Technische Universität München
Physik Department
Pablo Cova Fariña, Claudia Nagel

Übungen zum Ferienkurs Ferienkurs Lineare Algebra für Physiker WiSe 2017/18

Übungsblatt 1- Lösung

Aufgabe 1: Matrixmultiplikation - zum Wachwerden

(a) Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \\ 1 & 8 & -7 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 8 \\ -7 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 8 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 5 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie alle möglichen Produkte!

(b) Berechnen Sie:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Lösung

(a) Die möglichen Produkte der angegebenen Matrizen lauten:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 12 & -17 \\ 5 & 49 & -20 \\ -6 & -33 & 91 \end{pmatrix}, \qquad AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & -5 & -3 \\ -8 & 8 & 8 & -8 \end{pmatrix},$$

$$AE = \begin{pmatrix} 13 & 15 \\ 30 & 55 \\ -41 & -12 \end{pmatrix}, \qquad BC = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ -7 \end{pmatrix},$$

$$CD = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & 16 & 0 & 64 \\ 7 & -14 & 0 & -56 \end{pmatrix}, \qquad DC = (-57)$$

(b)

$$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2: Neues Jahr, neues Glück!

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Berechne A^{2018}!

Lösung

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

$$\rightarrow A^3 = A; A^4 = I_3; ...A^{2018} = I_3$$

Aufgabe 3: Nilpotente Matrix

Für eine quadratische Matrix $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ definiert man das Matrixexponential als:

$$\exp(M) = \sum \frac{1}{k!} M^k$$

Ermitteln Sie exp(M) für die Matrix:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Hinweis: Für eine beliebige Matrix $M \in K^{n \times n}$ gilt $M^0 = I_n$. Weiterhin ist die angegebene Matrix M nilpotent, d.h. $M^n = 0$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Einfach losmultiplizieren!

Lösung

$$M^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad M^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\exp(M) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3,5 & 1 & 2,5 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4: Rang einer Matrix

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & k \\ k & 1 & 3 \\ 1 & 7 & k \end{pmatrix}$$

Finde den Rang von A, abhängig vom Parameter k.

Lösung

Wir bringen A auf Zeilenstufenform.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & k \\ k & 1 & 3 \\ 1 & 7 & k \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{II - } k\cdot \text{ I}]{} \begin{pmatrix} 1 & 3 & k \\ 0 & 1-3k & 3-k^2 \\ 1 & 7 & k \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{III - I}]{} \begin{pmatrix} 1 & 3 & k \\ 0 & 1-3k & 3-k^2 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{III} \leftrightarrow \text{II}]{} \begin{pmatrix} 1 & 3 & k \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1-3k & 3-k^2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{4}\cdot \text{ II}]{} \begin{pmatrix} 1 & 3 & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1-3k & 3-k^2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{III - } (1-3k)\cdot \text{ II}]{} \begin{pmatrix} 1 & 3 & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3-k^2 \end{pmatrix}$$

Die ersten zwei Zeilen der Matrix sind ungleich einer Nullzeilen, unabhängig von der Wahl von k. Die dritte Zeile wird zur Nullzeite für $k = \pm\sqrt{3}$. Zusammenfassend:

rg(A) $= 2$ für $k = \pm\sqrt{3}$
rg(A) $= 3$ sonst

Aufgabe 5: LGS 1

Lösen Sie folgende lineare Gleichungssysteme:

(a)

$$\begin{aligned} x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 &= 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 &= 0 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} -6x_1 + 6x_2 + 2x_3 - 2x_4 &= 2 \\ -9x_1 + 8x_2 + 3x_3 - 2x_4 &= 3 \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \\ -15x_1 + 14x_2 + 5x_3 - 4x_4 &= 5 \end{aligned}$$

Lösung

(a)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 0 \end{array}\right) \underset{\text{I} \leftrightarrow \text{II}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 0 \end{array}\right) \underset{\text{III - 2} \cdot \text{I, IV - 3} \cdot \text{I}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & -6 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{\text{III + II, IV + 2} \cdot \text{II}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{\text{I - 2} \cdot \text{II}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Wir haben zwei Gleichungen für vier Unbekannten. Wir brauchen also zwei freie Parameter. Legen wir $x_4 = \lambda$ und $x_3 = \mu$ fest, so finden wir $x_2 = -2\mu - 3\lambda$ und $x_1 = \mu + 2\lambda$. Die Lösungsmenge lautet:

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} \mu + 2\lambda \\ -2\mu - 3\lambda \\ \mu \\ \lambda \end{pmatrix} \right\} \quad \text{mit} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

(b)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -6 & 6 & 2 & -2 & 2 \\ -9 & 8 & 3 & -2 & 3 \\ -3 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ -15 & 14 & 5 & -4 & 5 \end{array}\right) \underset{\text{I} \leftrightarrow \text{III}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} -3 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ -6 & 6 & 2 & -2 & 2 \\ -9 & 8 & 3 & -2 & 3 \\ -15 & 14 & 5 & -4 & 5 \end{array}\right) \underset{\text{II - 2} \cdot \text{I, III - 3} \cdot \text{I, IV - 5} \cdot \text{I}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} -3 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -4 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{\text{III - II, IV - 2} \cdot \text{II}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} -3 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{\text{I - II}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} -3 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Wir haben zwei Gleichungen für vier Unbekannten. Wir brauchen also zwei freie Parameter. Legen wir $x_1 = \lambda$ und $x_2 = \mu$ fest, so finden wir $x_4 = \mu$ und $x_3 = 1 + 3\lambda - 2\mu$. Die Lösungsmenge lautet:

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ 1 + 3\lambda - 2\mu \\ \mu \end{pmatrix} \right\} \quad \text{mit} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Aufgabe 6: LGS 2

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + ax_3 - 4 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 1 &= 0 \\ x_1 - ax_2 + x_3 - 1 &= 0 \end{aligned}$$

wobei $a \in \mathbb{R}$.

(a) Lösen Sie das LGS und geben Sie an, für welche Werte von a das System:

(i) unlösbar ist.

(ii) lösbar ist.

(b) Interpretieren Sie die Fälle geometrisch.

Lösung

Wir stellen zunächst die erweiterte Koeffizientenmatrix auf, und wenden dann den Gauss-Algorithmus an.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 4 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -a & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{Z1} \leftrightarrow \text{Z2}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & a & 4 \\ 1 & -a & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{Typ III}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & a-1 & 5 \\ 0 & -a-1 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{Z1} \leftrightarrow \text{Z2}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -a-1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & a-1 & 5 \end{array}\right)$$

Wir stellen fest:

(i) Falls $a = 1$ oder $a = -1$ ist das System nicht lösbar.

(ii) Sonst ist das System eindeutig lösbar.

(b) Falls Fall (i) auftritt haben wir zwei parallele Ebenen, die dritte Ebene schneidet beide. Bei $a = 1$ sind die ersten zwei Ebenen parallel zueinander, bei $a = -1$ sind es die zweite und die dritte Ebene. Falls Fall (ii) auftritt schneiden sich die drei Ebenen in einem Punkt.

Aufgabe 7: Gruppen - leicht

Erfinden Sie 1-2 Mengen mit Verknüpfung, die eine Gruppe darstellen und 1-2 Mengen mit Verknüpfung, die keine Gruppe darstellen, weil eines der Axiome verletzt ist. Wenn Sie Hilfe brauchen, dürfen sich von Ihrem Vorlesungs-Skript inspirieren lassen; wenn Sie eine Herausforderung brauchen, dann versuchen Sie es ohne. Tauschen Sie die Beispiele mit der Person, die neben Ihnen sitzt und versuchen Sie, deren Beispiele zu lösen und die Gruppen zu identifizieren, bzw. herauszufinden, an welchem Axiom es scheitert. Bei Unklarheiten können Sie gerne die Tutoren fragen.

Bitte wenden...

Aufgabe 8: Gruppen - leicht
Zeigen Sie, dass $(\mathbb{Z}, +)$ eine Untergruppe von $(\mathbb{Q}, +)$ ist.

Lösung:

(UG1) $0 \in \mathbb{Z}$, d.h. das neutrale Element von $\mathbb{Q}$ liegt auch in $\mathbb{Z}$.

(UG2) $\forall x, y \in \mathbb{Z}: \quad x + y \in \mathbb{Z}$:

(UG3) $\forall x \in \mathbb{Z}: \quad -x \in \mathbb{Z}$

Aufgabe 9: Gruppen - mittel, aber viel Schreibaufwand
(a) Bestimmen Sie für alle Elemente der symmetrischen Gruppe S_3 ihr Inverses.
(b) Ist die S_3 abelsch (d.h. kommutativ)? Was gilt allgemein für die $S_n, n \geq 3$?
(c) Bestimmen Sie alle Untergruppen der S_3. *Tipp: Zeichnen Sie ein gleichseitiges Dreieck und nummerieren Sie die Ecken. Überlegen Sie sich eine geometrische Interpretation für die S_3.*
(d) Zeigen Sie: Die Kardinalität (= Mächtigkeit) der S_n ist $n!$.

Lösung:

Zuerst überlegen wir uns, welche Elemente überhaupt in der S_3 liegen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Dies sind alle Elemente der S_3. Das wissen wir, da $|S_3| = 3! = 6$.

(a) Die Elemente $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ sind jeweils ihre eigenen Inversen.

Die Elemente $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ sind zueinander invers.

(b) Sie ist nicht abelsch: $(123) \cdot (12) = (13) \neq (23) = (12) \cdot (123)$. Da in allen symmetrischen Gruppen $S_n, n \geq 3$ auch die Elemente der S_3 liegen (sie entstehen, wenn man die Zahlen größer als 4 nicht permutiert), sind also alle anderen symmetrischen Gruppen für $n \geq 3$ auch nicht abelsch.

(c) Die Untergruppen sind:

$U_1 = \{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \}$

$U_2 = \{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \}$

$U_3 = \{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \}$

$U_4 = \{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \}$

$U_5 = \{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \}$

$U_6 = S_3$

Die Untergruppen U_1 bis U_5 sind echte Untergruppen. U_1, U_2, U_3 sind die Untergruppen, die durch Vertauschung zweier Ecken des Dreiecks, bzw. Spiegelung an einer Mittelsenkrechten entstehen. U_4 entsteht durch Rotation des gleichseitigen Dreiecks. U_5 ist die Identität. U_6 ist die ganze Gruppe (und insbesondere keine echte Untergruppe). Geometrisch kann man die S_3 als Gruppe aller Deckabbildungen eines gleichseitigen Dreiecks interpretieren.

(d) Wenn wir n Zahlen permutieren, haben wir für die erste Position n Möglichkeiten, für die zweite $n-$ und so weiter, also gibt es $n!$ Möglichkeiten die Menge $A = \{1, 2, ..., n\}$ auf sich selbst abzubilden.

Aufgabe 10: Gruppen - mittel
Sei G eine Gruppe mit neutralem Element e. Zeigen Sie: $a^2 = e \ \forall a \in G \Rightarrow$ G ist abelsch.

Lösung (Direkter Beweis):
Zuerst schreiben wir die rechte Seite um: $a^2 = e \iff a^{-1} = a \ \forall a \in G$.
Seien nun $a, b \in G, c := ab$.
Dann gilt: $e = c^2 = (ab)^2 = abab = aba^{-1}b^{-1} \iff ab = ba \Rightarrow$ G abelsch.

Hinweis: In einer früheren Version stand statt dem letzten $\Rightarrow$ ein $\Leftrightarrow$ im Beweis. Es wurde also fälschlicherweise geschlussfolgert, dass in allen abelschen Gruppen $a^2 = e$ gilt. Das ist natürlich falsch, wie man zum Beispiel an der abelschen Gruppe $\{\mathbb{R}\backslash\{0\}, \cdot\}$ sieht. Dort gilt z.B. $2^2 = 4 \neq 1$.

Aufgabe 11: Vektorräume - mittel
Entscheiden Sie, ob die folgenden Mengen Untervektorräume zu den angegebenen Vektorräumen sind.

(a) $W = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 = x_2 = 2x_3\} \subset \mathbb{R}^3$

(b) $W = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^4 = 0\} \subset \mathbb{R}^2$

(c) $W = \{(\mu + \lambda, \lambda^2) \in \mathbb{R}^2 : \mu, \lambda \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$

(d) $W = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq x_2\} \subset \mathbb{R}^2$

Lösung:
Wir müssen die UVR-Axiome überprüfen.

(a) UVR 1: Erfüllt, da $(0, 0, 0) \in W \Rightarrow W \neq \varnothing$
UVR 2: Erfüllt:
Seien $v, w \in W$, d.h. $v = (v_1, v_2, \frac{1}{2}v_1), w = (w_1, w_2, \frac{1}{2}w_1)$.
$\Rightarrow v + w = (v_1 + w_1, v_2 + w_2, \frac{1}{2}(v_1 + w_1))$
UVR 3: Erfüllt:
Sei $v \in W$, d.h. $v = (v_1, v_2, \frac{1}{2}v_1), \lambda \in \mathbb{R}$. Es gilt: $\lambda v = (\lambda v_1, \lambda v_2, \lambda\frac{1}{2}v_1) \in W$
W ist also ein UVR von $\mathbb{R}^3$.

(b) Durch Hinsehen erkennt man, dass $W = \{(0, 0)\}$, d.h. nur der Nullvektor erfüllt die Bedingung. Damit ist W nichtleer und UVR 1 ist erfüllt. Die anderen beiden Axiome folgen auch direkt, da $(0, 0) + (0, 0) = (0, 0) \in W$ und $\lambda(0, 0) = (0, 0) \in W$.
W ist also ein UVR von $\mathbb{R}^2$.

Bitte wenden...

(c) UVR 1: Erfüllt, da z.B. $(1, 0) \in W \Rightarrow W \neq \varnothing$.
UVR 2: Erfüllt.
Betrachte die Addition zweier Elemente aus W:
$(\mu_1 + \lambda_1, \lambda_1^2) + (\mu_2 + \lambda_2, \lambda_2^2) = (\mu_1 + \mu_2 + \lambda_1 + \lambda_2, \lambda_1^2 + \lambda_2^2)$. Offensichtlich gibt es ein $\lambda_3 \in \mathbb{R}$, sodass $\lambda_3^2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2$.
Setze $\mu_3 := \mu_1 + \mu_2 + \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 \in R$.
Dann gilt: $(\mu_1 + \lambda_1, \lambda_1^2) + (\mu_2 + \lambda_2, \lambda_2^2) = (\mu_3 + \lambda_3, \lambda_3^2) \in W$
UVR 3: Nicht erfüllt. Wähle z.B. $\lambda = 1, \alpha = -1, \mu = 0$:
$\alpha(\mu + \lambda, \lambda) = -1(1, 1) = (-1, -1) \notin W$, da $\lambda^2 \geq 0 \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$. Es gibt also kein λ, das die gewünschte Bedingung erfüllt.
W ist also kein UVR von $\mathbb{R}^2$.

(d) UVR 1: Erfüllt, da z.B. $(1, 0) \in W \Rightarrow W \neq \varnothing$.
UVR 2: Erfüllt, denn es gilt für zwei Vektoren $v, v' \in W$:
$v + v' = (x_1 + x_1', x_2 + x_2')$, wobei $x_1 + x_1' \geq x_2 + x_2' \Rightarrow v + v' \in W$.
UVR 3: Nicht erfüllt. Wähle z.B. $\alpha = -1$. Dann gilt: $\alpha v = (-x_1, -x_2)$, wobei $-x_1 \leq -x_2 \Rightarrow \alpha v \notin W$. W ist also kein UVR von $\mathbb{R}^2$.