

Theoretische Physik: Mechanik

Blatt 4

Fakultät für Physik

Technische Universität München

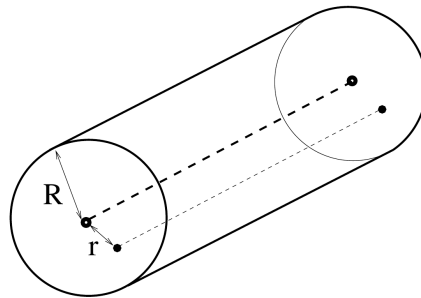
27.09.2017

Inhaltsverzeichnis

1	Trägheitsmoment & Satz von Steiner	2
2	Trägheitstensor einer dünnen Scheibe	2
3	Drehende Scheibe	3
4	Drehende Scheibe auf Pendel	5
5	Seilrollen	6
6	Schwingende Scheibe	7

1 Trägheitsmoment & Satz von Steiner

Berechnen Sie das Trägheitsmoment eines Zylinders um seine Symmetrieachse. Der Zylinder habe den Radius R und die Masse M . Benutzen Sie dann den Satz von Steiner um das Trägheitsmoment um eine Achse zu berechnen welche parallel zur Symmetrieachse in einem Abstand r verläuft.



Lösung:

Das Trägheitsmoment entlang der Symmetrieachse beträgt

$$I_A = \int_{\text{Zylinder}} \rho (x^2 + y^2) dx dy dz = \rho l \int_0^R r^3 dr \int_0^{2\pi} d\phi = \frac{M}{\pi R^2} \frac{R^4}{4} 2\pi = \frac{1}{2} M R^2 \quad (1)$$

Das Trägheitsmoment entlang der verschobenen Achse beträgt

$$I_B = I_A + M r^2 = \frac{1}{2} M (R^2 + 2r^2) \quad (2)$$

2 Trägheitstensor einer dünnen Scheibe

Berechnen Sie den Trägheitstensor für eine dünne, homogene Scheibe mit Radius R und Masse M . Nehmen Sie dabei an, dass sich der Drehpunkt in der Mitte der Scheibe befindet und dass die z -Achse mit der Symmetrieachse der Scheibe übereinstimmt. Die Massendichte der Scheibe ist gegeben durch

$$\rho(x, y, z) = \begin{cases} \frac{M}{\pi R^2} \delta(z) & \text{wenn } x^2 + y^2 \leq R^2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (3)$$

Dabei ist die Delta-Distribution δ durch folgenden Zusammenhang definiert

$$\int \delta(z) f(z) dz = f(0) \quad (4)$$

Lösung:

$$\Theta_{ij} = \int_M (\delta_{ij} r^2 - x_i x_j) dm = \int_V (\delta_{ij} \vec{x}^2 - x_i x_j) \rho(\vec{x}) d^3x$$

$$\Theta_{zz} = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^R r dr \int_{-\infty}^{+\infty} dz \frac{M}{\pi R^2} \delta(z) (r^2 + z^2 - zz) = 2\pi \frac{M}{\pi R^2} \int_0^R r^3 dr = \frac{1}{2} MR^2$$

$$\Theta_{xx} = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^R r dr \int_{-\infty}^{+\infty} dz \frac{M}{\pi R^2} \delta(z) (r^2 + z^2 - r^2 \cos^2 \phi) = \frac{M}{\pi R^2} \int_0^{2\pi} \sin^2 \phi d\phi \int_0^R r^3 dr = \frac{1}{4} MR^2$$

$$\Theta_{yy} = \Theta_{xx} \text{ aus Symmetriegründen}$$

$$\Theta_{xy} = \Theta_{yx} = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^R r dr \int_{-\infty}^{+\infty} dz \frac{M}{\pi R^2} \delta(z) (r \sin \phi \cdot r \cos \phi) = 0$$

$$\Theta_{xz} = \Theta_{zx} = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^R r dr \int_{-\infty}^{+\infty} dz \frac{M}{\pi R^2} \delta(z) (r \cos \phi \cdot z) = 0$$

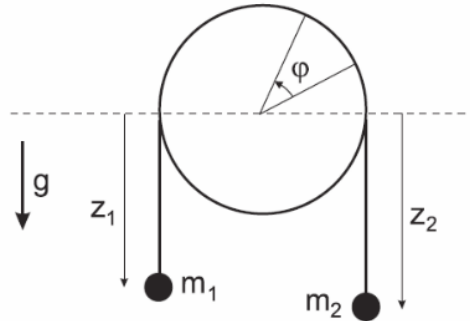
$$\Theta_{yz} = \Theta_{zy} = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^R r dr \int_{-\infty}^{+\infty} dz \frac{M}{\pi R^2} \delta(z) (r \sin \phi \cdot z) = 0$$

$$\Theta = \begin{pmatrix} 1/4 MR^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 MR^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 MR^2 \end{pmatrix}$$

3 Drehende Scheibe

Eine kreisförmige Scheibe mit Radius R , Gesamtmasse M und Trägheitsmoment $\Theta = \frac{1}{2} MR^2$ dreht sich um ihre feste horizontale Symmetrieachse. Über die Scheibe läuft ohne zu rutschen ein masseloses Seil der Länge l . an den Seilenden sind die Massen m_1 und m_2 befestigt (siehe Skizze). Das System steht unter dem Einfluss der Schwerkraft.

- Bestimmen Sie die Lagrange-Funktion L und wählen Sie dabei zunächst z_1, z_2 und ϕ als generalisierte Koordinaten.
- Eliminieren Sie aufgrund der Zwangsbedingungen die Variablen z_2 und ϕ . Achten sie dabei auf die Vorzeichen.
- Bestimmen sie die Lagrange-Funktion $L(z_1, \dot{z}_1)$ und daraus die Bewegungsgleichung. Geben sie die allgemeine Lösung an.



Lösung:

(a) Wir berechnen den Lagrangian aus kinetischer und potentieller Energie

$$T = \frac{m_1}{2} \dot{z}_1^2 + \frac{m_2}{2} \dot{z}_2^2 + \frac{\Theta}{2} \dot{\phi}^2 \quad (5)$$

$$V = -m_1 g z_1 - m_2 g z_2 \quad (6)$$

$$L = \frac{m_1}{2} \dot{z}_1^2 + \frac{m_2}{2} \dot{z}_2^2 + \frac{\Theta}{2} \dot{\phi}^2 + m_1 g z_1 + m_2 g z_2 \quad (7)$$

(b) Die Zwangsbedingungen sind

$$\dot{z}_1 = R \dot{\phi} \quad (8)$$

$$l = z_2 + z_1 + \text{const.} \Rightarrow \dot{z}_2 = -\dot{z}_1 \quad (9)$$

Die Konstante ist hierbei die Länge des Seils, das auf der Rolle aufliegt.

(c) Wir erhalten

$$L = \frac{1}{2} \left(m_1 + m_2 + \frac{\Theta}{R^2} \right) \dot{z}_1^2 + (m_1 - m_2) g z_1 + \text{const.} \quad (10)$$

$$L = \frac{1}{2} \left(m_1 + m_2 + \frac{M}{2} \right) \dot{z}_1^2 + (m_1 - m_2) g z_1 + \text{const.}$$

Die Bewegungsgleichung ist daher

$$\left(m_1 + m_2 + \frac{M}{2} \right) \ddot{z}_1 = (m_1 - m_2) g \quad (11)$$

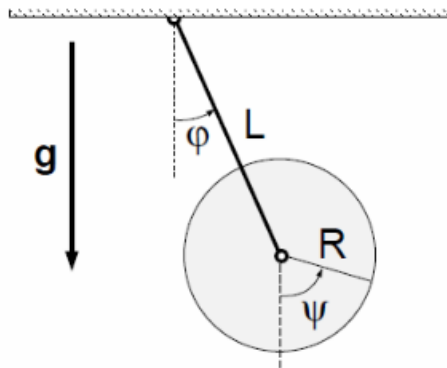
$$\Rightarrow \ddot{z}_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + M/2} g \equiv g_{\text{eff}}$$

Dies entspricht einem freien Fall mit effektiver Erdbeschleunigung g_{eff} .

$$z_1(t) = z_1(0) + \dot{z}_1(0) \cdot t + \frac{1}{2} g_{\text{eff}} t^2 \quad (12)$$

4 Drehende Scheibe auf Pendel

Betrachten Sie ein ebenes Pendel, das aus einer masselosen Stange der Länge L und einer Scheibe mit Masse M und Radius R besteht, die am Ende der Stange in ihrem Mittelpunkt gelagert ist. Die Stange erlaubt Schwingungen in der Ebene und die Scheibe kann sich um ihre Symmetrieachse (die senkrecht zur Schwingungsebene liegt) drehen. (siehe Skizze)



Bestimmen sie die Lagrangefunktion $L(\phi, \dot{\phi}, \psi, \dot{\psi})$. Bestimmen Sie die beiden Bewegungsgleichungen. Mit welcher Frequenz pendelt die Scheibe, wenn sie nur leicht ausgelenkt wird (d.h. $\phi \ll 1 \Rightarrow \sin \phi \approx \phi$)?

Lösung:

Für die kinetische Energie betrachten wir die Drehung der Scheibe mit ϕ um die Aufhängung an der Decke und mit ψ um das Ende der Stange separat. Das Trägheitsmoment der Drehung mit ϕ ist ML^2 (Satz von Steiner). Das Trägheitsmoment der Drehung mit ψ ist $\frac{1}{2}MR^2$ (siehe z.B. Aufgabe 3)

$$L = T - U = \frac{1}{2}ML^2\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\dot{\psi}^2 + Mg L \cos \phi$$

Alternativ erhält man den ersten Term der kinetischen Energie als die Energie der Translation des Mittelpunkts der Scheibe. Dieser bewegt sich mit Geschwindigkeit $v_R = L\dot{\phi}$.

Die Bewegungsgleichung für ψ

$$0 = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} - \frac{\partial L}{\partial \psi} = \frac{1}{2}MR^2\ddot{\psi} \Rightarrow \dot{\psi} = \text{const.} \equiv \Omega \Rightarrow \psi = \psi_0 + \Omega t$$

Die Bewegungsgleichung für ϕ

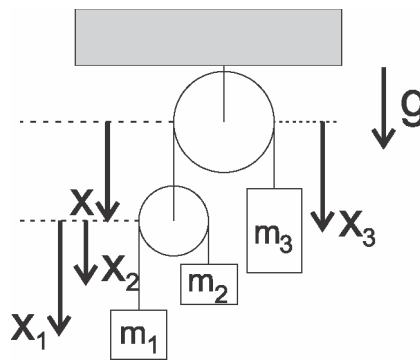
$$0 = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} - \frac{\partial L}{\partial \phi} = ML^2\ddot{\phi} + MLg \sin \phi$$

$$\ddot{\phi} + \omega^2 \sin \phi = 0 \quad \omega \equiv \sqrt{\frac{g}{L}}$$

Für kleine Auslenkungen erhalten wir mit $\sin \phi \approx \phi$ die Bewegungsgleichung des harmonischen Oszillators und damit eine Schwingungsfrequenz von ω .

5 Seilrollen

Eine Punktmasse m_3 hängt an einem Ende eines masselosen Seils fester Länge, das über eine fixierte, reibungsfreie und masselose Scheibe läuft. Am anderen Ende des Seils ist eine weitere derartige Scheibe befestigt, über die ein zweites masseloses Seil fester Länge läuft. An diesem Seil sind zwei Punktmassen m_1 und m_2 befestigt (siehe Skizze). Auf alle drei Massen wirkt die Schwerkraft senkrecht nach unten.



- (a) Bestimmen sie die Lagrangefunktion $L(x_1, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_3)$. Verwenden sie hierzu die Zwangsbedingungen um x und x_2 zu eliminieren.
Hinweis: Das Ausmultiplizieren quadratischer Terme ist für die Lösung dieser Aufgabe nicht nötig.
- (b) Geben sie anhand der Lagrange-Funktion an, welche Variable für $m_1 = m_2$ zyklisch ist. Bestimmen sie die entsprechende Erhaltungsgröße.

Lösung:

- (a) Mit

$$x + x_3 = \text{const. und } x_1 + x_2 = \text{const.}$$

erhält man die kinetischen Energien

$$T_1 = \frac{m_1}{2}(\dot{x} + \dot{x}_1)^2 = \frac{m_1}{2}(\dot{x}_1 - \dot{x}_3)^2$$

$$T_2 = \frac{m_2}{2}(\dot{x} + \dot{x}_2)^2 = \frac{m_1}{2}(\dot{x}_1 - \dot{x}_3)^2$$

$$T_3 = \frac{m_3}{2} \dot{x}_3^2$$

Die potentiellen Energien sind (Mit Nullpunkt auf Höhe der oberen Scheibe)

$$V_1 = -m_1 g(x + x_1) = m_1 g(x_3 - x_1) + \text{const.}$$

$$V_2 = -m_2 g(x + x_2) = m_2 g(x_3 + x_1) + \text{const.}$$

$$V_3 = -m_3 g x_3$$

Wir ignorieren die Konstanten und erhalten die Lagrange-Funktion

$$L = \frac{m_1}{2} (\dot{x}_1 - \dot{x}_3)^2 + \frac{m_1}{2} (\dot{x}_1 - \dot{x}_3)^2 + \frac{m_3}{2} \dot{x}_3^2 - m_1 g(x_3 - x_1) - m_2 g(x_3 + x_1) + m_3 g x_3$$

(b) Für $m_1 = m_2$ erhalten wir

$$L = m_1 (\dot{x}_3^2 + \dot{x}_1^2) + \frac{m_3}{2} \dot{x}_3^2 + (m_3 - 2m_1) g x_3$$

L hängt nicht explizit von x_1 ab. x_1 ist zyklisch. Der zu x_1 konjugierte Impuls ist erhalten:

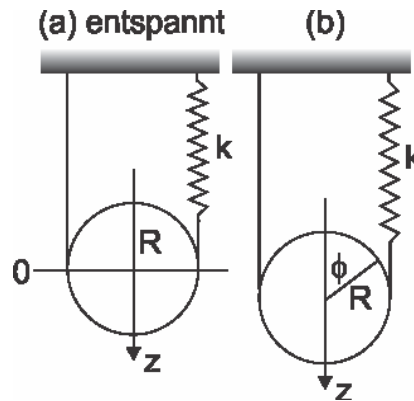
$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = 2m_1 \dot{x}_1 = \text{const.}$$

6 Schwingende Scheibe

Eine dünne Scheibe mit Radius R der Masse M wird von einer masselosen Schnur gehalten, wobei ein Ende der Schnur an der Decke festgemacht, und das andere Ende mit einer harmonischen Feder mit Federkonstante k verbunden ist (das Potenzial der Feder beträgt also $V_{\text{Feder}} = (k/2) \cdot (\text{Auslenkung der Feder})^2$). Die Scheibe darf unter dem Einfluss der Gravitationsbeschleunigung g entlang der z -Achse über die Änderung der Federauslenkung auf der Schnur rollen, jedoch nicht rutschen. Des Weiteren ist ihre Schwerpunktsbewegung auf die Vertikale beschränkt, d.h. entlang der in der Skizze gezeichneten z -Achse.

(a) Finden Sie die Lagrange Funktion $L(\phi, \dot{\phi})$ für das gegebene System (ϕ : siehe Skizze). Hinweis: Das Trägheitsmoment der Scheibe ist gegeben durch $\frac{1}{2}MR^2$. Desweiteren führt die Einschränkung, dass die Seillänge konstant und nur die Länge der Feder variabel ist, dazu, dass Rollen um den Winkel ϕ in einer Höhenverschiebung $\Delta z_S = R\phi$ des Schwerpunktes der Scheibe und in einer Änderung der Auslenkung der Feder um $\Delta l_F = 2R\phi$ resultiert. Wählen Sie den Winkel ϕ so, dass $\phi = 0$ der entspannten Feder entspricht (siehe Skizze (a)). Ebenso soll $z_S = 0$ die Position des Schwerpunktes bei entspannter Feder sein.

(b) Leiten sie die Bewegungsgleichung her.



(c) Zeigen Sie, dass die Gleichgewichtslage gegeben ist durch $\phi_0 = \frac{Mg}{4kR}$

Lösung:

a) Aus dem Hinweis $z_S = R\phi$ und $l_F = 2R\phi$. Das Potential setzt sich zusammen aus der Spannung der Feder und der Energie der Scheibe im Schwerfeld

$$V = \frac{k}{2}l_F^2 - Mgz_S = 2kR^2\phi^2 - MgR\phi$$

Die kinetische Energie setzt sich zusammen aus der Translation des Schwerpunkts und der Rotation der Scheibe

$$T = \frac{M}{2}z_S^2 + \frac{\Theta}{2}\dot{\phi}^2 = \frac{M}{2}R^2\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}MR^2\dot{\phi}^2$$

Wir erhalten die Lagrangefunktion

$$L = T - V = \frac{3}{4}MR^2\dot{\phi}^2 - 2kR^2\phi^2 + MgR\phi$$

b) Aus der Lagrangefunktion ergibt sich die Bewegungsgleichung

$$0 = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} - \frac{\partial L}{\partial \phi} = \frac{3}{2}MR^2\ddot{\phi} + 4kR^2\phi - MgR$$

Nach $\ddot{\phi}$ aufgelöst

$$\ddot{\phi} = -\frac{8k}{3M}\phi + \frac{2g}{3R}$$

c) Die Gleichgewichtslage ϕ_0 :

$$\ddot{\phi} = 0 \Rightarrow Mg = 4kR\phi_0 \Rightarrow \phi_0 = \frac{Mg}{4kR}$$