Technische Universität München
Physik Department
Pablo Cova Fariña, Claudia Nagel

Übungen zum Ferienkurs Ferienkurs Lineare Algebra für Physiker WiSe 2017/18 Blatt 3

Aufgabe 1: Darstellungsmatrizen

Sei $V = \mathbb{R}^3$ und die Ebene H definiert durch $x + y + z = 0$. Sei f die Spiegelung an H. Schreiben Sie die Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis $\mathcal{S} = (e_1, e_2, e_3)$ und bezüglich der Basis

$$\mathcal{B} = \{v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$$

Hinweis: $v_1, v_2 \in H$ und v_3 steht senkrecht auf H.

Aufgabe 2: Darstellungsmatrizen

(a) Sei $V = \mathbb{R}^2$ mit der Standardbasis. Stellen Sie die Rotation um den Winkel ϕ als Matrix dar.

(b) Sei $V = \mathbb{R}^3$ mit der Standardbasis. Stellen Sie jeweils die Rotationen um die x-Achse, um die y-Achse und um die z-Achse mit Winkel ϕ als Matrix dar.

(c) Sei $V = \mathbb{R}^2$. Stellen Sie die Spiegelung an der Geraden $y = -x$ als Matrix bezüglich der Standardbasis dar. Stellen Sie dieselbe Abbildung auch bezüglich einer anderen Basis dar, sodass die Matrix eine besonders einfache Form hat.

(d) $V = \mathbb{R}^3$ mit der Standardbasis. Stellen Sie die Rotation um den Vektor $(1, 1, 1)$ um $120°$ dar.

(e) $V = \mathbb{R}^5$ mit einer beliebigen Basis $\mathcal{B} = \{v_1, ..., v_5\}$. Stellen Sie eine Matrix auf, die drei der fünf Basisvektoren permutiert und die anderen beiden fest lässt.

Aufgabe 3: Determinanten

Berechnen Sie die Anzahl der Fehlstände von $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 3 & 7 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ und schließen Sie auf das Signum.
Denken Sie sich zwei weitere Beispiele selbst aus, lösen sie und tauschen mit der Person neben Ihnen.

Bitte wenden...

Aufgabe 4: Determinantenberechnung

- Berechnen Sie die Determinante von

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

  mithilfe des Entwicklungssatzes von Laplace.
- Berechnen Sie die die Determinante von

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Berechnen Sie die Determinante von

$$C = \begin{pmatrix} \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & a\sin(\alpha) & b\cos(\alpha) & ab \\ -\cos(\alpha) & \sin(\alpha) & a\sin(\alpha) & b\cos(\alpha) & ab \\ 0 & 0 & 1 & a^2 & b^2 \\ 0 & 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & -b & a \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5: Determinanten
Zeigen oder widerlegen Sie mittels Beispiel:

$$\det(\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}) = \det(A)\det(D) - \det(B)\det(C)$$

Aufgabe 6: Determinanten
Das **Invertierbarkeitskriterium** für Matrizen lautet:

$$A \in K^{nxn} \text{ invertierbar} \iff \det(A) \neq 0$$

Begründen Sie das Invertierbarkeitskriterium für Matrizen (z.B. mittels elementarer Zeilen- und Spaltenumformungen).

Aufgabe 7: Determinanten ähnlicher Matrizen Zwei Matrizen $A, B \in K^{n\times n}$ seien ähnlich. Beweisen Sie, dass dann gilt:

$$\det(A) = \det(B).$$

Aufgabe 8: Ein paar Beweise zu Eigenwerten

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Zeigen Sie:

(a) Ist A nicht invertierbar, so ist $\lambda = 0$ ein Eigenwert von A.

(b) Ist $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ ein Eigenwert von A, so ist $\frac{1}{\lambda}$ ein Eigenwert von A^{-1}.

(c) Ist A nilpotent (also es existiert ein $n \in \mathbb{N}$, ab dem $A^n = 0$ gilt), so ist $\lambda = 0$ der einzige Eigenwert von A.

Aufgabe 9: Eigenwerte 1

Bestimmen Sie das charakteristische Polynom und die Eigenwerte der folgenden Matrix. Ist die Matrix diagonalisierbar?

$$\text{(a) } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

Aufgabe 10: Eigenwerte 2

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 2a & b & a \\ 10 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

mit $a, b \in \mathbb{R}$. Für welche Werte von a und b ist A diagonalisierbar?

Aufgabe 11: Eigenwerte 3

Bestimmen Sie für die Matrix

$$\text{(b) } A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ihre Diagonalmatrix D, sowie die Basiswechselmatrix S. Invertieren Sie S und überprüfen Sie die Formel $A = SDS^{-1}$.