Blatt 1
Induktion, Supremum, Infimum, komplexe Zahlen

Jonas Habel, Florian Kollmannsberger

16. März 2018

1 Komplexe Zahlen

Geben sie die Zahlen als $a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und in Polardarstellung an.

1. $1 + i$
2. $\frac{1}{i}$
3. $(1 + i)^2$
4. $\sqrt{i}$
5. $\sqrt{-5 + 12i}$
6. $(1 + \frac{1}{i})^{-1}$
7. $(1 + i)e^{i\frac{\pi}{4}}$

Hinweis: Es hilft manchmal der Ansatz $\sqrt{x + iy} = u + iv$
Berechnen sie

1. $\ln(i)$, $\ln(1 + i)$, i^i

1.1 Einheitswurzel

Gegeben ist das Polynom $p(z) = z^7 - 1$

(a) Zeigen Sie die geometrische Summenformel $\displaystyle\sum_{i=0}^{m} z^i = \frac{z^{m+1} - 1}{z - 1}$ für $z \neq 1, n \in \mathbb{N}$

(b) Spalten sie den Faktor (z-1) ab.

(c) Finden sie die restlichen Nullstellen von p.

2 Injektiv, Surjektiv, Bijektiv

Entscheide durch Beweis oder Gegenbeispiel, ob die folgenden Funktionen injektiv surjektiv oder bijektiv sind.

(a) $f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}, n \mapsto n+1$

(b) $f : \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{Z}, n \mapsto n+1$

(c) $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}, (n,m) \mapsto n+m$

(d) $f : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \mapsto \mathbb{N}_0, (n,m) \mapsto n+m$

2.1 Bildmengen

Entscheiden Sie welche der folgenden Aussagen für die Mengen M,N und alle Abbildungen $f : M \mapsto N$ gelten. Geben sie jeweils einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.

(a) Für alle $X, Y \subset N$ gilt $f^{-1}(X \cup Y) = f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$

(b) Für alle $A \subset M$ gilt $f^{-1}(f(A)) = A$

(c) Wenn f surjektiv ist, so gilt $f^{-1}(f(A)) = A$ für alle $A \cup M$

3 Vollständige Induktion

Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion

(a) $4^n + 5$ ist für alle $n \in \mathbb{N}_0$ durch 3 teilbar.

(b) $4^n + 15n - 1$ ist für alle $n \in \mathbb{N}_0$ durch 9 teilbar. Hinweis nutzen sie (a).

(c) für $n \geq 2$ gilt $\prod_{k=2}^{n}(1 - \frac{1}{k}) = \frac{1}{n}$

(d) für $n \geq 2$ gilt $\prod_{k=2}^{n}(1 - \frac{k-1}{k}) = \frac{1}{n!}$

(e) $\forall n \in \mathbb{N} : (1+h)^n \geq 1 + nh$ falls $h \geq -1$

(f) $\forall n \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

3.1 Fibonacci Zahlen

Die Fibonacci-Zahlen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind rekursiv definiert durch

$$a_1 := 1, a_2 := 1, a_{n+1} := a_n + a_{n-1} \text{ für } (n \geq 2)$$

zeigen sie die folgenden Ausssagen

(a) $a_{n-1}a_{n+1} - a_n^2 = (-1)^n \forall n \geq 2$

(b) $(\frac{3}{2})^{n-2} \leq a_n \leq (\frac{5}{3})^{n-1} \forall n \geq 2$

(c) Die Quotientenfolge $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $q_n := \frac{a_{n+1}}{a_n}$ folgt der Formel

$$q_1 = 1, q_{n+1} = 1 + \frac{1}{q_n}(n \geq 2)$$

4 Supremum, Maximum, Infimum, Minimum

4.1 Supremum einer Menge

Finden Sie das Supremum der Menge $M = \{x \in \mathbb{R} | x = 1 - \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$ Ist das Supremum auch ein Maximum ?

4.2 Supremum einer Menge und Induktion

Zeigen sie das das Supremum der Menge $D = \{\frac{n^2}{2^n} | n \in \mathbb{N}\}$, $\frac{9}{8}$ ist. Hinweis: Zeigen Sie das gilt $n^2 \leq 2^n \forall n \geq 4$ per Induktion

4.3 Supremum eine Funktion

Sei $f : (-1, 1) \mapsto \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x}{1-|x|}$ Entscheiden Sie ob f injektiv oder surjektiv oder bijektiv ? Gibt es eine inverse Funktion f^{-1}, falls ja geben Sie diese an. Zeichnen sie beide.