Technische Universität München
Physik Department
Pablo Cova Fariña, Claudia Nagel

Übungen zum Ferienkurs Ferienkurs Lineare Algebra für Physiker WiSe 2017/18
Übungsblatt 1

Aufgabe 1: Matrixmultiplikation - zum Wachwerden

(a) Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \\ 1 & 8 & -7 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 8 \\ -7 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 8 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 5 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie alle möglichen Produkte!

(b) Berechnen Sie:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2: Neues Jahr, neues Glück!

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Berechne A^{2018}!

Bitte wenden...

Aufgabe 3: Nilpotente Matrix

Für eine quadratische Matrix $M \in \mathbb{C}^{n\times n}$ definiert man das Matrixexponential als:

$$\exp(M) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} M^k$$

Ermitteln Sie exp(M) für die Matrix:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Hinweis: Für eine beliebige Matrix $M \in K^{n\times n}$ gilt $M^0 = I_n$. Weiterhin ist die angegebene Matrix M nilpotent, d.h. $M^n = 0$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Einfach losmultiplizieren!

Aufgabe 4: Rang einer Matrix

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & k \\ k & 1 & 3 \\ 1 & 7 & k \end{pmatrix}$$

Finde den Rang von A, abhängig vom Parameter k.

Aufgabe 5: LGS 1

Lösen Sie folgende lineare Gleichungssysteme:

(a)

$$\begin{aligned} x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 &= 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 &= 0 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} -6x_1 + 6x_2 + 2x_3 - 2x_4 &= 2 \\ -9x_1 + 8x_2 + 3x_3 - 2x_4 &= 3 \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \\ -15x_1 + 14x_2 + 5x_3 - 4x_4 &= 5 \end{aligned}$$

Aufgabe 6: LGS 2

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + ax_3 - 4 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 1 &= 0 \\ x_1 - ax_2 + x_3 - 1 &= 0 \end{aligned}$$

wobei $a \in \mathbb{R}$.

(a) Lösen Sie das LGS und geben Sie an, für welche Werte von a das System:

(i) unlösbar ist.

(ii) lösbar ist.

(b) Interpretieren Sie die Fälle geometrisch.

Aufgabe 7: Gruppen - leicht

Erfinden Sie 1-2 Mengen mit Verknüpfung, die eine Gruppe darstellen und 1-2 Mengen mit Verknüpfung, die keine Gruppe darstellen, weil eines der Axiome verletzt ist. Wenn Sie Hilfe brauchen, dürfen sich von Ihrem Vorlesungs-Skript inspirieren lassen; wenn Sie eine Herausforderung brauchen, dann versuchen Sie es ohne. Tauschen Sie die Beispiele mit der Person, die neben Ihnen sitzt und versuchen Sie, deren Beispiele zu lösen und die Gruppen zu identifizieren, bzw. herauszufinden, an welchem Axiom es scheitert. Bei Unklarheiten können Sie gerne die Tutoren fragen.

Aufgabe 8: Gruppen - leicht

Zeigen Sie, dass $(\mathbb{Z}, +)$ eine Untergruppe von $(\mathbb{Q}, +)$ ist.

Aufgabe 9: Gruppen - mittel, aber viel Schreibaufwand

(a) Bestimmen Sie für alle Elemente der symmetrischen Gruppe S_3 ihr Inverses.
(b) Ist die S_3 abelsch (d.h. kommutativ)? Was gilt allgemein für die $S_n, n \geq 3$?
(c) Bestimmen Sie alle Untergruppen der S_3. *Tipp: Zeichnen Sie ein gleichseitiges Dreieck und nummerieren Sie die Ecken. Überlegen Sie sich eine geometrische Interpretation für die S_3.*
(d) Zeigen Sie: Die Kardinalität (= Mächtigkeit) der S_n ist $n!$.

Aufgabe 10: Gruppen - mittel

Sei G eine Gruppe mit neutralem Element e. Zeigen Sie: $a^2 = e \ \forall a \in G \iff$ G ist abelsch.

Bitte wenden...

Aufgabe 11: Vektorräume - mittel

Entscheiden Sie, ob die folgenden Mengen Untervektorräume zu den angegebenen Vektorräumen sind.

(a) $W = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 = x_2 = 2x_3\} \subset \mathbb{R}^3$

(b) $W = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^4 = 0\} \subset \mathbb{R}^2$

(c) $W = \{(\mu + \lambda, \lambda^2) \in \mathbb{R}^2 : \mu, \lambda \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$

(d) $W = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq x_2\} \subset \mathbb{R}^2$