Technische Universität München
Physik Department
Pablo Cova Fariña, Claudia Nagel

Übungen zum Ferienkurs Ferienkurs Lineare Algebra für Physiker WiSe 2017/18
Übungsblatt 2

Aufgabe 1: Lineare Unabhängigkeit 1

Bestimmen Sie in den folgenden Fällen, ob die Vektoren im Vektorraum $\mathbb{R}^3$ bzw. $\mathbb{R}^4$ linear abängig oder linear unabhängig sind. Erzeugen Sie den gesamten Vektorraum?

(a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

(b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$

(c) $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

(d) $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

Aufgabe 2: Lineare Unabhängigkeit 2

Sei V ein reeller Vektorraum und seien $a, b, c, d \in V$. Prüfen Sie, ob die folgenden Teilmengen $S \subseteq V$ linear unabhängig sind. Begründen Sie Ihre Antwort.

(a) S $= \{a, 2a, b\}$, mit a, b linear unabhängig.

(b) S $= \{a, a+b, a+b+c\}$, mit a, b, c linear unabhängig.

(c) S $= \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$, mit $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \in \text{span}(a, b, c, d)$.

Aufgabe 3: Dimensionen von Erzeugnissen

Seien $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$ mit $\text{span}(v_1, v_2) = \text{span}(v_1, v_3)$ und $v_2 \notin \text{span}(v_3)$. Welche der folgenden Werte sind für dim $\text{span}(v_1, v_2)$ möglich? Begründen Sie Ihre Antwort.

(a) $\dim(\text{span}(v_1, v_2)) = 0$

(b) $\dim(\text{span}(v_1, v_2)) = 1$

(c) $\dim(\text{span}(v_1, v_2)) = 2$

(d) $\dim(\text{span}(v_1, v_2)) = 3$

Bitte wenden...

Aufgabe 4: Basis und Vektorräume 1

(a) Zeigen Sie, dass die Menge $U := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R}, x + y - z = 0 \right\}$ ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$ ist.

(b) Geben Sie eine Basis von U an.

Aufgabe 5: Basis und Vektorräume 2

Geben Sie für folgende Vektorräume jeweils eine Basis an:

(a) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 = x_3\}$,

(b) $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + 3x_2 + 2x_4 = 0, 2x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$,

(c) $\operatorname{span}(t^2, t^2 + t, t^2 + 1, t^2 + t + 1, t^7 + t^5) \subset \mathbb{R}[t]$,

Aufgabe 6: Lineare Abbildungen - zum Warmwerden

a) Invertieren Sie folgende Matrix: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 7 \\ 2 & 4 & 9 \end{pmatrix}$

b) Invertieren Sie folgende Matrix: $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

c) Invertieren Sie folgende Matrix: $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

Aufgabe 7: Lineare Abbildungen - mittel

Gegeben seien die linearen Abbildung $\mathrm{f}_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, v \mapsto Av$ mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

bzw. $\mathrm{f}_B : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, v \mapsto Bv$ mit $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

a) Bestimmen Sie jeweils eine Basis des Bildes von f_A und f_B. Welche Dimensionen haben die Bilder?

b) Bestimmen Sie jeweils eine Basis des Kerns von f_A und f_B. Welche Dimension haben die Kerne?

c) Sind f_A, f_B injektiv, surjektiv, bijektiv?

Aufgabe 8: Lineare Abbildungen - mittel

Sei V=$\mathbb{R}^3$ und f: $V \to V, (x, y, z) \mapsto (y, x, 0)$.

a) Was ist der Kern $\ker(f)$, was das Bild $\operatorname{im}(f)$?

b) Wie lautet die Menge von Vektoren, die auf sich selbst abgebildet werden, d.h. welche Vektoren sind Fixvektoren? Bildet diese Menge einen Untervektorraum?

c) Welche Untervektorräume werden auf sich selbst abgebildet?

Hinweis: Macht euch klar, was der Unterschied zwischen b) und c) ist: In b) ist nach der Menge aller Fixvektoren gefragt. In c) geht darum, dass ein Unterraum als Ganzes auf sich selbst abgebildet wird. Das muss nicht heißen, dass die Vektoren Fixvektoren sind. Ihr Bild muss aber innerhalb des Unterraumes liegen.

Quellenangaben

A6a): W. Soergel, A. Sartori, Klausur Lineare Algebra I, Universität Freiburg, Wintersemester 14/15.

A7a): C. Karpfinger, Höhere Mathematik in Rezepten, Arbeitsbuch, Springer-Spektrum-Verlag, 2018.

A8): W. Soergel, A. Sartori, Übungsblatt 4 A3, Universität Freiburg, Wintersemester 14/15.