Technische Universität München
Physik Department
Pablo Cova Fariña, Claudia Nagel

Übungen zum Ferienkurs Ferienkurs Lineare Algebra für Physiker WiSe 2017/18
Blatt 3 - Lösung

Aufgabe 1: Darstellungsmatrizen

Sei $V = \mathbb{R}^3$ und die Ebene H definiert durch $x+y+z=0$. Sei f die Spiegelung an H. Schreiben Sie die Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis $\mathcal{S} = (e_1, e_2, e_3)$ und bezüglich der Basis

$$\mathcal{B} = \{v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$$

Hinweis: $v_1, v_2 \in H$ und v_3 steht senkrecht auf H.

Lösung:

Wir beginnen mit Basis $\mathcal{B}$ und überlegen uns, was mit den Basisvektoren passiert, wenn wir den $\mathbb{R}^3$ an H spiegeln:

$$f(v_1) = v_1, f(v_2) = v_2, f(v_3) = -v_3 \Rightarrow D_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Es ist ungleich komplizierter (wenn auch nicht unmöglich), die Abbildung der Standardbasis auf ähnliche Weise zu bestimmen. Besser ist, wir führen einen Basiswechsel durch.

Schritt 1: Wir berechnen die Basiswechselmatrix, mit der wir von $\mathcal{S}$ nach $\mathcal{B}$ kommen. Das heißt, wir müssen eine Abbildung finden mit $e_1 \mapsto v_1, e_2 \mapsto v_2, e_3 \mapsto v_3$. Dies wird durch die folgende Matrix erreicht:

$$M_{\mathcal{S},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Schritt 2: Nun invertieren wir diese Matrix (siehe Blatt 2, Aufgabe 1b)

$$M_{\mathcal{S},\mathcal{B}}^{-1} = M_{\mathcal{B},\mathcal{S}} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Schritt 3: ...und stellen die Abbildung in der neuen Basis dar (Berechnung siehe Blatt 1):

$$D_{\mathcal{S}}(f) = M_{\mathcal{S},\mathcal{B}} \cdot D_{\mathcal{B}}(f) \cdot M_{\mathcal{B},\mathcal{S}}$$

$$D_{\mathcal{S}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Bitte wenden...

Aufgabe 2: Darstellungsmatrizen

(a) Sei $V = \mathbb{R}^2$ mit der Standardbasis. Stellen Sie die Rotation um den Winkel ϕ als Matrix dar.

(b) Sei $V = \mathbb{R}^3$ mit der Standardbasis. Stellen Sie jeweils die Rotationen um die x-Achse, um die y-Achse und um die z-Achse mit Winkel ϕ als Matrix dar.

(c) Sei $V = \mathbb{R}^2$. Stellen Sie die Spiegelung an der Geraden $y = -x$ als Matrix bezüglich der Standardbasis dar. Stellen Sie dieselbe Abbildung auch bezüglich einer anderen Basis dar, sodass die Matrix eine besonders einfache Form hat.

(d) $V = \mathbb{R}^3$ mit der Standardbasis. Stellen Sie die Rotation um den Vektor $(1, 1, 1)$ um $120°$ dar.

(e) $V = \mathbb{R}^5$ mit einer beliebigen Basis $\mathcal{B} = \{v_1, ..., v_5\}$. Stellen Sie eine Matrix auf, die drei der fünf Basisvektoren permutiert und die anderen beiden fest lässt.

Lösung:

(a) $\begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$

(b) $\mathrm{R}_x(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}, \mathrm{R}_y(\phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi & 0 & \sin\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\phi & 0 & \cos\phi \end{pmatrix}, \mathrm{R}_z(\phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(c) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.
Sei nun $\mathcal{B} = \{(1, 1), (-1, 1)\}$ eine zweite Basis. Dann ist die Darstellungsmatrix von ϕ bezüglich $\mathcal{B}$: $\mathrm{D}_{\mathcal{B}}(\phi) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(d) Hier ist der Trick zu erkennen, dass in der Draufsicht aus Richtung $(1, 1, 1)$ die Endpunkte der Einheitsvektoren ein gleichseitiges Dreieck bilden und die Rotation um $120°$ die Basisvektoren folgendermaßen abbildet: $e_1 \mapsto e_2$, $e_2 \mapsto e_3$, $e_3 \mapsto e_1$. Die Matrix hat also die Form:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(e) z.B.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3: Determinanten

Berechnen Sie die Anzahl der Fehlstände von $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 3 & 7 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ und schließen Sie auf das Signum.
Denken Sie sich zwei weitere Beispiele selbst aus, lösen sie und tauschen mit der Person neben Ihnen.

Lösung: 11, wenn ich mich nicht verzählt habe. Das Signum ist also -1.

Aufgabe 4: Determinantenberechnung.

- Berechnen Sie die Determinante von

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

  mithilfe des Entwicklungssatzes von Laplace.
- Berechnen Sie die die Determinante von

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Berechnen Sie die Determinante von

$$C = \begin{pmatrix} \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & a\sin(\alpha) & b\cos(\alpha) & ab \\ -\cos(\alpha) & \sin(\alpha) & a\sin(\alpha) & b\cos(\alpha) & ab \\ 0 & 0 & 1 & a^2 & b^2 \\ 0 & 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & -b & a \end{pmatrix}$$

Lösung:

- $\det(A) = 0 \cdot \det \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} - 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} + 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$
  $= -(3 \cdot 8 - 6 \cdot 5) + 2 \cdot (3 \cdot 7 - 6 \cdot 4) = 6 - 6 = 0.$
- 4
- Mit dem Kriterium für Blockdiagonale Matrizen: $\begin{pmatrix} \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \\ -\cos(\alpha) & \sin(\alpha) \end{pmatrix} \cdot \det(1) \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$

Aufgabe 5: Determinanten

Zeigen oder widerlegen Sie mittels Beispiel:

$$\det(\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}) = \det(A)\det(D) - \det(B)\det(C)$$

Lösung:

Die Aussage ist falsch: Sei $A = B = D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Dann gilt

$$\det(\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}) = 0 \neq 1 = \det(A)\det(D) - \det(B)\det(C).$$

Aufgabe 6: Determinanten

Das **Invertierbarkeitskriterium** für Matrizen lautet:

$$A \in K^{nxn} \text{ invertierbar } \iff \det(A) \neq 0$$

Begründen Sie das Invertierbarkeitskriterium für Matrizen (z.B. mittels elementarer Zeilen- und Spaltenumformungen).

Lösung:

Durch elementare Zeilen- und Spaltenumformungen bringen wir A auf Zeilenstufenform:

$$A \to A' = \begin{pmatrix} a_{11} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix},$$

Um Zeilen-Stufenform zu erreichen, müssen wir Zeilen vertauschen und voneinander abziehen/zueinander addieren. Beides bewirkt maximal, dass das Vorzeichen der Determinante sich ändert: $\det(A') = \pm\det(A)$. Daher gilt:

$$\det(A) \neq 0 \iff \det(A') \neq 0 \iff a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn} \neq 0 \iff \text{A hat vollen Rang} \iff \text{A ist invertierbar}$$

Aufgabe 7: Determinanten ähnlicher Matrizen Zwei Matrizen $A, B \in K^{n\times n}$ seien ähnlich. Beweisen Sie, dass dann gilt:

$$\det(A) = \det(B).$$

Lösung:

Wir haben $B = S^{-1}AS$ mit $S \in$GL$L_n(K)$. Es folgt

$$\det(B) = \det(S)^{-1}\det(A)\det(S) = \det(A).$$

Aufgabe 8: Ein paar Beweise zu Eigenwerten

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Zeigen Sie:

(a) Ist A nicht invertierbar, so ist $\lambda = 0$ ein Eigenwert von A.

(b) Ist $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ ein Eigenwert von A, so ist $\frac{1}{\lambda}$ ein Eigenwert von A^{-1}.

(c) Ist A nilpotent (also es existiert ein $n \in \mathbb{N}$, ab dem $A^n = 0$ gilt), so ist $\lambda = 0$ der einzige Eigenwert von A.

Lösung

(a) Eigenwerte sind Nullstellen des charakteristisches Polynom $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$. Für $\lambda = 0$ ist $\chi_A(0) = \det(A)$. Aber da A nicht invertierbar ist, ist auch $\det(A) = 0$. Somit ist auch $\chi_A(0) = 0$, was bedeutet, dass $\lambda = 0$ Nullstelle von χ_A ist, und somit ein Eigenwert.

$\square$

(b) Es sei zunächst λ ein Eigenwert von A, d.h. $Av = \lambda v$. Dann gilt:

$$Av = \lambda v \Rightarrow A^{-1}Av = A^{-1}\lambda v \Rightarrow I_n v = A^{-1}\lambda v \Rightarrow A^{-1}v = \frac{1}{\lambda}v$$

$\square$

(c) Es sei zunächst λ ein Eigenwert von A, d.h. $Av = \lambda v$. Sei $n \in \mathbb{N}$ der Exponent, ab dem $A^n = 0$ gilt. Nach mehrmaliger Anwendung von A auf diese Gleichung, finden wir:

$$\begin{aligned} A^2 v &= A \cdot Av = A \cdot (\lambda v) = \lambda \cdot (Av) = \lambda^2 v \\ \Rightarrow A^n v &= \lambda A^{n-1} v = \cdots = \lambda^n v \end{aligned}$$

Aber $A^n = 0$, sodass $0 = \lambda^n v$ für $v \neq 0$. Hieraus folgt unmittelbar, dass $\lambda = 0$ der einzige Eigenwert von A ist.

Aufgabe 9: Eigenwerte 1

Bestimmen Sie das charakteristische Polynom und die Eigenwerte der folgenden Matrix. Ist die Matrix diagonalisierbar?

$$\text{(a) } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

Lösung

Das charakteristische Polynom lautet:

$$\chi_A = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(3-\lambda)(3-\lambda) + (3-\lambda)$$

$$(3-\lambda)[(1-\lambda)(3-\lambda)+1] = (3-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 4) = (3-\lambda)(2-\lambda)^2$$

Die Eigenwerte lauten $\lambda_1 = 3$ und $\lambda_2 = 2$. Da die algebraische Vielfacheit von λ_2 gleich 2 ist, muss man die geometrische Vielfachheit bestimmen. Damit gilt:

$$\begin{aligned} \dim(E_2) &= \dim\left(\ker\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \dim\left(\ker\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right) \\ &= \dim\left(\ker\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \dim\langle\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\rangle = 1 \end{aligned}$$

Somit ist $m_g(2) = 1 < 2 = m_a(2)$, und die Matrix ist nicht diagonalisierbar.

Aufgabe 10: Eigenwerte 2

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 2a & b & a \\ 10 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

mit $a, b \in \mathbb{R}$. Für welche Werte von a und b ist A diagonalisierbar?

Lösung

Eine Matrix ist dann diagonalisierbar, wenn das charakteristische Polynom in Linearfaktoren zerfällt und für jedes Eigenwert die algebraische und die geometrische Vielfachheit gleich sind. Berechnen wir also zunächst das charakteristische Polynom:

$$\chi_A = \begin{vmatrix} -3-\lambda & 0 & 0 \\ 2a & b-\lambda & a \\ 10 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (-3-\lambda)\cdot(b-\lambda)\cdot(2-\lambda)$$

Für $b \in \mathbb{R}\backslash\{-3, 2\}$ und $a \in \mathbb{R}$ haben alle Eigenwerte die Vielfachheit 1, also ist die Matrix diagonalisierbar. Es gibt also noch zwei Fälle zu überprüfen:

- $b = -3$. Hier ist $\chi_A = (-3-\lambda)^2 \cdot (2-\lambda)$. Hier hat $\lambda_1 = -3$ die algebraische Vielfachheit $m_a(\lambda) = 2$. Wir müssen also noch die Dimension des Eigenraums zu $\lambda_1 = -3$ bestimmen.

$$A + 3I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2a & 0 & a \\ 10 & 0 & 5 \end{pmatrix} \underset{\frac{1}{5}\cdot\mathrm{III}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2a & 0 & a \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  Für jedes $a \in \mathbb{R}$ sind Zeilen II und III Vielfache voneinander, also ist der rang $= 1$. Dann gilt $\dim(E_1) = m_g(\lambda) = 2$ für alle $a \in \mathbb{R}$. Da also stets $m_a(\lambda) = m_g(\lambda)$ gilt, ist auch die Matrix in diesem Fall diagonalisierbar.

- $b = 2$. Hier ist $\chi_A = (-3-\lambda)\cdot(2-\lambda)^2$. Hier hat $\lambda_2 = 2$ die algebraische Vielfachheit $m_a(\lambda) = 2$. Wir müssen also noch die Dimension des Eigenraums zu $\lambda_2 = 2$ bestimmen.

$$A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 2a & 0 & a \\ 10 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{\frac{-1}{5}\cdot\mathrm{I}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2a & 0 & a \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{II}-2a\cdot\mathrm{I},\mathrm{III}-2\cdot\mathrm{I}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  Hier ist also $\dim(E_1) = 1 < m_a(\lambda)$ für alle $a \neq 0$ und die Matrix ist somit nicht diagonalisierbar. Für $a = 0$ gilt aber $\dim(E_1) = 2 = m_a(\lambda)$.

Zusammenfassend kann man sagen: Die Matrix A ist immer diagonalisierbar, außer es gilt gleichzeitig $b = 2$ und $a \neq 0$.

Aufgabe 11: Eigenwerte 3

Bestimmen Sie für die Matrix

$$\text{(b) } A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ihre Diagonalmatrix D, sowie die Basiswechselmatrix S. Invertieren Sie S und überprüfen Sie die Formel $A = SDS^{-1}$.

Lösung

Das charakteristische Polynom von A lautet:

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = i, \lambda_2 = -i$$

Da beide Eigenwerte die algebraische Vielfachheit 1 haben, so ist A diagonalisierbar. Die Diagonalmatrix lautet dann:

$$D = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

Nun bestimmen wir die Eigenvektoren. Wir bilden die Eigenräume:

$$E_i = Ker \begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \underset{\text{II}-i\cdot\text{I}}{=} Ker \begin{pmatrix} -i & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \rangle$$

$$E\_i = Ker \begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix} \underset{\text{II}+i\cdot\text{I}}{=} Ker \begin{pmatrix} i & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \rangle$$

Somit haben wir als Basiswechselmatrix die Matrix:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}$$

Invertieren liefert:

$$S^{-1} = \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} i & -1 \\ i & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix}$$

Jetzt können die Formel $A = SDS^{-1}$ explizit bestimmen:

$$SDS^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A$$