Technische Universität München
Physik Department
Pablo Cova Farina, Claudia Nagel

Übungen zum Ferienkurs Lineare Algebra für Physiker WiSe 2017/18

Übungsblatt 4- Lösung

Aufgabe 1: Jordan Normalform 1

Berechnen Sie jeweils eine Jordan-Normalform der folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 2 & -3 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Lösung:

(a) Das charakteristische Polynom lautet:

$$\chi_A = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ -2 & \lambda+3 & 2 \\ 1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda+3) + 2 + 2 - (\lambda+3) + 2\lambda + 2\lambda$$
$$= \lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 = (\lambda+1)^3$$

Die Matrix besitzt also nur den Eigenwert $\lambda = -1$ mit algebraischer Vielfachheit $m_a(-1) = 3$. Wir bestimmen jetzt die geometrische Vielfachheit:

$$A + I_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & .1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Somit lautet die geometrische Vielfachheit $m_g(-1) = 2$. Es gibt also 2 Jordan-Blöcke. Die Jordan-Normalform lautet:

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(b) Das charakteristische Polynom lautet:

$$\chi_B = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 & 1 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 0 & 1 & \lambda-2 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda-2)^2 + (\lambda-2)$$
$$= (\lambda-2)[\lambda^2 - 2\lambda + 1] = (\lambda-2)(\lambda-1)^2$$

Die Matrix besitzt also die Eigenwerte $\lambda_1 = 1$ mit algebraischer Vielfachheit $m_a(1) = 2$ und $\lambda_2 = 2$ mit algebraischer Vielfachheit $m_a(2) = 1$. Wir bestimmen jetzt die geometrische Vielfachheit von λ_1:

Bitte wenden...

$$B - I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Somit lautet die geometrische Vielfachheit $m_g(1) = 1$. Es gibt also einen Jordan-Block zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$. Die Jordan-Normalform lautet:

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(c) Das charakteristische Polynom lautet:

$$\chi_C = \begin{vmatrix} \lambda & 4 & 4 \\ 0 & \lambda & 1 \\ -2 & -4 & \lambda - 6 \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda - 6) - 8 + 8\lambda + 4\lambda$$

$$= \lambda^3 - 6\lambda^2 + 12\lambda - 8 = (\lambda - 2)(\lambda^2 - 4\lambda + 4) = (\lambda - 2)(\lambda - 2)(\lambda - 2) = (\lambda - 2)^3$$

Die Matrix besitzt also nur den Eigenwert $\lambda = 2$ mit algebraischer Vielfachheit $m_a(-1) = 3$. Wir bestimmen jetzt die geometrische Vielfachheit:

$$C - 2 \cdot I_3 = \begin{pmatrix} -2 & -4 & -4 \\ 0 & -2 & -1 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -2 & -4 & -4 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Somit lautet die geometrische Vielfachheit $m_g(2) = 1$. Es gibt also nur einen Jordan-Block zum Eigenwert $\lambda = 2$. Die Jordan-Normalform lautet:

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2: Jordan Normalform 2

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(a) Bestimmen sie zunächst alle Eigenwerte und deren algebraischen und geometrischen Vielfachheiten.

(b) Geben Sie die Jordan-Normalform diese Matrix an.

(c) Berechne die Basis der Räume $\mathrm{Ker}(A - \lambda I_4), \mathrm{Ker}(A - \lambda I_4)^2, \mathrm{Ker}(A - \lambda I_4)^3$ zum Eigenwert $\lambda = 1$.

Lösung

(a) Das charakteristische Polynom lässt sich einfach aufstellen, da die Matrix A eine obere Dreiecksmatrix ist. Es lautet:

$$\chi_A = (\lambda - 1)^3(\lambda + 1)$$

Somit sind $\lambda_1 = 1$ mit $m_a(1) = 3$ und $\lambda_2 = -1$ mit $m_a(-1) = 1$. Die geometrische Vielfachheit von λ_2 ist $m_g(-1) = 1$.Für $\lambda_1 = 1$ berechnen wir den Eigenraum:

$$A - I_4 = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Die geometrische Vielfachheit ist dann $m_g(1) = 1$. Es gibt also einen einzigen Jordan-Block zum Eigenwert $\lambda = 1$.

(b)

Die Jordan-Normalform dieser Matrix lautet:

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(c) Für den Eigenraum finden wir $E_1 = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$. Also ist $B_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ eine Basis davon. Wir berechnen die restlichen Räume:

$$(A - I_4)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Hier gilt also $Ker(A - \lambda I_4)^2 = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$.

$$(A - I_4)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hier gilt also $Ker(A - \lambda I_4)^3 = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$.

Aufgabe 3: Jordan Normalform 3

Bestimmen Sie für die Matrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Ihre Jordan-Normalform S.

(b) Die zugehörigen Transformationsmatrix S.

(c) Überprüfen Sie, dass $A = SJS^{-1}$.

Lösung

(a) Die Mtatrix hat das charakteristisches Polynom:

$$\chi_A = (\lambda - 1)^3$$

Der zugehörige Eigenraum lässt sich berechnen:

$$Ker(A - I_3) = Ker\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$$

Die geometrische Vielfachheit ist somit $m_g(1) = 1$. Wir haben also ein einziges Jordan-Block mit Länge 3, also:

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b)

Um S zu berechnen, benötigen wir die Jordanbasis. Wir stellen erstmal die Räume $E_1^{(2)}$ und $E_1^{(3)}$.

$$(A - I_3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow E_1^{(2)} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$$

$$(A - I_3)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow E_1^{(2)} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$$

Wir wählen als Basisvektor v_3 denjenigen, der in $E_1^{(3)}$, aber nicht in $E_1^{(2)}$ liegt, also $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Nun berechnen wir die restlichen Basisvektoren:

$$v_2 = Av_3 - \lambda v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v_1 = Av_2 - \lambda v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Also hätten wir für die Basiswechselmatrix:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Invertieren liefert:

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(c)

Jetzt sind wir in der Lage, die Formel zu überprüfen:

$$SJS^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A$$

Aufgabe 4: Skalarprodukte Zeigen Sie, dass der durch die Matrix U induzierte Endomorphismus unitär ist:
U= $\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}i\sqrt{2} \\ -\frac{1}{2}i\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}$

Lösung:
Wir müssen also zeigen, dass $U\overline{U}^\top = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Zufälligerweise (Achtung, das ist nicht immer so!) ist $U = \overline{U}^\top$. Also rechnen wir leicht nach:

$$U\overline{U}^\top = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}i\sqrt{2} \\ -\frac{1}{2}i\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}i\sqrt{2} \\ -\frac{1}{2}i\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 5: Skalarprodukte
Beweisen Sie den Kosinussatz: Sei ABC ein beliebiges Dreieck mit a, b, c die jeweils den Ecken gegenüberliegenden Seiten und α, β, γ den dazugehörigen Winkeln. Dann gilt:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma$$

Beweis
Wir befinden uns in einem euklidischen Raum, können also mit Vektoren und dem Standardskalarprodukt arbeiten. Wir fassen die Seiten des Dreiecks als Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ auf, wobei

$|\vec{a}| = a, |\vec{b}| = b, |\vec{c}| = c$ und

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$$

gilt. Im euklidischen Raum gilt weiterhin für alle γ:

$$\cos\gamma = \frac{\langle -\vec{a}, \vec{b}\rangle}{|| -\vec{a}|| \cdot ||\vec{b}||} = \frac{\langle -\vec{a}, \vec{b}\rangle}{a \cdot b} \Leftrightarrow \langle \vec{a}, \vec{b}\rangle = -a \cdot b \cdot \cos\gamma$$

$$\Rightarrow c^2 = |\vec{c}|^2 = |-\vec{b} - \vec{a}|^2 = |\vec{b} + \vec{a}|^2 = \langle \vec{b} + \vec{a}, \vec{b} + \vec{a}\rangle = \langle \vec{b}, \vec{b}\rangle + \langle \vec{a}, \vec{a}\rangle + 2\langle \vec{a}, \vec{b}\rangle = \langle \vec{b}, \vec{b}\rangle + \langle \vec{a}, \vec{a}\rangle - 2ab\cos\gamma$$

Aufgabe 6: Darstellungsmatrizen von Skalarprodukten

Können die folgenden Matrizen die Darstellungsmatrizen von Skalarprodukten sein? Wir definieren dabei die Skalarprodukte jeweils als $\langle v, w\rangle_A = v^\intercal A w$, bzw. $\langle v, w\rangle_A = \bar{v}^\intercal A w$. Geben Sie an, welches Axiom verletzt ist, falls eines verletzt ist. Ansonsten beweisen Sie, dass die Matrix ein Skalarprodukt darstellt.

(a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(b) $A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

(d) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Gl}_3(\mathbb{R})$

Lösung:

Die Bilinearität ist in allen Fällen gegeben, da $\langle v, w\rangle_A = v^\intercal A w$, bzw. $\langle v, w\rangle_A = \bar{v}^\intercal A w$ immer bilinear ist, wenn A eine Matrix ist, d.h. eine lineare Abbildung darstellt, denn $\langle \lambda v, w\rangle_A = \lambda v^\intercal A w = \lambda \langle v, w\rangle_A$

$\langle \lambda v + u, w\rangle_A = (v + u)^\top A w = v^\top A w + u^\top A w = \langle v, w\rangle_A + \langle u, w\rangle_A$

(a) A ist nicht die Darstellungsmatrix eines Skalarproduktes, da $\langle e_1, e_1\rangle = 0$, aber $e_1 \neq 0$, also SP3 verletzt.

(b) A ist nicht symmetrisch, also SP2 verletzt.

(c) Das größte Element der Matrix steht nicht auf der Diagonalen. Zum Beispiel gilt für $v = (1, -1, 0) : \langle v, v\rangle = -7 < 0$.

(d) SR1, SR2 sind erfüllt. SR3: Sei $v \in \mathbb{R}^3$ beliebig mit $v = (v_1, v_2, v_3)^\top$.
Dann gilt: $\langle v, v\rangle_A = v^\intercal A v = ... = (v_1 + v_2)^2 + (v_2 + v_3)^2 + (v_3 + v_1)^2 > 0$ für $v \neq 0$.

Aufgabe 7: Orthogonale Zerlegung

Diese Formel haben wir im Vortrag nicht besprochen. Die Lösung ist hier nur der

Vollständigkeit halber.
Zerlegen Sie $v = (1,2,3)^\top$ entlang des Vektors $a = (1,0,1)$.

Lösung:
Mit den Formel aus dem Skript: $\langle v, a\rangle = 4$ und $\langle a, a\rangle = 2$:

$$v_a = \frac{4}{2}(1,0,1)^\top \text{ und } v_a = (1,2,3)^\top - (2,0,2)^\top = (-1,2,1)^\top$$

Aufgabe 8: Orthogonale Abbildungen
Sei $\phi_A : V \to V, v \mapsto A \cdot v$ eine orthogonale Abbildung, d.h. es gilt: $\langle \phi_A(v), \phi_A(w)\rangle = \langle v, w\rangle$ bezüglich des Standardskalarproduktes. Zeigen Sie, dass $A^{-1} = A^\top$.

Lösung:
$\langle \phi_A(v), \phi_A(w)\rangle = \langle Av, Aw\rangle = (Av)^\top \cdot (Aw) = v^\top A^\top Aw \overset{!}{=} v \top w = \langle v, w\rangle \Leftrightarrow A^\top A \overset{!}{=} I_n$
$\Rightarrow A^\top = A^{-1}$

Aufgabe 9: hermitesche Form
Sei $V = \mathbb{C}^n$ mit komplexem Standard-Skalarprodukt $\langle \quad , \quad \rangle$, wobei
$\langle v, w\rangle = \bar{v}^\top w$. Sei A eine hermitesche Matrix, d.h. $A = \bar{A}^\top$. Seien λ_i Eigenwerte von A mit u_i zugehörigen Eigenvektoren.
Zeigen Sie, dass gilt:

(a) $\langle Av, w\rangle = \langle v, Aw\rangle$.

(b) $\lambda_i \in \mathbb{R} \quad \forall i$, d.h. alle Eigenwerte von A sind reell. (Hinweis: Verwende (a))

(c) Für $\lambda_i \neq \lambda_j$ gilt: $\langle u_i, u_j\rangle = 0$. (Hinweis: Verwende (a))

Hinweis: Es gilt: $(\bar{A}\bar{v})^\top = \bar{v}^\top \bar{A}^\top$

Lösung:

(a) $\langle Av, w\rangle = (\bar{A}\bar{v}) \top w = \bar{v}^\top \bar{A}^\top w = \bar{v}^\top Aw = \langle v, Aw\rangle$.

(b) Sei u_i der zu λ_i gehörende Eigenvektor. Dann gilt: $\langle Au_i, u_i\rangle = \langle \lambda_i u_i, u_i\rangle = \bar{\lambda}\langle u_i, u_i\rangle = \langle u_i, Au_i\rangle = \lambda\langle u_i, u_i\rangle \Rightarrow \bar{\lambda} = \lambda \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$

(c) $\langle Au_i, u_j\rangle = \langle \lambda_i u_i, u_j\rangle = \lambda_i\langle u_i, u_j\rangle = \langle u_i, Au_j\rangle = \langle u_i, \lambda_j u_j\rangle = \lambda_j\langle u_i, u_j\rangle$
$\Rightarrow (\lambda_i - \lambda_j)\langle u_i, u_j\rangle = 0$.
Da $(\lambda_i - \lambda_j) \neq 0$ folgt $\langle u_i, u_j\rangle$.

Aufgabe 10: Gram-Schmidt-Verfahren
(Beispiel aus dem Skript von Prof. Kemper)
Bestimmen Sie mit dem Gram-Schmidt-Verfahren eine Orthonormalbasis von:

$$V := \left\langle \begin{pmatrix}3\\0\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} \right\rangle \subseteq \mathbb{R}^3$$

Bitte wenden...

Lösung:
Wir erhalten

$$w_1 = v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad u_1 = \frac{1}{||w_1||} \cdot w_1 = \begin{pmatrix} 3/5 \\ 0 \\ 4/5 \end{pmatrix}.$$

Im zweiten Schritt erhalten wir

$$w_2 = v_2 - \langle u_1, v_2 \rangle \cdot u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{3}{5} \cdot \begin{pmatrix} 3/5 \\ 0 \\ 4/5 \end{pmatrix} = \frac{1}{25} \cdot \begin{pmatrix} 16 \\ 0 \\ -12 \end{pmatrix}$$

und

$$u_2 = \frac{1}{||w_2||} \cdot w_2 = \begin{pmatrix} 4/5 \\ 0 \\ -3/5 \end{pmatrix}.$$

Der dritte Schritt liefert

$$w_3 = v_3 - \langle u_1, v_3 \rangle \cdot u_1 - \langle u_2, v_3 \rangle \cdot u_2 =$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{11}{5} \cdot \begin{pmatrix} 3/5 \\ 0 \\ 4/5 \end{pmatrix} + \frac{2}{5} \cdot \begin{pmatrix} 4/5 \\ 0 \\ -3/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Also ist $\{u_1, u_2\}$ eine Orthonormalbasis von V.

Bemerkung: In diesem Fall kann man auch sehen, dass wir eine linear abhängige Menge von Vektoren haben und eine Orthonormalbasis von

$$V := \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle \subseteq \mathbb{R}^3$$

bestimmen müssen. Natürlich tut es auch $\{e_1, e_3\}$