

Theoretische Physik: Mechanik

Blatt 3

Fakultät für Physik

Technische Universität München

27.09.2017

Inhaltsverzeichnis

1	Keplers 3. Gesetz	2
2	Teilchen im konstanten Zentralkraftfeld	3
3	Das Wirkungsintegral	4
4	Streuung im Zentralkraftfeld	5
5	Zentralpotential	7

1 Keplers 3. Gesetz

Das 3. Keplersche Gesetz für die Planetenbewegung besagt, dass das Verhältnis T^2/a^3 für alle Planeten gleich ist. Hier ist T die Umlaufdauer und a die große Halbachse der Ellipsenbahn. Dieses Gesetz gilt nur für ein Zweikörperproblem unter der Annahme, dass die Masse der Sonne M sehr groß ist gegenüber der Masse des Planeten m . Beweisen Sie dieses Gesetz, ausgehend von der Drehimpulserhaltung.

Hinweis: Starten Sie mit dem Ausdruck für den Betrag des Drehimpulses $L = \mu r^2 \dot{\theta}$ (μ ist die reduzierte Masse, r der momentane Abstand Sonne-Planet und θ der Winkel des Fahrstrahls zur x -Achse) und integrieren Sie beide Seiten dieser Gleichung über die Umlaufzeit. Benutzen Sie dann die Beziehungen für Aphel- und Perihel-Achse aus der Vorlesung und die Näherung $m \ll M$.

Lösung:

Die Drehimpulserhaltung:

$$L = \mu r^2 \dot{\theta} = \text{konst.} \quad (1)$$

Integration über die Umlaufdauer liefert:

$$\int_0^T L dt = \int_0^T \mu r^2 \dot{\theta} dt \Rightarrow LT = \int_0^{2\pi} \mu r^2 d\theta = 2\mu \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} r^2 d\theta = 2\mu \pi ab \quad (2)$$

Jetzt benutzen wir die Beziehungen für die Halbachsen der Ellipse (siehe Vorlesung S. 28):

$$p = \frac{b^2}{a}, \quad \epsilon = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2} \Rightarrow a = \frac{p}{1 - \epsilon^2}, \quad b = \frac{p}{\sqrt{1 - \epsilon^2}} \quad (3)$$

Damit bekommen wir:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2 \mu^2 b^2}{L^2 a} = \frac{4\pi^2 \mu^2 p}{L^2} \quad (4)$$

Mithilfe des Ausdrucks für den Parameter p (siehe Vorlesung S. 30):

$$p = \frac{L^2}{GMm\mu} \quad (5)$$

bekommen wir das Endergebnis:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2 \mu}{GMm} \quad (6)$$

Die rechte Seite der letzten Gleichung ist nicht konstant (hängt von der Masse m ab):

$$\mu = \frac{Mm}{M+m} \quad (7)$$

und damit:

$$\frac{4\pi^2\mu}{GMm} = \frac{4\pi^2}{G(M+m)} \quad (8)$$

Für den Fall $m \ll M$ vereinfacht sich der Ausdruck zu:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2\mu}{GMm} = \frac{4\pi^2}{G(M+m)} \approx \frac{4\pi^2}{GM} = \textit{konst.} \quad (9)$$

2 Teilchen im konstanten Zentralkraftfeld

Ein Teilchen der Masse m mit Ortsvektor \vec{r} bewege sich in einem dreidimensionalen Kraftfeld, wobei die Kraft in Richtung auf den Ursprung zeigt und ihr Betrag K unabhängig vom Ort ist.

- (a) Wie lautet die Newton'sche Bewegungsgleichung für dieses Problem? Bestimmen Sie die zugehörige potentielle Energie und geben Sie den Energieerhaltungssatz an.
- (b) Zeigen Sie, ausgehend von der Newton'schen Bewegungsgleichung, dass auch der Drehimpuls erhalten ist. Wie kann man daraus schließen, dass die Bewegung in einer Ebene erfolgt?
- (c) Beweisen Sie den Zusammenhang

$$\vec{r}^2 = \frac{\vec{L}^2}{m^2 r^2} + \dot{r}^2 \quad (10)$$

Hier ist r der Abstand vom Ursprung und \vec{L} ist der Drehimpuls.

Hinweis: Berechnen Sie \vec{L}^2 und benutzen sie $(\vec{a} \times \vec{b})^2 = |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$.

Lösung:

- (a) Die Newtonsche Bewegungsgleichung lautet hier:

$$m\vec{\ddot{r}} = \vec{K}(\vec{r}) = -K\vec{e}_r \quad (11)$$

Es liegt ein Zentralkraftfeld vor, sodass die Kraft konservativ ist. Integration in radialer Richtung liefert die potentielle Energie:

$$V(\vec{r}) = - \int \vec{K}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = K \int \vec{e}_r \cdot d\vec{r} = K \int dr = K|\vec{r}| \quad (12)$$

Die Integrationskonstante ist hier zu Null angenommen.

Der Energieerhaltungssatz lautet somit:

$$E = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 + K|\vec{r}| \quad (13)$$

(b) Weil das vorliegende Kraftfeld ein Zentralfeld ist, ist der Drehimpuls eine Erhaltungsgröße. Expliziter Nachweis:

$$\frac{d}{dt} \vec{L} = \frac{d}{dt} m \vec{r} \times \dot{\vec{r}} = m \dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}} + m \vec{r} \times \ddot{\vec{r}} = 0 - K \vec{r} \times \vec{e}_r = 0 \quad (14)$$

Wegen $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ liegen alle Bahnpunkte in einer Ebene, deren Normalenvektor durch den konstanten Drehimpulsvektor \vec{L} gegeben ist.

(c) Für eine ebene Bewegung gilt in Polarkoordinaten einerseits

$$\vec{r}^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 \quad (15)$$

und andererseits

$$L = L_z = m r^2 \dot{\varphi}. \quad (16)$$

Wenn man hier $\dot{\varphi}$ eliminiert, erhält man:

$$\vec{r}^2 = \dot{r}^2 + \frac{L^2}{m^2 r^2} \quad (17)$$

Alternativ:

$$\vec{L}^2 = m^2 (\vec{r} \times \dot{\vec{r}})^2 = m^2 (\vec{r}^2 \dot{\vec{r}}^2 - (\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}})^2) = m^2 \vec{r}^2 (\dot{\vec{r}}^2 - (\vec{e}_r \cdot \dot{\vec{r}})^2) = m^2 \vec{r}^2 (\dot{\vec{r}}^2 - \dot{r}^2) \quad (18)$$

Daraus ergibt sich die gesuchte Beziehung

$$\vec{r}^2 = \dot{r}^2 + \frac{L^2}{m^2 r^2}. \quad (19)$$

3 Das Wirkungsintegral

Wir betrachten die eindimensionale Bewegung eines Teilchens der Masse m in einem homogenen Schwerfeld entlang der vertikalen z -Achse. Benutzen Sie die Koordinate z für die Höhe des Teilchens. Die potenzielle Energie ist $V(z) = mgz$. Berechnen Sie das Wirkungsintegral:

$$W = \int_{t_0=0}^{t_1} L(\dot{z}(t), z(t), t) dt, \quad t_1 > 0 \quad (20)$$

- (a) für die tatsächliche Bahnkurve $z(t) = -\frac{1}{2}gt^2$;
 (b) für die virtuellen Bahnkurven $z_\nu(t) = a_\nu t^\nu$, $\nu > \frac{1}{2}$. Dabei ist a_ν so definiert, dass $z_\nu(t_1) = z(t_1) = -\frac{1}{2}gt_1^2$. Zeigen Sie, dass das Wirkungsintegral gegeben ist durch

$$W = \frac{mg^2 t_1^3}{2} \left[\frac{\nu^2}{4(2\nu - 1)} + \frac{1}{\nu + 1} \right]. \quad (21)$$

- (c) Zeigen Sie, dass der Fall $\nu = 2$ zu einem Extremwert des Wirkungsintegrals führt. Hilfe: Betrachten Sie die Ableitung von W nach ν .

Lösung:

(a)

$$z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 \quad \Rightarrow \quad \dot{z} = -gt \quad (22)$$

$$L = T - V = \frac{m}{2}\dot{z}^2 - mgz = \frac{m}{2}g^2t^2 + \frac{m}{2}g^2t^2 = mg^2t^2 \quad (23)$$

$$W = \int_{t_0=0}^{t_1} L(\dot{z}(t), z(t), t) dt = \frac{1}{3}mg^2t_1^3 \quad (24)$$

(b) Für die virtuellen Bahnen $z_\nu(t) = a_\nu t^\nu$, $\nu > \frac{1}{2}$.Aus $a_\nu t_1^\nu = -\frac{1}{2}gt_1^2 \Rightarrow a_\nu = -\frac{1}{2}gt_1^{(2-\nu)}$. Somit folgt:

$$z_\nu(t) = -\frac{1}{2}gt_1^{(2-\nu)}t^\nu \quad \Rightarrow \quad \dot{z}_\nu(t) = -\frac{1}{2}g\nu t_1^{(2-\nu)}t^{\nu-1} \quad (25)$$

Die Lagrange-Funktion lautet:

$$L = \frac{m}{2} \left[-\frac{1}{2}g\nu t_1^{(2-\nu)}t^{\nu-1} \right]^2 + \frac{m}{2}g^2t_1^{(2-\nu)}t^\nu = \frac{m}{2}g^2t_1^{(2-\nu)} \left[\frac{\nu^2}{4}t_1^{(2-\nu)}t^{2(\nu-1)} + t^\nu \right] \quad (26)$$

Anschließend lässt sich das Wirkungsintegral wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned} W &= \int_{t_0=0}^{t_1} L(\dot{z}(t), z(t), t) dt \\ &= \frac{m}{2}g^2t_1^{(2-\nu)} \left[\frac{\nu^2}{4(2\nu-1)}t_1^{(2-\nu)}t_1^{(2\nu-1)} + \frac{1}{\nu+1}t_1^{\nu+1} \right] \\ &= \frac{m}{2}g^2 \left[\frac{\nu^2}{4(2\nu-1)}t_1^{(4-2\nu+2\nu-1)} + \frac{1}{\nu+1}t_1^{(2-\nu+\nu-1)} \right] \\ &= \frac{m}{2}g^2t_1^3 \left[\frac{\nu^2}{4(2\nu-1)} + \frac{1}{\nu+1} \right] \end{aligned} \quad (27)$$

(c) Wir sollen zeigen, dass $\frac{\partial \hat{W}}{\partial \nu} \Big|_{\nu=2} = 0$, wobei $\hat{W} = \frac{W}{mg^2t_1^{3/2}}$

$$\frac{\partial \hat{W}}{\partial \nu} = \left[\frac{2\nu(2\nu-1) - 2\nu^2}{4(2\nu-1)^2} - \frac{1}{(\nu+1)^2} \right] = 0 \quad \text{für } \nu = 2 \quad (28)$$

4 Streuung im ZentralkraftfeldBerechnen Sie den differentiellen Wirkungsquerschnitt $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ für die Streuung im abstoßenden Zentralkraftfeld $U(r) = \frac{\beta}{r^2}$ mit $\beta > 0$.Hinweis: $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-(bx)^2}} dx = \frac{1}{b} \arcsin\left(\frac{bx}{a}\right)$

Lösung:

Der Perihelabstand r_{min} ergibt sich durch folgende Energiebetrachtung:

$$E = \frac{\mu}{2} v_{\infty}^2 = \frac{\beta}{r_{min}^2} + \frac{\mu}{2} r_{min}^2 \dot{\phi}_p^2 = \frac{\beta}{r_{min}^2} + \frac{L^2}{2\mu r_{min}^2} \quad (29)$$

$$\Rightarrow r_{min}^2 = \frac{\beta + \frac{L^2}{2\mu}}{E} = \frac{\beta + \frac{\mu}{2} b^2 v_{\infty}^2}{E} = \frac{\beta}{E} + b^2 \Rightarrow r_{min} = b \sqrt{1 + \frac{\beta}{Eb^2}} \quad (30)$$

Der Streuwinkel in Abhängigkeit von $L^2 = 2\mu Eb^2$ beträgt:

$$\theta = \pi - 2\phi_0 = \pi - 2 \frac{L}{\mu} \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{dr}{r^2 \sqrt{\frac{2}{\mu} \left[E - U(r) - \frac{L^2}{2\mu r^2} \right]}} \quad (31)$$

Wir substituieren $u = \frac{1}{r}$:

$$\begin{aligned} \pi - 2b \int_0^{u_p} \frac{du}{\sqrt{1 - u^2 \left(\frac{\beta}{E} + b^2 \right)}} &= \pi - \frac{2b}{\sqrt{\frac{\beta}{E} + b^2}} \arcsin \left(\sqrt{\frac{\beta}{E} + b^2} u \right) \Big|_{u=0}^{u_p} \\ &= \pi \left(1 - \frac{b}{\sqrt{\frac{\beta}{E} + b^2}} \right) \end{aligned} \quad (32)$$

Wir lösen diese Gleichung nach b auf

$$\Rightarrow (\pi - \theta)^2 = \frac{\pi^2 b^2}{\beta/E + b^2} \Rightarrow (\pi - \theta)^2 \left(\frac{\beta}{E} + b^2 \right) = b^2 \pi^2 \quad (33)$$

$$\Rightarrow (\pi - \theta)^2 \frac{\beta}{E} = b^2 (\pi^2 - (\pi - \theta)^2) = b^2 \theta (2\pi - \theta) \Rightarrow b = \sqrt{\frac{\beta}{E}} \frac{\pi - \theta}{\sqrt{\theta(2\pi - \theta)}}$$

Für den Wirkungsquerschnitt benötigen wir die Ableitung nach θ

$$\frac{db}{d\theta} = \sqrt{\frac{\beta}{E}} \left(-\frac{1}{\sqrt{\theta(2\pi - \theta)}} - \frac{1}{2} \frac{\pi - \theta}{\sqrt{\theta(2\pi - \theta)}^3} \cdot (2\pi - \theta - \theta) \right) \quad (34)$$

$$\frac{db}{d\theta} = -\sqrt{\frac{\beta}{E}} \frac{1}{\sqrt{\theta(2\pi - \theta)}} \left(1 + \frac{(\pi - \theta)^2}{\theta(2\pi - \theta)} \right) = -\sqrt{\frac{\beta}{E}} \frac{1}{\sqrt{\theta(2\pi - \theta)}} \left(\frac{2\pi\theta - \theta^2 + \pi^2 - 2\pi\theta + \theta^2}{\theta(2\pi - \theta)} \right)$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta) = \frac{b}{\sin(\theta)} \left| \frac{db}{d\theta} \right| = \frac{\beta}{E} \frac{\pi^2}{\sin \theta} \frac{\pi - \theta}{\theta^2 (2\pi - \theta)^2} \quad (35)$$

5 Zentralpotential

Wir betrachten ein Teilchen der Masse m in 3 Dimensionen, das sich unter dem Einfluss eines Zentralpotentials $U(r)$ bewegt.

(a) Erklären Sie in ein bis zwei Sätzen warum sich das Teilchen in einer Ebene bewegt. Diese Ebene parametrisieren wir durch Polarkoordinaten (ρ, ϕ) . Bestimmen Sie die Lagrange-Funktion des Teilchens.

(b) Zeigen Sie, dass ϕ zyklisch ist und bestimmen Sie die zugehörige Erhaltungsgröße l .

(c) Begründen Sie ferner warum die Energie erhalten ist und zeigen Sie, dass sie von der Form

$$E = \frac{1}{2}m\dot{\rho}^2 + \frac{1}{2}\frac{l^2}{\rho^2m} + U(\rho) \quad (36)$$

ist.

(d) Bestimmen Sie die Bewegungsgleichung für ρ . Vereinfachen Sie diese mithilfe von l und bringen Sie sie auf die Form

$$m\ddot{\rho} = -\partial_{\rho}V_{eff}(\rho) = -\partial_{\rho}(U(\rho) + D(\rho)), \quad (37)$$

wobei $D(\rho)$ die Drehimpulsbarriere darstellt.

(e) Nehmen Sie im Folgenden an, dass $U(\rho)$ von der Form $U(\rho) = \alpha\frac{1}{\rho^n}$ ist. Wie ist die Form des Potentials, d.h. wie sind α und n zu wählen, damit es einem Teilchen mit Energie E und Drehimpuls l möglich ist bis zum Ursprung zu gelangen?

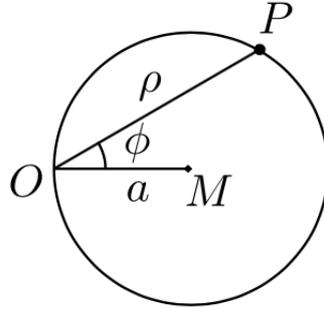
Hinweis: Am Ursprung selbst treten aufgrund der Singularität des Potentials stetig behebbar definierte Lücken in Drehimpuls und Energie auf. Für unsere Fragestellung hier, sowie für Teilaufgabe (f), führen diese Lücken aber zu keinen Problemen und können ignoriert werden.

(f) Nehmen Sie nun an, dass man für ein solches Potential, das das Durchlaufen des Zentrums erlaubt, untenstehende Trajektorien erhält, d.h. das Teilchen läuft auf einer Kreisbahn mit Mittelpunkt M durch den Ursprung O . Eine Parametrisierung hierfür ist gegeben durch $\rho(\phi) = 2a \cos(\phi)$. Hieraus folgt insbesondere, dass $\dot{\rho} = -2a\dot{\phi} \sin(\phi)$.

Für $U(\rho) = \alpha\frac{1}{\rho^n}$ ist eine solche Trajektorie nur für eine besondere Wahl der Potenz n und der Energie E mit dem Energieerhaltungssatz (34) verträglich. Finden Sie diese besonderen Werte von n und E .

Lösung:

(a) Im Zentralpotential ist der Drehimpuls erhalten, d.h. $\mathbf{L} = m\mathbf{r} \times \mathbf{v} = \text{konst.}$ Folglich wird die Geschwindigkeit \mathbf{v} des Teilchens immer in der Ebene senkrecht zu



L liegen, das Teilchen kann also diese Ebene niemals verlassen. Lagrangefunktion:

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 - U(\rho) = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\phi}^2) - U(\rho) \quad (38)$$

(b) ϕ kommt in der Lagrangefunktion nicht vor: $\frac{\partial L}{\partial \phi} = 0$, ist also zyklisch. Folglich ist

$$l = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = m\rho^2\dot{\phi} \quad (39)$$

erhalten.

(c) Die Lagrangefunktion ist nicht explizit zeitabhängig, daher ist die Energie erhalten.

Es gilt:

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\phi}^2) + U(\rho) = \frac{1}{2}m\dot{\rho}^2 + \frac{1}{2}\frac{l^2}{\rho^2m} + U(\rho) \quad (40)$$

(d)

$$\frac{\partial L}{\partial \rho} = m\rho\dot{\phi}^2 - \frac{\partial}{\partial \rho}U, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}}\right) = m\ddot{\rho} \quad (41)$$

$$\Rightarrow m\ddot{\rho} = m\rho\dot{\phi}^2 - \frac{\partial}{\partial \rho}U = m\rho\frac{l^2}{m^2\rho^4} - \frac{\partial}{\partial \rho}U = \frac{l^2}{m\rho^3} - \frac{\partial}{\partial \rho}U \quad (42)$$

$$\Rightarrow m\ddot{\rho} = -\partial_{\rho}\left(\frac{1}{2}\frac{l^2}{m\rho^2} + U\right)$$

\Rightarrow Drehimpulsbarriere $D(\rho) = \frac{1}{2}\frac{l^2}{m\rho^2}$.

(e) Das Teilchen kann bis zum Ursprung gelangen, falls:

Fall 1: $n = 2$ und $\alpha < -\frac{1}{2}ml^2$

Fall 2: $n > 2$ und $\alpha < 0$

(f) Wir haben:

$$\dot{\rho} = -2a\dot{\phi}\sin\phi = -2a\sin\phi\frac{l}{m\rho^2} = \pm 2a\sqrt{1 - \cos^2\phi}\frac{l}{m\rho^2} = \pm 2a\sqrt{1 - \left(\frac{\rho}{2a}\right)^2}\frac{l}{m\rho^2} \quad (43)$$

Hieraus folgt:

$$\dot{\rho}^2 = (4a^2 - \rho^2) \frac{l^2}{m^2 \rho^4} \quad (44)$$

und unter Verwendung von Teilaufgabe (c) folgt:

$$\begin{aligned} U(\rho) &= E - \frac{1}{2}m \left[(4a^2 - \rho^2) \frac{l^2}{m^2 \rho^4} \right] - \frac{1}{2} \frac{l^2}{\rho^2 m} \\ &= E - \frac{1}{2}m4a^2 \frac{l^2}{m^2 \rho^4} + \frac{1}{2}m \frac{l^2}{m^2 \rho^2} - \frac{1}{2} \frac{l^2}{\rho^2 m} \\ &= E - \frac{2a^2 l^2}{m \rho^4} \stackrel{!}{=} \alpha \frac{1}{\rho^4} \end{aligned} \quad (45)$$

Somit also: $n = 4$, $\alpha = -\frac{2a^2 l^2}{m}$ und die Energie des Teilchens ist $E = 0$.