Technische Universität München
Physik Department
Pablo Cova Fariña, Claudia Nagel

Übungen zum Ferienkurs Ferienkurs Lineare Algebra für Physiker WiSe 2017/18

Übungsblatt 2- Lösung

Aufgabe 1: Lineare Unabhängigkeit 1

Bestimmen Sie in den folgenden Fällen, ob die Vektoren im Vektorraum $\mathbb{R}^3$ bzw. $\mathbb{R}^4$ linear abängig oder linear unabhängig sind. Erzeugen Sie den gesamten Vektorraum?

(a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ (b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$

(c) $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ (d) $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

Lösung

Wir bilden für jede Aufgaben die Matrix $A := (v_1|v_2|\cdots|v_n)$ mit den v_i als Spalten. Die Vektoren sind linear unabhängig, falls $\mathrm{rg}(A) = n$ gilt. Um den Rang von A zu finden, bringen wir die Matrix auf Zeilenstufenform.

(a)

Der Nullvektor ist per Definition linear abhängig (z.B.: $0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$). Somit sind die Vektoren linear abhängig. Die Anzahl an Vektoren reicht nicht aus, um den $\mathbb{R}^3$ zu erzeugen.

(b)

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{\text{Typ III}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \underset{\text{Typ I}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$
$$\underset{\text{Typ III}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \underset{\text{Typ III}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Der Rang der Matrix ist also 3, die Anzahl an Vektoren war ebenfalls 3. Somit sind sie linear unabhängig. Da es nur 3 Vektoren sind, können sie den $\mathbb{R}^4$ nicht erzeugen.

(c)

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix} \underset{\text{Typ I}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & -4 & -1 \end{pmatrix} \underset{\text{Typ III}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & -6 & 3 \\ 0 & -16 & 2 \end{pmatrix} \underset{\text{Typ II}}{\longrightarrow}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -16 & 2 \end{pmatrix} \underset{\text{Typ III}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

Der Rang der Matrix ist 3, die Anzahl der Vektoren ist ebenfalls 3. Somit sind sie linear unabhängig. Drei linear unabhängige Vektoren spannen den gesamten $\mathbb{R}^3$.

(d)

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \underset{\text{Typ III}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \underset{\text{Typ III}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Der Rang dieser Matrix ist 3, die Anzahl der Vektoren ist 4. Somit sind sie linear abhängig. Da der Rang der Matrix mit der Dimension des Raumes $\mathbb{R}^3$ übereinstimmt, so spannen sie den gesamten Raum.

Aufgabe 2: Lineare Unabhängigkeit 2

Sei V ein reeller Vektorraum und seien $a, b, c, d \in V$. Prüfen Sie, ob die folgenden Teilmengen $S \subseteq V$ linear unabhängig sind. Begründen Sie Ihre Antwort.

(a) S $= \{a, 2a, b\}$, mit a, b linear unabhängig.

(b) S $= \{a, a+b, a+b+c\}$, mit a, b, c linear unabhängig.

(c) S $= \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$, mit $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \in \text{span}(a, b, c, d)$.

Lösung

(a) Linear abhängig, weil a und $2a$ linear abhängig sind: $2 \cdot a - 1 \cdot 2a = 0$.

(b) Linear unabhängig. Seien $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ und

$$\lambda_1 a + \lambda_2(a+b) + \lambda_3(a+b+c) = 0 \Leftrightarrow (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)a + (\lambda_2 + \lambda_3)b + \lambda_3 c = 0$$

Aber a, b, c sind linear unabhängig, d.h.:

$$(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) = 0 \wedge \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \wedge \lambda_3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

(c) Linear abhängig. $\text{span}(a, b, c, d)$ hat höchstens die Dimension 4 (falls a, b, c, d linear unabhängig). 5 Vektoren aus einem (höchstens) 4-dimensionalen Raum sind immer linear abhängig.

Aufgabe 3: Dimensionen von Erzugnissen

Seien $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$ mit $\text{span}(v_1, v_2) = \text{span}(v_1, v_3)$ und $v_2 \notin \text{span}(v_3)$. Welche der folgenden Werte sind für $\dim \text{span}(v_1, v_2)$ möglich? Begründen Sie Ihre Antwort.

(a) $\dim(\text{span}(v_1, v_2)) = 0$

(b) $\dim(\text{span}(v_1, v_2)) = 1$

(c) $\dim(\text{span}(v_1, v_2)) = 2$

(d) $\dim(\text{span}(v_1, v_2)) = 3$

Lösung:

(a) Nicht möglich, Da $0 \in span(v_3)$ folgt $v_2 \neq 0$. Oder: weil v_2 und v_3 linear unabhängig sind und daher von Null verschieden

(b) Möglich. Beispiel: $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(c) Möglich. Beispiel: $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

(d) Nicht möglich, weil $\dim(\text{span}(v_1, v_2)) \leq 2$.

Aufgabe 4: Basis und Vektorräume 1

(a) Zeigen Sie, dass die Menge $U := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R}, x + y - z = 0 \right\}$ ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$ ist.

(b) Geben Sie eine Basis von U an.

Lösung

(a) Wir prüfen die UVR-Axiome:

UVR1) 0 + 0 - 0 = 0 und somit $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in U$. Also $U \neq \emptyset$.

UVR 2) Seien $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \in U$. Dann ist $\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{pmatrix} \in U$, da $(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) - (z_1 + z_2) = (x_1 + y_1 - z_1) + (x_2 + y_2 - z_2) = 0 + 0 = 0$.

UVR 3) Seien $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in U$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann ist auch $\lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in U$, da $\lambda x + \lambda y - \lambda z = \lambda(x + y - z) = \lambda \cdot 0 = 0$.

$\Rightarrow U$ ist ein UVR von $\mathbb{R}^3$.

Bitte wenden...

(b) $U \subset \mathbb{R}^3$ ist durch eine Gleichung bestimmt. Damit hat U die Dimension zwei. Je nach Wahl von x, y muss $z = x + y$ gelten. Eine mögliche Basis ist damit $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Aufgabe 5: Basis und Vektorräume 2

Geben Sie für folgende Vektorräume jeweils eine Basis an:

(a) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 = x_3\}$,

(b) $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + 3x_2 + 2x_4 = 0, 2x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$,

(c) $\operatorname{span}(t^2, t^2 + t, t^2 + 1, t^2 + t + 1, t^7 + t^5) \subset \mathbb{R}[t]$,

Lösung

(a) Eine mögliche Basis ist $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

(b) Gegeben sind 4 Gleichungen mit zwei Unbekannten. Die Dimension des Vektorraums, der im Grunde die Lösungsmenge von diesem LGS ist, ist also 2. Wir geben also als Basis zwei linear unabhängige Vektoren an, die das System lösen. Beispielsweise gilt: $B = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

(c) Die ersten 4 Polynome von $\operatorname{span}(t^2, t^2 + t, t^2 + 1, t^2 + t + 1, t^7 + t^5)$ sind linear abhängig, denn es gilt:

$$t^2 + t + 1 = 1 \cdot (t^2 + 1) + 1 \cdot (t^2 + t) - 1 \cdot t^2$$

Man kann also $t^2 + t + 1$ weglassen. Ferner gilt für die restlichen drei Polynome, dass sie linear unabhängig sind. Dies lässt sich zeigen durch:

$$\lambda_1 t^2 + \lambda_2 (t^2 + t) + \lambda_3 (t^2 + 1) = 0$$
$$\Leftrightarrow (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) t^2 + \lambda_2 t + \lambda_3 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

Das Polynom $t^7 + t^5$ ist linear unabhängig vom Rest (folgt aus der Betrachtung des Grades). Daraus ergibt sich also: $B = \{t^2, t^2 + t, t^2 + 1, t^7 + t^5\}$.

Aufgabe 6: Lineare Abbildungen - zum Warmwerden

a) Invertieren Sie folgende Matrix: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 7 \\ 2 & 4 & 9 \end{pmatrix}$

b) Invertieren Sie folgende Matrix: $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

c) Invertieren Sie folgende Matrix: $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

Lösung:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \tag{1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \tag{2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -9 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \end{array}\right) \tag{3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \end{array}\right) \tag{4}$$

$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 7 \\ 2 & 4 & 9 \end{pmatrix}$

b) nach selbigem Schema: $B^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

c)

$$C^{-1} = \frac{1}{1 \cdot 4 - 2 \cdot 3} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7: Lineare Abbildungen - mittel

Gegeben seien die linearen Abbildung $\mathrm{f}_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, v \mapsto Av$ mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

bzw. $\mathrm{f}_B : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, v \mapsto Bv$ mit $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

a) Bestimmen Sie jeweils eine Basis des Bildes von f_A und f_B. Welche Dimensionen haben die

Bitte wenden...

Bilder?
b) Bestimmen Sie jeweils eine Basis des Kerns von f_A und f_B. Welche Dimension haben die Kerne?
c) Sind f_A, f_B injektiv, surjektiv, bijektiv?

Lösung:

Sehen wir uns erst f_A an:

a) Sei $v \in \mathbb{R}^2, v = (v_1, v_2)$.
Dann gilt: $f_A(v) = v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + v_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Das Bild von A wird also von den Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ aufgespannt

$\Rightarrow \operatorname{Im}(f_A) = \{Av | v \in \mathbb{R}\} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$ und die Dimension ist 2, da es 2 Basisvektoren des Bildes gibt.

b) Nach dem Dimensionssatz für lineare Abbildungen gilt:
$\dim(\mathbb{R}^2) = \dim\ (\text{Kern}(f_A)) + \dim\ (\text{Bild}(f_A))$, also hier $2 = \dim\ (\text{Kern}(f_A)) + 2$ und damit folgt aus Kardinalitätsgründen, dass die Dimension des Kerns gleich 0 ist. Also ist der Kern trivial und besteht nur aus $(0, 0)$.

c) Da der Kern von f_A trivial ist, also nur aus dem Nullelement besteht, ist die Abbildung f_A injektiv. Sie ist nicht surjektiv, da rang(f_A)=2≠3=dim($\mathbb{R}^3$). Da f_A nicht surjektiv ist, kann f_A auch nicht bijektiv sein.

Nun betrachten wir f_B:
a) Sei $v \in \mathbb{R}^3, v = (v_1, v_2, v_3)$.
Dann gilt: $f_A(v) = v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + v_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} + v_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Das Bild von A wird also von den Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ aufgespannt.

Da der Zielraum der $\mathbb{R}^2$ ist und Dimension 2 hat, kann auch das Bild von A maximal Dimension 2 haben. Durch scharfes Hinsehen und ein bisschen Rechnen erkennt man, dass $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} + 10 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Die Vektoren sind also linear abhängig.
Also können wir als Basis des Bildes von A die Menge $\{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}\}$ wählen.

b) Nach der Dimensionsformel muss der Kern eindimensional sein. Um den Kern zu bestimmen, versuchen wir herauszufinden, welche Vektoren auf $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ abgebildet werden. Dazu lösen wir:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und erhalten als Lösung $\lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}$.

Bemerkung: Man erkennt, dass die Einträge des Vektors, der den Kern erzeugt, gleich den Koeffizienten der in a) errechneten Linearkombination sind.

c) Da der Kern nicht trivial ist, sondern Dimension 1 hat, ist B nicht injektiv.
Da die Dimension des Bildes gleich der Dimension des Zielraums ist, ist B surjektiv. Da B nicht injektiv ist, ist B auch nicht bijektiv.

Aufgabe 8: Lineare Abbildungen - mittel

Sei V=$\mathbb{R}^3$ und f: $V \to V, (x, y, z) \mapsto (y, x, 0)$.

a) Was ist der Kern $\ker(f)$, was das Bild $\operatorname{im}(f)$?

b) Wie lautet die Menge von Vektoren, die auf sich selbst abgebildet werden, d.h. welche Vektoren sind Fixvektoren? Bildet diese Menge einen Untervektorraum?

c) Welche Untervektorräume werden auf sich selbst abgebildet?

Hinweis: Macht euch klar, was der Unterschied zwischen b) und c) ist: In b) ist nach der Menge aller Fixvektoren gefragt. In c) geht darum, dass ein Unterraum als Ganzes auf sich selbst abgebildet wird. Das muss nicht heißen, dass die Vektoren Fixvektoren sind. Ihr Bild muss aber innerhalb des Unterraumes liegen.

Lösung:

(a) $\ker(f) = \{(0, 0, c) | \quad c \in \mathbb{R}\}$, d.h. die z-Achse.
$\operatorname{im}(f) = \{(a, b, 0) | \quad a, b \in \mathbb{R}\}$, d.h. die x-y-Ebene.

b) $V_{fix} = \{(a, a, 0) | \quad a \in \mathbb{R}\}$. Dies ist ein Untervektorraum, da es eine Ursprungsgerade ist. Alternativ kann man auch die Axiome nachprüfen.

c) $\{(0, 0, 0)\}$, $\operatorname{im}(f)$ und V_{fix} **und** $V_{senkrecht} = \{(a, -a, 0) | \quad a \in \mathbb{R}\}$

Hinweis: In einer früheren Version der Lösung wurde der Untervektorraum $V_{senkrecht} = \{(a, -a, 0) | \quad a \in \mathbb{R}\}$ vergessen. Dieser repräsentiert die Gerade in der x-y-Ebene, die senkrecht auf die Winkelhalbierende, an der wir spiegeln, steht. Es ist die Winkelhalbierende des 2. und 4. Quadranten. Diese Gerade ist ein Eigenvektor mit Eigenwert -1.
Die Darstellungsmatrix der Abbildung sieht bezüglich der Standardbasis übrigens so aus:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Quellenangaben

A6a): W. Soergel, A. Sartori, Klausur Lineare Algebra I, Universität Freiburg, Wintersemester 14/15. A7a): C. Karpfinger, Höhere Mathematik in Rezepten, Arbeitsbuch, Springer-Spektrum-Verlag, 2018. A8): W. Soergel, A. Sartori, Übungsblatt 4 A3, Universität Freiburg, Wintersemester 14/15.