# Theoretische Physik: Mechanik

Probeklausur
Fakultät für Physik
Technische Universität München

29.09.2017

Bearbeitungszeit 90 Minuten
Es gibt insgesamt 45 Punkte (2 Minuten pro Punkt), wobei Sie bei den Kurzfragen vermutlich schneller sein werden.

## 1 Kurzfragen [9 Punkte]

(a) Erklären Sie die folgenden Begriffe in jeweils **einem** Satz

- Anholonome Zwangsbedingung. Geben Sie ein Besipiel an.
- Hauptachsen
- Wirkungsprinzip
- Konservative Kraft

(b) Geben Sie an, ob die folgenden Aussagen **immer** wahr sind

- Bei einer gebundenen Bewegung im Gravitationsfeld einer Punktmasse sind die Bahnen geschlossen
- Zwangskräfte leisten keine Arbeit
- Das Newtonsche Gesetz hat in allen Bezugssystemen dieselbe Form.
- Die Hamiltonfunktion ausgewertet auf einer Bahnkurve gibt die Gesamtenergie des Systems an.
- Wenn ein freier Kreisel mit konstanter Winkelgeschwindigkeit rotiert, muss die Drehachse eine mögliche Hauptachse sein.

**Lösung:**

Jeweils ein Punkt

(a)

- Eine anholonome Zwangsbedingung ist eine Einschränkung der (generalisierten) Koordinaten eines Systems, die **nicht** in der Form $f(q_1, \ldots, q_n, t) = 0$ geschrieben werden Kann. Beispiel: ein Teilchen kann sich in einem Würfel der Kantenlänge $L$ bewegen. $0 < x, y, z < L$
- Die Hauptachsen eines Körpers sind die Achsen, die, wenn man sie als Achsen des körperfesten Koordinatensystems wählt, zu einem diagonalen Trägheitstensor führen.
- Das Wirkungsprinzip besagt, dass die physikalische Bahn zwischen zwei vorgegebenen Punkten $q_1 = q(t_1)$ und $q_2 = q(t_2)$ durch genau das $q(t)$ gegeben ist, welches das Wirkungsintegral

$$S[q] = \int_{t_1}^{t_2} dt L(q, \dot{q}, t) \tag{1}$$

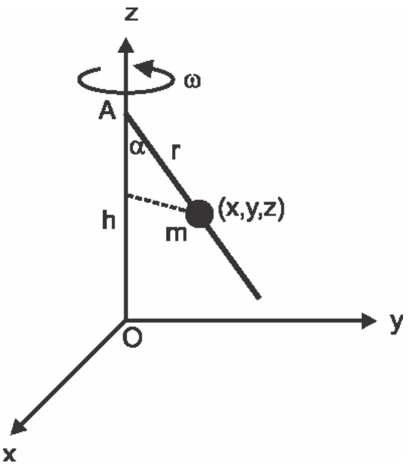
extremal (bzw. stationär) macht.
- Ein Kraftfeld ist konservativ, wenn das Arbeitsintegral $\int_A^B d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r})$ nicht vom Weg von A nach B abhängt. Alternativ: $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$ oder wenn ein Potential existiert so dass $\vec{F} = -\vec{\nabla} U(\vec{r})$

(b) Geben Sie an, ob die folgenden Aussagen **immer** wahr sind

- Ja    Die gebundenen Bahnen in einem $1/r$ Potential sind geschlossen (Ellipsen).
- Nein    Zwangskräfte können Arbeit leisten, wenn die Zwngsbedingungen zeitabhängig sind. z.B. Massenpunkt auf rotierender Stange.
- Nein    Nur in **Inertial**systemen
- Nein    $H \neq T + U$ z.B. wenn $x_i = x_i(q_k, t)$ explizit von $t$ abhängt.
- Ja    folgt aus den Euler-Gleichungen mit $\dot{\omega}_i = 0$

## 2 Rotierende Masse [10 Punkte]

Am Punkt A sei in der Höhe $h$ über der $xy$-Ebene eine masselose Stange im festen Winkel $0 < \alpha < \pi$ zur Achse OA befestigt. Die Stange rotiere mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit $\omega$ um die Achse OA. Unter dem Einfluss der Rotation und einer konstanten Schwerebeschleunigung $g$ bewege sich ein Teilchen der Masse $m$ auf der Stange. Der Abstand zwischen A und der Masse sei mit $r(t)$ bezeichnet.




(a) Die kartesischen Koordinaten des Teilchen lauten zur Zeit $t$:

$$x(t) = r(t) \sin\alpha \cos(\omega t)$$
$$y(t) = r(t) \sin\alpha \sin(\omega t)$$
$$z(t) = h - r(t) \cos\alpha$$

Bestimmen Sie daraus die Lagrangefunktion $L$ in der verallgemeinerten Koordinate $r$ und die dazugehörige Euler-Lagrange-Gleichung.

(b) Bestimmen Sie die stationäre Lösung $r_0$. Geben Sie den Wertebereich von $\alpha$ an, für den eine stationäre Lösung (d.h. $r =$ konst.) möglich ist.

**Lösung:**

(a) Wir bilden die Geschwindigkeiten

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sin\alpha(\dot{r}\cos\omega t - r\omega\sin\omega t) \\ \dot{y} &= \sin\alpha(\dot{r}\sin\omega t + r\omega\cos\omega t) \\ \dot{z} &= -\dot{r}\cos\alpha \end{aligned} \tag{2}$$

**[1]**

Und erhalten kinetische und potentielle Energie

$$\begin{aligned} T &= \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \\ &= \frac{m}{2}\sin^2\alpha\left[(\dot{r}\cos\omega t - r\omega\sin\omega t)^2 + (\dot{r}\sin\omega t + r\omega\cos\omega t)^2\right] + \frac{m}{2}\dot{r}^2\cos^2\alpha \\ &= \frac{m}{2}\sin^2\alpha\left[\dot{r}^2 + r^2\omega^2\right] + \frac{m}{2}\cos^2\alpha\dot{r}^2 \end{aligned} \tag{3}$$

**[2]**

$$V = mgz = mg(h - r\cos\alpha) \tag{4}$$

**[1]**

Daraus ergibt sich die Lagrange-Funktion (wir ignorieren eine Konstante im Potential)

$$L = T - V = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\omega^2\sin^2\alpha\right) + mgr\cos\alpha \tag{5}$$

**[1]**

Wir erhalten die Bewegungsgleichung

$$0 = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = m\ddot{r} - m\omega^2 r\sin^2\alpha - mg\cos\alpha \tag{6}$$

**[2]**

(b) Die stationäre Lösung $r_0$ erhalten wir aus der Bedingung $\ddot{r} = 0$

**[1]**

$$r_0\omega^2\sin^2\alpha = -g\cos\alpha \quad\Rightarrow\quad r_0 = -\frac{g\cos\alpha}{\omega^2\sin^2\alpha} \tag{7}$$

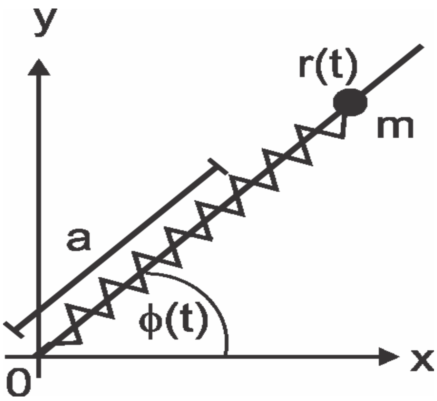
**[1]**

Dies ist nur dann eine physikalische Lösung, falls $r_0 > 0$. Also muss $\cos\alpha < 0$. Dies ist erfüllt für $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$

**[1]**

# 3 Schwingende Masse [10 Punkte]

Ein Massenpunkt der Masse $m$ gleite reibungsfrei auf einer horizontal angeordneten masselosen Stange. Er sei durch eine Feder mit Federkonstante $k$ und Gleichgewichtslänge $a$ mit dem Ursprung verbunden. Die Feder bewirke eine harmonische Kraft $F = -k(r-a)$ auf den Massenpunkt. Die Stange kann in der Ebene frei rotieren, die Schwerkraft spielt hier keine Rolle.




(a) Stellen Sie die Lagrangefunktion des Massenpunktes in Polarkoordinaten $r(t)$ und $\phi(t)$ auf.
**Hinweis**: Die Geschwindigkeit in Polarkoordinaten ist gegeben durch $\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\phi}\mathbf{e}_\phi$

(b) Gibt es zyklische Koordinaten? Welche physikalische Bedeutung haben die Erhaltungsgrößen und wie lauten die entsprechenden Erhaltungssätze?

(c) Eliminieren Sie unter Ausnutzung der Erhaltungsgrößen die zyklischen Koordinaten, und bringen Sie die Bewegungsgleichung für $r$ in die Form $m\ddot{r} = F(r)$. Bestimmen Sie $F(r)$.

(d) Beweisen Sie, dass für die stationäre Lösung $r_0$ im Allgemeinen $r_0 \geq a$ gilt und nur für eine spezielle Anfangsbedingung $r_0 = a$.

**Lösung:**

(a) Wir schreiben die Lagrangefunktion (Hinweis für die kinetische Energie benutzen)

$$L = T - V = \frac{m}{2}\left[\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2\right] - \frac{k}{2}(r-a)^2 \tag{8}$$

**[2]**

(b) $L$ hängt nicht explizit von $\phi$ ab. $\phi$ ist zyklisch.

**[1]**

Der zu $\phi$ kanonisch konjugierte Impuls ist erhalten

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = mr^2\dot{\phi} = \text{const.} \equiv l \tag{9}$$

**[1]**

Es handelt sich um den Drehimpuls.

**[1]**

(c) Die Bewegungsgleichung lautet

$$0 = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = m\ddot{r} - mr\dot{\phi}^2 + k(r-a) \tag{10}$$

**[1]**

Mit dem Erhaltungsgesetz (9) lässt sich $\dot{\phi}$ eliminieren

$$m\ddot{r} = \frac{l}{mr^3} - k(r-a) \equiv F(r) \tag{11}$$

**[1]**

(d) Die stationäre Lösung ($\ddot{r} = 0$ **[1]**) erfüllt den Zusammenhang

$$\frac{l}{mk} = (r-a)r^3 \tag{12}$$

**[1]**

Da die linke Seite für $l \neq 0$ positiv ist, muss $r > a$ sein. $r = a$ kann nur für $l = 0$ gelten.

**[1]**

# 4 Fallschrimspringer [6 Punkte]

Ein Körper der Masse $m$ falle vertikal im homogenen Schwerefeld $\mathbf{F} = -mg\mathbf{e}_z$. Es wirkt die Newton-Reibung $F_R = -Kv^2$. Hierbei ist $v$ die Geschwindigkeit. Die Reibungskraft wirkt in die entgegengesetzte Richtung des Falls. Nehmen sie an, dass der Körper zum Zeitpunkt $t = 0$ in Ruhe ist.

Stellen Sie die Newton'sche Bewegungsgleichung auf und bestimmen Sie den Geschwindigkeitsverlauf $v(t)$. Welche Maximalgeschwindigkeit wird für $t \to \infty$ erreicht?

**Hinweis:**

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \text{artanh}\ x + \text{const.}$$

Dabei ist artanh der Areatangens Hyperbolicus, die Umkehrfunktion des Tangens Hyperbolicus. Dieser hat die Eigenschaften

$$\tanh(x \to \infty) = 1 \qquad \tanh(0) = 0 \qquad \tanh(-x) = -\tanh x$$

**Lösung:**
Die Aufgabe ist schwierig zu bepunkten, da nicht der gleiche Lösungsweg zu erwarten ist. Es gibt **[4]** auf das richtige $v(t)$ und Teilpunkte für richtige Schritte mit falschem Ergebnis. Weitere **[2]** für die Maximalgeschwindigkeit.

Der Körper bewegt sich nur entlang der z-Achse. Die Bewegungsgleichung lautet

$$m\dot{v} = m\ddot{z} = -mg + Kv^2 \tag{13}$$

Diese Differentialgleichung für $v$ kann durch Trennung der Variablen integriert werden

$$\int_0^t d\tau = -\int_{v(0)}^{v(t)} d\tilde{v} \frac{m}{mg - K\tilde{v}^2} \tag{14}$$

Wir substituieren $y = \tilde{v}/v_\infty$ mit $v_\infty \equiv \sqrt{mg/K}$ und verwenden $v(0) = 0$

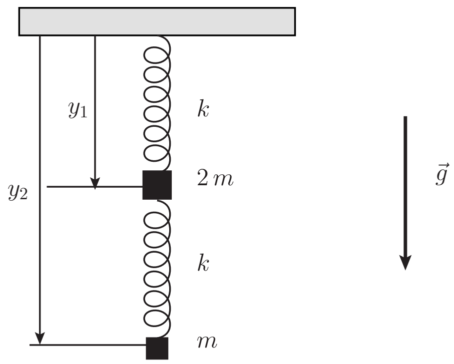
$$t = -\frac{1}{g}\int_0^{v(t)} \frac{d\tilde{v}}{1 - \frac{K}{g}\tilde{v}^2} = -\frac{v_\infty}{g}\int_0^{v(t)/v_\infty} \frac{dy}{1-y^2} = -\frac{v_\infty}{g}\text{artanh}(y)\Big|_{y=0}^{v(t)/v_\infty} \tag{15}$$

$$\Rightarrow v(t) = -v_\infty \tanh\left(\frac{gt}{v_\infty}\right) \tag{16}$$

Die Maximalgeschwindigkeit ist $v_\infty = \sqrt{mg/K}$.

# 5 Federn [10 Punkte]

Zwei Massen $2m$ und $m$ sind im Schwerefeld der Erde an zwei elastischen Federn wie in der Abbildung skizziert aufgehängt. Die Federkräfte genügen dem Hookeschen Gesetz mit Federkonstanten $k_1 = k_2 = k$. Die Bewegung erfolge nur in vertikaler Richtung. Die Federlängen im kräftefreien Zustand seien $l_1$ bzw. $l_2$




(a) Bestimmen Sie die Positionen $y_1$, $y_2$ der beiden Massen im Gleichgewicht

(b) Bestimmen Sie die Eigenfrequenzen des Systems.

**Lösung:**
Die kinetische Energie ist

$$T = \frac{1}{2} \cdot 2m \cdot \dot{y_1}^2 + \frac{1}{2} m \dot{y_2}^2 \tag{17}$$

**[1]**

Das Potential setzt sich zusammen aus der Spannung beider Federn und der potentiellen Energie der Massen im Schwerefeld

$$U = \frac{k}{2}(y_1 - l_1)^2 + \frac{k}{2}(y_2 - y_1 - l_2)^2 - 2mgy_1 - mgy_2 \tag{18}$$

**[2]**

(a) Wir bestimmen die Gleichgewichtslage als Minimum des Potentials

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial y_1} &= k(y_1 - l_1) + k(y_1 - y_2 + l_2) - 2mg \stackrel{!}{=} 0 \\ \frac{\partial U}{\partial y_2} &= k(y_2 - y_1 - l_2) - mg \stackrel{!}{=} 0 \end{aligned} \tag{19}$$

Verwende die zweite Gleichung um $y_1 - y_2 + l_2$ in der ersten zu eliminieren

$$\begin{aligned} 0 &= k(y_1 - l_1) - mg - 2mg \\ \Rightarrow y_1 &= l_1 + \frac{3mg}{k} && \text{im GGW} \\ y_2 &= y_1 + l_2 + \frac{mg}{k} = l_1 + l_2 + \frac{4mg}{k} && \text{im GGW} \end{aligned} \tag{20}$$

**[3]**

Alternativ kann man die Euler-Lagrange Gleichungen unter der Annahme $\ddot{y_1} = 0 = \ddot{y_2}$ lösen.

(b) Zur Bestimmung der Eigenfrequenzen kleiner Schwingungen um die Gleichgewichtslage benötigen wir die Hessematrix des Potentials, sowie die Massenmatrix

$$\begin{aligned} V &\equiv \frac{\partial^2 U}{\partial y_k \partial y_l}\Big|_{\text{GGW}} &= \begin{pmatrix} 2k & -k \\ -k & k \end{pmatrix} \\ M &\equiv \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{y_1} \partial \dot{y_2}} &= \begin{pmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{21}$$

**[2]**

Die Eigenfrequenzen $\omega$ erhält man aus

$$\begin{aligned} 0 = \det(V - \omega^2 M) &= \det \begin{pmatrix} 2k - 2m\omega^2 & -k \\ -k & k - m\omega^2 \end{pmatrix} \\ &= 2(k - m\omega^2)^2 - k^2 = 2m^2\omega^4 - 4mk\omega^2 + k^2 \end{aligned} \tag{22}$$

**[1]**

Dies ist eine quadratische Gleichung in $\omega^2$. Löse z.B. mit pq-Formel

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \pm \sqrt{\frac{k^2}{m^2} - \frac{k^2}{2m^2}} = \frac{k}{m}\left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \tag{23}$$

Die Eigenfrequenzen $\omega_\pm$ sind die positiven Wurzeln.

**[1]**