Technische Universität München
Physik Department
Pablo Cova Farina, Claudia Nagel

Übungen zum Ferienkurs Ferienkurs Lineare Algebra für Physiker WiSe 2017/18
Probeklausur

Aufgabe 1: Wahr oder falsch? (9 Punkte)

Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch? Eine Begründung ist nicht notwendig. Jede korrekte Antwort gibt 1 Punkt, nicht beantwortete Fragen geben 0 Punkte und jede inkorrekte Antwort gibt -1 Punkte. Insgesamt erhalten Sie auf diese Aufgabe jedoch mindestens 0 Punkte.

(a) Wenn $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ gilt,

dann auch $\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $(\mathbb{Z}, \cdot)$ ist eine Gruppe.

(c) Sei $\phi : V \to V$ eine lineare Abbildung. Dann gilt: $0 \in \ker(\phi) \cap \operatorname{im}(\phi)$

(d) Sei V ein Vektorraum, U_1, U_2 Untervektorräume. Dann ist $U_1 \cup U_2$ ist ein UVR.

(e) Für alle Matrizen $A \in K^{n \times n}$ gilt: $\det(-A) = -\det(A)$

(f) Für alle Matrizen $A, B \in K^{n \times n}$ gilt: $\det(A) + \det(B) = \det(A + B)$

(g) Sei $V = \mathbb{R}^3$ und $A = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Dann ist $\langle v, w \rangle_A = v^\top A w$ ein Skalarprodukt.

(h) Spiegelungen im $\mathbb{R}^2$ haben Determinante -1.

(i) Eine Matrix, die nicht invertierbar ist, ist nilpotent.

Aufgabe 2: **Determinante** (8 Punkte)

Gegeben sei die Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & & \cdots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -\alpha_{n-1} \end{pmatrix} \in K^{n \times n}$$

Zeigen sie:

$$\det(A - tI_n) = (-1)^n (t^n + \alpha_{n-1} t^{n-1} + \cdots + \alpha_1 t + \alpha_0)$$

Aufgabe 3: **Gruppen** (6 Punkte) Sei

$$U := \{\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} | x \in \mathbb{R}\}.$$

Zeigen Sie:

(a) $\forall A, B \in U$ gilt $A \cdot B \in U$, wobei $\cdot$ die gewöhnliche Matrixmultiplikation ist.

(b) (U, $\cdot$) ist eine abelsche Gruppe.

Hinweis: Dass die Matrixmultiplikation assoziativ ist, darf ohne Beweis verwendet werden.

Aufgabe 4: Fixpunkt (9 Punkte)

Für eine lineare Abbildung $F : V \to V$ ist die Menge $\mathrm{Fix}(F)$ der *Fixpunkte* von F definiert durch:

$$\mathrm{Fix}(F) := \{v \in V : F(v) = v\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Fix}(F) \subset V$ ein Untervektorraum ist.

(b) Seien die lineare Abbildung $F : V \to V$ definiert durch

(i) $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, x \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot x,$

(ii) $F : \mathbb{R}[t] \to \mathbb{R}[t], P \mapsto P',$

(iii) $F : \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), f \mapsto f'.$

Bestimmen Sie jeweils eine Basis von $\mathrm{Fix}(F)$.

Aufgabe 5: Darstellungsmatrix und Eigenwerte (10 Punkte)

Gegeben sei die lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$;

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a_{11} - a_{12} & a_{12} + a_{21} \\ a_{21} + a_{22} & a_{22} - a_{11} \end{pmatrix}$$

(a) Finden Sie die zugehörige Darstellungsmatrix $D_B(\varphi)$ bezüglich der kanonischen Standardbasis des $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

Hinweis: Die kanonische Standardbasis des $\mathbb{R}^{2\times 2}$ lautet:

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(b) Berechnen Sie aus der Darstellungsmatrix das zugehörige charakteristische Polynom. Zeigen Sie, dass $\lambda = 0$ und $\lambda = 2$ Eigenwerte von $D_B(\varphi)$ sind.

(c) Nach Abspalten der ersten beiden Nullstellen nimmt das charakteristische Polynom die Form: $\chi = \lambda(\lambda - 2)(\lambda^2 - 2\lambda + 2)$. Ist die Matrix über $\mathbb{R}$ diagonalisierbar? Und über $\mathbb{C}$? Begründen Sie ihre Antwort.

Aufgabe 6: **Determinanten und Invertieren** (8 Punkte)

(a) Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie: $\det(A), \det(AA^\top), (\det(AA^\top)^{-1}), A^{-1}$

(b) Geben Sie die Inverse der Matrizen B und C an:

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2+3i \\ 2-3i & 4 \end{pmatrix} \text{ und } C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Viel Erfolg!