Grenzwert $a := \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdots}}}$ der Folge.
Hinweis: Es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{2}^{a_n} = \sqrt{2}^{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}$

1.4 Sandwich-Kriterium

Berechnen Sie für $n \in \mathbb{N}$ mithilfe des Sandwich-Kriteriums den Grenzwert der Folgen

a) $\frac{1}{n^2+1}$

b) $\sqrt[n]{n^2+n}$

c) $\sqrt[n]{3^n+2^n}$

Hinweis: Zu b) und c): Es gilt $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ und $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x} = 1$ für $x \in \mathbb{N}$. Benutzen Sie die Monotonie der Wurzel.

2 Reihen

2.1 Konvergenz von Reihen

a) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und auf absolute Konvergenz:

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4n^2-3}$

(iii) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}n}{n^2+1}$

(iv) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

(v) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-1}$

b) Gegen welchen Wert konvergieren folgende Reihen eigentlich oder uneigentlich?

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{e^n}$

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n-1}{3^n}$

(iii) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{3^n}$

(iv) $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2}$ *Hinweis:* Die Summe der ersten n natürlichen Zahlen ist $\frac{n(n+1)}{2}$

(v) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ *Hinweis:* Es gilt $1 = \frac{1}{2}\left((2n+1)-(2n-1)\right)$. Stichwort Teleskopreihe.

2.2 Konvergenzradius

Bestimmen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3}{2^n} z^n$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n} z^{2n}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n z^{n^2}$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} n!(z+1)^n$

2.3 Exponentialreihe

a) Zeigen Sie, dass die Exponentialreihe $\exp z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ unendlichen Konvergenzradius hat.

b) Zeigen Sie mit Hilfe der Cauchy-Produktformel:

$$\exp(z) \cdot \exp(z) = \exp(2z) \quad \forall z \in \mathbb{C} \tag{2}$$

Hinweis: Es gilt $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

c) Die auf ganz $\mathbb{R}$ absolut konvergenten Reihenentwicklungen des Sinus und des Cosinus lauten:

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} \qquad \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} \tag{3}$$

Zeigen Sie, dass gilt: $\exp(\mathrm{i}z) = \cos z + \mathrm{i} \sin z$