Theoretische Physik: Mechanik

Probeklausur
Fakultät für Physik
Technische Universität München

29.09.2017

Bearbeitungszeit 90 Minuten
Es gibt insgesamt 45 Punkte (2 Minuten pro Punkt), wobei Sie bei den Kurzfragen vermutlich schneller sein werden.

1 Kurzfragen [9 Punkte]

(a) Erklären Sie die folgenden Begriffe in jeweils **einem** Satz

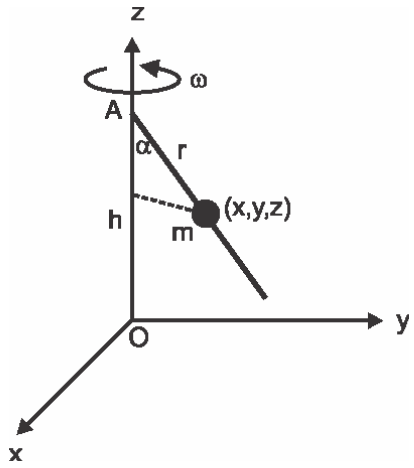
- Anholonome Zwangsbedingung. Geben Sie ein Besipiel an.
- Hauptachsen
- Wirkungsprinzip
- Konservative Kraft

(b) Geben Sie an, ob die folgenden Aussagen **immer** wahr sind

- Bei einer gebundenen Bewegung im Gravitationsfeld einer Punktmasse sind die Bahnen geschlossen
- Zwangskräfte leisten keine Arbeit
- Das Newtonsche Gesetz hat in allen Bezugssystemen dieselbe Form.
- Die Hamiltonfunktion ausgewertet auf einer Bahnkurve gibt die Gesamtenergie des Systems an.
- Wenn ein freier Kreisel mit konstanter Winkelgeschwindigkeit rotiert, muss die Drehachse eine mögliche Hauptachse sein.

2 Rotierende Masse [10 Punkte]

Am Punkt A sei in der Höhe h über der xy-Ebene eine masselose Stange im festen Winkel $0 < \alpha < \pi$ zur Achse OA befestigt. Die Stange rotiere mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω um die Achse OA. Unter dem Einfluss der Rotation und einer konstanten Schwerebeschleunigung g bewege sich ein Teilchen der Masse m auf der Stange. Der Abstand zwischen A und der Masse sei mit $r(t)$ bezeichnet.



(a) Die kartesischen Koordinaten des Teilchen lauten zur Zeit t:

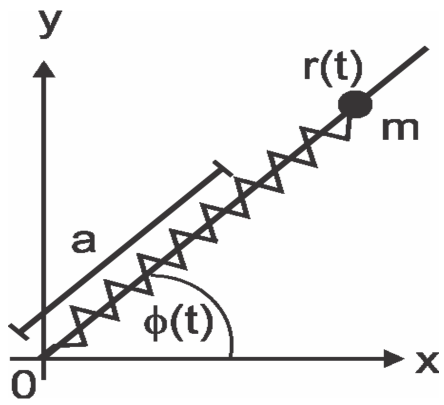
$$x(t) = r(t) \sin\alpha \cos(\omega t)$$
$$y(t) = r(t) \sin\alpha \sin(\omega t)$$
$$z(t) = h - r(t) \cos\alpha$$

Bestimmen Sie daraus die Lagrangefunktion L in der verallgemeinerten Koordinate r und die dazugehörige Euler-Lagrange-Gleichung.

(b) Bestimmen Sie die stationäre Lösung r_0. Geben Sie den Wertebereich von α an, für den eine stationäre Lösung (d.h. $r = $ konst.) möglich ist.

3 Schwingende Masse [10 Punkte]

Ein Massenpunkt der Masse m gleite reibungsfrei auf einer horizontal angeordneten masselosen Stange. Er sei durch eine Feder mit Federkonstante k und Gleichgewichtslänge a mit dem Ursprung verbunden. Die Feder bewirke eine harmonische Kraft $F = -k(r-a)$ auf den Massenpunkt. Die Stange kann in der Ebene frei rotieren, die Schwerkraft spielt hier keine Rolle.



(a) Stellen Sie die Lagrangefunktion des Massenpunktes in Polarkoordinaten $r(t)$ und $\phi(t)$ auf.
Hinweis: Die Geschwindigkeit in Polarkoordinaten ist gegeben durch $\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\phi}\mathbf{e}_\phi$

(b) Gibt es zyklische Koordinaten? Welche physikalische Bedeutung haben die Erhaltungsgrößen und wie lauten die entsprechenden Erhaltungssätze?

(c) Eliminieren Sie unter Ausnutzung der Erhaltungsgrößen die zyklischen Koordinaten, und bringen Sie die Bewegungsgleichung für r in die Form $m\ddot{r} = F(r)$. Bestimmen Sie $F(r)$.

(d) Beweisen Sie, dass für die stationäre Lösung r_0 im Allgemeinen $r_0 \geq a$ gilt und nur für eine spezielle Anfangsbedingung $r_0 = a$.

4 Fallschrimspringer [6 Punkte]

Ein Körper der Masse m falle vertikal im homogenen Schwerefeld $\mathbf{F} = -mg\mathbf{e}_z$. Es wirkt die Newton-Reibung $F_R = -Kv^2$. Hierbei ist v die Geschwindigkeit. Die Reibungskraft wirkt in die entgegengesetzte Richtung des Falls. Nehmen sie an, dass der Körper zum Zeitpunkt $t = 0$ in Ruhe ist.

Stellen Sie die Newton'sche Bewegungsgleichung auf und bestimmen Sie den Geschwindigkeitsverlauf $v(t)$. Welche Maximalgeschwindigkeit wird für $t \to \infty$ erreicht?

Hinweis:

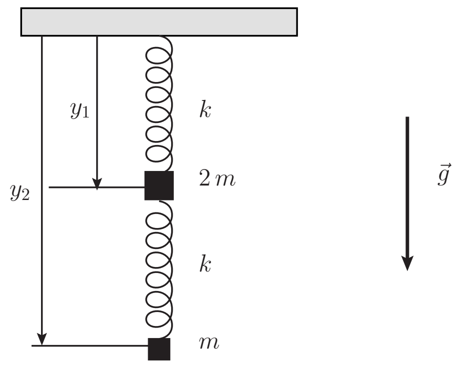
$$\int \frac{dx}{1 - x^2} = \operatorname{artanh} x + \text{const.}$$

Dabei ist artanh der Areatangens Hyperbolicus, die Umkehrfunktion des Tangens Hyperbolicus. Dieser hat die Eigenschaften

$$\tanh(x \to \infty) = 1 \qquad \tanh(0) = 0 \qquad \tanh(-x) = -\tanh x$$

5 Federn [10 Punkte]

Zwei Massen $2m$ und m sind im Schwerefeld der Erde an zwei elastischen Federn wie in der Abbildung skizziert aufgehängt. Die Federkräfte genügen dem Hookeschen Gesetz mit Federkonstanten $k_1 = k_2 = k$. Die Bewegung erfolge nur in vertikaler Richtung. Die Federlängen im kräftefreien Zustand seien l_1 bzw. l_2



(a) Bestimmen Sie die Positionen y_1, y_2 der beiden Massen im Gleichgewicht

(b) Bestimmen Sie die Eigenfrequenzen des Systems.