Blatt 1
Induktion, Supremum, Infimum, komplexe Zahlen

Jonas Habel, Florian Kollmannsberger

16. März 2018

1 Komplexe Zahlen

Geben sie die Zahlen als $a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und in Polardarstellung an.

1. $1 + i$
2. $\frac{1}{i}$
3. $(1 + i)^2$
4. $\sqrt{i}$
5. $\sqrt{-5 + 12i}$
6. $(1 + \frac{1}{i})^{-1}$
7. $(1 + i)e^{i\frac{\pi}{4}}$

Hinweis: Es hilft manchmal der Ansatz $\sqrt{x + iy} = u + iv$
Lösung

1. $1 + i = |1 + i|e^{i\cdot\arg(1+i)} = \sqrt{2}e^{i\cdot\frac{\pi}{4}}$
2. $\frac{1}{i} = \frac{i}{i^2} = -i = |-i|e^{i\arg(-i)} = e^{-i\pi}$
3. $(1 + i)^2 = 1^2 + 2i + i^2 = 1 + 2i - 1 = 2i = |2i|e^{i\arg(2i)}$
4. $\sqrt{i} = \sqrt{|i|e^{i\arg(i)}} = \sqrt{e^{i\frac{\pi}{2}}} = e^{i\frac{\pi}{4}} = \cos(\frac{\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i)$
5. $\sqrt{-5 + 12i} = \sqrt{|-5 + 12i|e^{i\arg(-5+12i)}} = \sqrt{13^2e^{i\arg(-5+12i)}} = 13e^{i\frac{arg(-5+12i)}{2}}$
   $\sqrt{x + iy} = u + iv$ äquivalent zu $x + iy = u^2 + 2iuv - v^2$
   $x = u^2 - v^2, y = 2uv$
   Hier: $-5 = u^2 - v^2, 12 = 2uv$ Setze $u = \frac{6}{v}$ in die erste Gleichung ein. $-5 = \frac{36}{v^2} - v^2$

umgestellt zu$-5v^2 = 36 - v^4$ ergibt $v^2 = \frac{5 \pm \sqrt{5^2+4\cdot 36}}{2} = \begin{cases} 9 \\ 4 \end{cases}$ also $v = \pm 3$ oder ± 2. Für $v = \pm 2$ ist $-5 = u^2 - 2^2$ nicht für reeles u zu lösen deswegen $v = \pm 3$ und damit $u = \pm 2$. Wegen $6 = uv$ ist das Vorzeichen von u gleich dem von v, und damit sind $\pm(2+3i)$ mögliche Lösungen der Quadratwurzel. Die Lösung ist nun die mit dem kleineren Winkel zur positiven reelen Achse. da $2+3i$ im ersten Quadranten liegt und $-2-3i$ im dritten Quadranten hat $2+3i$ den kleineren Winkel und ist damit die Lösung.

6. $(1+\frac{1}{i})^{-1} = (1-i)^{-1} = \frac{1+i}{(1-i)(1+i)} = \frac{1}{2}(1+i)$

7. $e^{i\frac{\pi}{4}} = \cos(\frac{\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$ damit $(1+i)e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1-1+2i) = \sqrt{2}i$

Berechnen sie

1. $\ln(i)$, $\ln(1+i)$, i^i

Lösung

1. $\ln(i) = \ln(|i|e^{i\cdot arg(i)}) = \ln(|i|) + \ln(e^{i\cdot arg(i)}) = \ln(1) + i\cdot\arg(i) = 0 + i\cdot\pi/2$
2. $\ln(1+i) = \ln(|1+i|) + i\cdot\arg(1+i) = \ln(\sqrt{2}) + i\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\cdot\ln(2) + i\cdot\frac{\pi}{4}$
3. $i^i = e^{i\cdot\ln(i)} = e^{i\cdot i\cdot\frac{\pi}{2}} = e^{-\frac{\pi}{2}}$

1.1 Einheitswurzel

Gegeben ist das Polynom $p(z) = z^7 - 1$

(a) Zeigen Sie die geometrische Summenformel $\displaystyle\sum_{i=0}^{m} z^i = \frac{z^{m+1}-1}{z-1}$ für $z \neq 1, n \in \mathbb{N}$

(b) Spalten sie den Faktor (z-1) ab.

(c) Finden sie die restlichen Nullstellen von p.

Lösung

(a) I.A. $n = 0, z_0 = 1 = \frac{z^{0+1}-1}{z-1}$
I.B. $\displaystyle\sum_{i=0}^{m} z^i = \frac{z^{m+1}-1}{z-1}$
I.S. $n- > n+1$: $\displaystyle\sum_{i=0}^{m+1} z^i = \sum_{i=0}^{m} z^i + z^{m+1} + \stackrel{\text{I.B.}}{=} \frac{z^{m+1}-1}{z-1} + z^{m+1} = \frac{z^{m+1}-1}{z-1} + \frac{z^{m+1}(z-1)}{z-1} = \frac{z^{m+1}-1+z^{m+2}-z^{m+1}}{z-1} = \frac{z^{m+2}-1}{z-1}$

(b) Es gibt zwei möglichkeiten entweder über Polynomdivision mit $\frac{p(z)}{z-1} = z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$ oder über die Formel aus (a) mit $\frac{z^7-1}{z-1} = \sum_{i=0}^{6} z^i$

(c) Die Nullstellen von $z^7 - 1$ sind die 7. Einheitswurzeln $z_k = e^{i2\pi\frac{k}{7}}, k = 0, ..., 6$ Damit gilt $p(z) = z^7 - 1 = \prod_{k=0}^{6}(z - z_k)$

2 Injektiv, Surjektiv, Bijektiv

Entscheide durch Beweis oder Gegenbeispiel, ob die folgenden Funktionen injektiv surjektiv oder bijektiv sind.

(a) $f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}, n \mapsto n + 1$

(b) $f : \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{Z}, n \mapsto n + 1$

(c) $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}, (n, m) \mapsto n + m$

(d) $f : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \mapsto \mathbb{N}_0, (n, m) \mapsto n + m$

Lösung

(a) f ist injektiv, denn für $n, m \in \mathbb{N}$ mit $f(n) = f(m)$ folgt $n+1 = m+1$ damit $n = m$, aber nicht surjektiv da $1 \notin f(\mathbb{N})$.

(b) f ist bijektiv, denn injektiv genauso wie in (a). Surjektivität folgt, da für alle $n \in \mathbb{Z}$ gilt das $f(n - 1) = n$

(c) f ist weder surjektiv noch injektiv, da $1 \notin f(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$, und z.B. $f(2, 1) = f(1, 2)$.

(d) f ist surjektiv, aber nicht bijektiv, da es zu jedem $n \in \mathbb{N}_0$ ein $(n, 0) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ gibt sodass $f(n, 0) = n$. Nicht injektiv siehe (c).

2.1 Bildmengen

Entscheiden Sie welche der folgenden Aussagen für die Mengen M,N und alle Abbildungen $f : M \mapsto N$ gelten. Geben sie jeweils einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.

(a) Für alle $X, Y \subset N$ gilt $f^{-1}(X \cup Y) = f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$

(b) Für alle $A \subset M$ gilt $f^{-1}(f(A)) = A$

(c) Wenn f surjektiv ist, so gilt $f^{-1}(f(A)) = A$ für alle $A \cup M$

Lösung

(a) Die Aussage ist wahr, denn: Sei $a \in M$. Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
a \in f^{-1}(X \cup Y) &\overset{\text{Def. Urbild einer Menge}}{\Leftrightarrow} f(a) \in X \cup Y \\
&\overset{\text{Def. von}\cup}{\Leftrightarrow} f(a) \in X \vee f(a) \in Y \\
&\overset{DefUrbild}{\Leftrightarrow} a \in f^{-1}(X) \vee a \in f^{-1}(Y) \\
&\overset{\text{Def. von}\cup}{\Leftrightarrow} a \in f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)
\end{aligned}
$$

(b) Die Aussage ist im Allgemeinen falsch. Beispiel: Für $f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}, f(n) := \begin{cases} 0 & n = 0 \\ n-1 & n \geq 1 \end{cases}$ und $A := \{0\}$ ist $f^{-1}(\{0\}) = \{0, 1\} \neq A$

(c) Auch die Aussage ist im Allgemeinen falsch wie das Beispiel in (b) zeigt(die Abbildung f in (b) ist wegen $\forall n \in \mathbb{N} : f(n+1) = n$ surjektiv

3 Vollständige Induktion

Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion

(a) $4^n + 5$ ist für alle $n \in \mathbb{N}_0$ durch 3 teilbar.

(b) $4^n + 15n - 1$ ist für alle $n \in \mathbb{N}_0$ durch 9 teilbar. Hinweis nutzen sie (a).

(c) für $n \geq 2$ gilt $\displaystyle\prod_{k=2}^{n}(1 - \frac{1}{k}) = \frac{1}{n}$

(d) für $n \geq 2$ gilt $\displaystyle\prod_{k=2}^{n}(1 - \frac{k-1}{k}) = \frac{1}{n!}$

(e) $\forall n \in \mathbb{N} : (1+h)^n \geq 1 + nh$ falls $h \geq -1$

(f) $\forall n \in \mathbb{N} \quad \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

Lösung

(a) I.A.$4^0 + 5 = 1 + 5 = 6$ ist ohne Rest durch 3 teilbar.
I.B. $4^n + 5$ ist $n \in \mathbb{N}_0$ durch 3 teilbar.
I.S. $4^{n+1} + 5 = 4 \cdot 4^n + 5 = (4^n + 5) + 3 * 4^n$. Der erste Teil ist wegen der Induktionsbehauptung durch 3 teilbar, der zweite offensichtlich auch.

(b) I.A. $4^0 + 15 \cdot 0 - 1$ ist durch 9 tielbar.
I.B. $4^n + 15n - 1$ ist durch 9 teilbar
I.S. $4^{n+1} + 15(n+1) - 1 = (4^n + 15n - 1) + 3 \cdot 4^n + 15 = (4^n + 15n - 1) + 3(4^n + 5)$ Der erste Teil ist wegen der Induktionsbehauptung durch neun teilbar der zweite Teil ist $3(4^n + 5)$ und $(4^n + 5)$ nach (a) durch 3 teilbar somit ist der zweite Teil durch neun teilbar.

(c) I.A. $n = 2, 1 - 1/2 = 1/2$
I.B.$\prod_{k=2}^{n}(1 - \frac{1}{k}) = \frac{1}{n}$
I.S.$\prod_{k=2}^{n+1}(1 - \frac{1}{k}) = \prod_{k=2}^{n}(1 - \frac{1}{k})(1 - \frac{1}{n+1}) \overset{\text{I.B.}}{=} \frac{1}{n}(1 - \frac{1}{n+1}) = \frac{1}{n}(\frac{n+1}{n+1} - \frac{1}{n+1}) = \frac{1}{n}(\frac{n+1-1}{n+1}) = \frac{1}{n+1}$

(d) I.A. $n = 2, 1 - 1/2 = 1/2$
I.B. $\prod_{k=2}^{n}(1 - \frac{k-1}{k}) = \frac{1}{n!}$
I.S. $\prod_{k=2}^{n+1}(1 - \frac{k-1}{k}) = \prod_{k=2}^{n}(1 - \frac{k-1}{k})(1 - \frac{n}{n+1}) \overset{\text{I.B.}}{=} \frac{1}{n!}(1 - \frac{n}{n+1}) = \frac{1}{n!}(\frac{n+1}{n+1} - \frac{n}{n+1}) = \frac{1}{n!}(\frac{n+1-n}{n+1}) = \frac{1}{(n+1)!}$

(e) I.A. $1 + h \geq 1 + h$
I.B. $(1+h)^n \geq 1 + nh$
I.S. $(1+h)^{n+1} = (1+h)^n(1+h) \geq (1+nh)(1+h) = 1 + nh + h + nh^2 = 1 + (n+1)h + nh^2 \geq 1 + (n+1)h$. Weil $nh^2 \geq 0$.

(f) I.A. $1^3 = 1 = \frac{1^2(1+1)^2}{4}$
I.B. $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$
I.S. $\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 \overset{\text{I.B.}}{=} \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{4(n+1)^3}{4} = \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4} = \frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4} = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$

3.1 Fibonacci Zahlen

Die Fibonacci-Zahlen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sind rekursiv definiert durch

$$a_1 := 1, a_2 := 1, a_{n+1} := a_n + a_{n-1} \text{ für } (n \geq 2)$$

zeigen sie die folgenden Ausssagen

(a) $a_{n-1}a_{n+1} - a_n^2 = (-1)^n \forall n \geq 2$

(b) $(\frac{3}{2})^{n-2} \leq a_n \leq (\frac{5}{3})^{n-1} \forall n \geq 2$

(c) Die Quotientenfolge $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $q_n := \frac{a_{n+1}}{a_n}$ folgt der Formel

$$q_1 = 1, q_{n+1} = 1 + \tfrac{1}{q_n} (n \geq 2)$$

Lösung

(a) I.A. $a_1 \cdot a_3 - a_2^2 = 1 \cdot 2 - 1 = 1 = (-1)^2$
I.B. $a_{n-1}a_{n+1} - a_n^2 = (-1)^n$
I.S.

$$\begin{aligned}
a_n a_{n+2} - a_{n+1}^2 &= (a_{n-1} + a_{n-2})(a_{n+1} + a_n) - (a_n + a_{n-1})^2 && (1)\\
&= a_{n-1}a_{n+1} + a_{n-1}a_n + a_{n-2}a_{n+1} + a_n a_{n-2} - a_n^2 - 2a_n a_{n-1} - a_{n-1}^2 && (2)\\
&= a_{n-1}a_{n+1} - a_n^2 + a_{n-1}a_n + a_{n-2}a_{n+1} + a_n a_{n-2} - a_{n-1}^2 - 2a_n a_{n-1} && (3)\\
&= (-1)^n + a_{n-1}a_n + a_{n-2}a_{n+1} + (-1)^{n-1} - 2a_n a_{n-1} && (4)\\
&= (-1)^n + (-1)^{n-1} + a_{n-2}a_{n+1} - a_n a_{n-1} && (5)\\
&= a_{n-2}(a_n + a_{n-1}) - (a_{n-1} + a_{n-2})a_{n-1} && (6)\\
&= a_{n-2}a_n + a_{n-2}a_{n-1} - a_{n-1}^2 - a_{n-2}a_{n-1} && (7)\\
&= a_{n-2}a_n - a_{n-1}^2 && (8)\\
&= (-1)^{n-1} && (9)\\
&= (-1)^{n+1} && (10)\\
& && (11)
\end{aligned}$$

(b) I.A. $(\frac{3}{2})^0 \leq a_n = 2 \leq (\frac{5}{3})^1$
I.B. $(\frac{3}{2})^{n-2} \leq a_n \leq (\frac{5}{3})^{n-1}$
I.S. $a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \overset{\text{I.B.}}{\leq} (\frac{5}{3})^{n-1} + (\frac{5}{3})^{n-2} = (\frac{5}{3})^{n-2}((\frac{5}{3}) + 1)$. Es gilt $(\frac{5}{3})^2 - (1 + \frac{5}{3}) = \frac{25}{9} - \frac{8}{3} = \frac{25}{9} - \frac{24}{9} = \frac{1}{24}$. Deswegen $(\frac{5}{3})^2 \geq (1 + \frac{5}{3})$ also $a_{n+1} \leq (\frac{5}{3})^{n-2}((\frac{5}{3}) + 1) \leq (\frac{5}{3})^n$
$a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \overset{\text{I.B.}}{\geq} (\frac{3}{2})^{n-2} + (\frac{3}{2})^{n-3} = (\frac{3}{2})^{n-3}(1 + \frac{3}{2})$ Es gilt $(\frac{3}{2})^2 - (1 + \frac{3}{2}) = \frac{9}{4} - \frac{5}{2} = \frac{9}{4} - \frac{10}{4} = -\frac{1}{10}$ Deswegen $a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \geq (\frac{3}{2})^{n-3}(1 + \frac{3}{2}) \geq (\frac{3}{2})^{n-1}$

(c) Es gilt $q_1 = \frac{a_2}{a_1} = 1$ und

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= a_n + a_{n-1}\\
a_{n+2} &= a_n + a_{n+1}\\
\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} &= 1 + \frac{a_n}{a_{n+1}}\\
q_{n+1} &= 1 + \frac{1}{q_n}
\end{aligned}$$

4 Supremum, Maximum, Infimum, Minimum

4.1 Supremum einer Menge

Finden Sie das Supremum der Menge $M = \{x \in \mathbb{R} | x = 1 - \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$ Ist das Supremum auch ein Maximum ?
Lösung
Betrachtet man die Menge so sieht man das die Folge $1 - \frac{1}{n}$ gegen 1 konvergiert, somit ist 1 eine obere Schranke. Gäbe es eine obere Schranke s die kleiner als eins wäre, also $1 - \frac{1}{n} \leq s \forall n \in \mathbb{N} \leftrightarrow 1 - s \leq \frac{1}{n} \forall n \in \mathbb{N}$ Da s kleiner als 1 angenommen ist, ist die Differenz eine positive Zahl, jedoch konvergiert $\frac{1}{n}$ gegen null das heißt es existiert für jeden Abstand von $\frac{1}{n}$ zur null eine Zahl N sodass $\forall n \in \mathbb{N} \frac{1}{n}$ kleiner als diese Distanz ist. Dies steht aber im Widerspruch zur Ungleichung oben.

4.2 Supremum einer Menge und Induktion

Zeigen sie das das Supremum der Menge $D = \{\frac{n^2}{2^n} | n \in \mathbb{N}\}$, $\frac{9}{8}$ ist. Hinweis: Zeigen Sie das gilt $n^2 \leq 2^n \forall n \geq 4$ per Induktion
Lösung I.A. $4^2 = 8 = 2^4$
I.B.$n^2 \leq 2^n$
I.S. $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 \leq n^2 + 2n + 1 = n^2 + 3n \leq n^2 + n \cdot n = 2n^2 \leq +2^{n+1}$ Da für $n \geq 4$ gilt das 1 und 3 kleiner als n sind. Wir wissen das alle Elemente der Menge für $n \geq$ kleiner oder gleich 1 sind, die ersten drei Elemente der Menge sind $\frac{1^2}{2^1} = \frac{1}{2}$, $\frac{2^2}{2^2} = 1$ und $\frac{3^2}{2^3} = \frac{9}{8}$. Also ist eine Element $\frac{9}{8}$ und alle anderen kleiner oder gleich 1.

4.3 Supremum eine Funktion

Sei $f : (-1, 1) \mapsto \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x}{1-|x|}$ Entscheiden Sie ob f injektiv oder surjektiv oder bijektiv ? Gibt es eine inverse Funktion f^{-1}, falls ja geben Sie diese an. Zeichnen sie beide.
Lösung
Die Funktion ist antisymmetrisch($f(-x) = -f(x)$), deshalb können wir uns auf das Intervall $(0, 1)$ beschränken und schreiben f als $f : (0, 1) \mapsto \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x}{1-x}$

1. injektiv
   Wir nehmen an das es zwei Zahlen gibt $0 < x, \widetilde{x} < 1$

$$\frac{x}{1-x} = \frac{\widetilde{x}}{1-\widetilde{x}} \tag{12}$$

   Umgeformt

$$\frac{x}{\widetilde{x}} = \frac{1-x}{1-\widetilde{x}} \tag{13}$$

Wir nehmen ohne Beschränkung der Allgemeinheit an das, $\widetilde{x} < x$ Dann ist die linke Seite größer als 1 die linke Seite aber kleiner als 1. Damit haben wir einen Widerspruch also ist die Funktion injektiv.

2. surjektiv
   Wir bestimmen die Inversefunktion. $y = \frac{x}{1-x} \Leftrightarrow y(1-x) = x \Leftrightarrow x(1+y) = y \Leftrightarrow x = \frac{y}{1+y}$ Für jede Zahl $y \in (0, \inf)$ gibt es eine Zahl $x \in (0,1)$ das die obige Gleichung erfüllt. Darum ist die Funktion surjektiv.

3. bijektiv
   Die Funktion ist injektiv und surjektiv, und deswegen bijektiv. Die Inverse existiert für gesamt $\mathbb{R}$.