Übungen zum Ferienkurs
Blatt 4

Aufgabe 1: Jordan Normalform 1

Berechnen Sie jeweils eine Jordan-Normalform der folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 2 & -3 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2: Jordan Normalform 2

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(a) Bestimmen sie zunächst alle Eigenwerte und deren algebraischen und geometrischen Vielfachheiten.

(b) Geben Sie die Jordan-Normalform diese Matrix an.

(c) Berechne die Basis der Räume $\mathrm{Ker}(A - \lambda I_4), \mathrm{Ker}(A - \lambda I_4)^2, \mathrm{Ker}(A - \lambda I_4)^3$ zum Eigenwert $\lambda = 1$.

Aufgabe 3: Jordan Normalform 3

Bestimmen Sie für die Matrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Ihre Jordan-Normalform S.

(b) Die zugehörigen Transformationsmatrix S.

(c) Überprüfen Sie, dass $A = SJS^{-1}$.

Aufgabe 4: Skalarprodukte Zeigen Sie, dass der durch die Matrix U induzierte Endomorphismus unitär ist:

U= $\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}i\sqrt{2} \\ -\frac{1}{2}i\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}$

Aufgabe 5: Skalarprodukte
Beweisen Sie den Kosinussatz: Sei ABC ein beliebiges Dreieck mit a, b, c die jeweils den Ecken gegenüberliegenden Seiten und α, β, γ den dazugehörigen Winkeln. Dann gilt:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma$$

Aufgabe 6: Darstellungsmatrizen von Skalarprodukten
Können die folgenden Matrizen die Darstellungsmatrizen von Skalarprodukten sein? Wir definieren dabei die Skalarprodukte jeweils als $\langle v, w\rangle_A = v^\intercal A w$, bzw. $\langle v, w\rangle_A = \bar{v}^\intercal A w$. Geben Sie an, welches Axiom verletzt ist, falls eines verletzt ist. Ansonsten beweisen Sie, dass die Matrix ein Skalarprodukt darstellt.

(a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(b) $A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

(d) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Gl}_3(\mathbb{R})$

Aufgabe 7: Orthogonale Zerlegung Zerlegen Sie $v = (1, 2, 3)^\top$ entlang des Vektors $a = (1, 0, 1)$.

Aufgabe 8: Orthogonale Abbildungen
Sei $\phi_A : V \to V, v \mapsto A \cdot v$ eine orthogonale Abbildung, d.h. es gilt: $\langle \phi_A(v), \phi_A(w)\rangle = \langle v, w\rangle$ bezüglich des Standardskalarproduktes. Zeigen Sie, dass $A^{-1} = A^\top$.

Aufgabe 9: hermitesche Form
Sei $V = \mathbb{C}^n$ mit komplexem Standard-Skalarprodukt $\langle\ \ ,\ \ \rangle$, wobei
$\langle v, w\rangle = \bar{v}^\top w$. Sei A eine hermitesche Matrix, d.h. $A = \bar{A}^\top$. Seien λ_i Eigenwerte von A mit u_i zugehörigen Eigenvektoren.
Zeigen Sie, dass gilt:

(a) $\langle Av, w\rangle = \langle v, Aw\rangle$.

(b) $\lambda_i \in \mathbb{R} \quad \forall i$, d.h. alle Eigenwerte von A sind reell. (Hinweis: Verwende (a))

(c) Für $\lambda_i \neq \lambda_j$ gilt: $\langle u_i, u_j\rangle = 0$. (Hinweis: Verwende (a))

Hinweis: Es gilt: $(\bar{A}\bar{v})^\top = \bar{v}^\top \bar{A}^\top$

Aufgabe 10: Gram-Schmidt-Verfahren
(Beispiel aus dem Skript von Prof. Kemper)
Bestimmen Sie mit dem Gram-Schmidt-Verfahren eine Orthonormalbasis von:

$$V := \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle \subseteq \mathbb{R}^3$$