Theoretische Physik: Mechanik

Blatt 2

Fakultät für Physik
Technische Universität München

26.09.2017

Inhaltsverzeichnis

1 Drehmoment, Drehimpuls und Schwerpunkt 2

2 N-Teilchen System 3

3 Rotierende Bezugssysteme 4

4 Koordinatensystem auf rotierender Scheibe 5

5 Zwangskraft auf einem Zylinder 7

6 Bewegung auf Paraboloid 8

1 Drehmoment, Drehimpuls und Schwerpunkt

Drei Teilchen der Masse 2, 3 und 5 bewegen sich unter dem Einfluss eines Kraftfeldes derart, dass ihre Ortsvektoren sich folgendermaßen darstellen lassen:

$$\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} 2t \\ -3 \\ t^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} t+1 \\ 3t \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_3 = \begin{pmatrix} t^2 \\ -t \\ 2t-1 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

(a) Berechnen Sie den gesamten Drehimpuls des Systems und das gesamte auf das System wirkende Drehmoment vom Ursprung aus betrachtet.
(b) Berechnen Sie den gesamten Drehimpuls des Systems und das gesamte auf das System wirkende Drehmoment vom Massenschwerpunkt aus betrachtet.

Lösung:

(a) Um das gesamte Drehmoment und den gesamten Drehimpuls zu berechnen, müssen wir zuerst die einzelnen Geschwindigkeiten berechnen:

$$\dot{\mathbf{r}}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2t \end{pmatrix}, \quad \dot{\mathbf{r}}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dot{\mathbf{r}}_3 = \begin{pmatrix} 2t \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Dies liefert dann den gesamten Drehimpuls bezüglich des Ursprungs des Inertialsystems:

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^{3} m_i \mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{r}}_i = \begin{pmatrix} -12t \\ -4t^2 \\ 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 36 \\ -12 \\ 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 \\ 10t^2 - 10t \\ 5t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12t + 31 \\ 6t^2 - 10t - 12 \\ 5t^2 + 21 \end{pmatrix} \tag{3}$$

und daraus auch das gesamte Drehmoment bezüglich des Ursprungs des Inertialsystems:

$$\mathbf{N} = \dot{\mathbf{L}} = \begin{pmatrix} -12 \\ 12t - 10 \\ 10t \end{pmatrix} \tag{4}$$

(b) Wir berechnen nun den Schwerpunkt und seine Geschwindigkeit in der Form

$$\mathbf{R} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{3} m_i \mathbf{r}_i = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 5t^2 + 7t + 3 \\ 4t - 6 \\ 2t^2 + 10t - 17 \end{pmatrix}, \quad \dot{\mathbf{R}} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 10t + 7 \\ 4 \\ 4t + 10 \end{pmatrix} \tag{5}$$

wobei M die Gesamtmasse des Systems ist. Dies liefert den Drehimpuls der Gesamtmasse im Schwerpunkt:

$$\begin{aligned}\mathbf{L}_{SP} = M\mathbf{R} \times \dot{\mathbf{R}} &= \frac{1}{10}\begin{pmatrix} (4t-6)(4t+10) - (2t^2+10t-17)4 \\ (2t^2+10t-17)(10t+7) - (5t^2+7t+3)(4t+10) \\ (5t^2+7t+3)4 - (4t-6)(10t+7) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 8t^2 - 24t + 8 \\ 36t^2 - 182t - 149 \\ -20t^2 + 60t + 54 \end{pmatrix}\end{aligned} \tag{6}$$

Damit können wir nun den inneren Drehimpuls und das Drehmoment bezüglich des Schwerpunkts berechnen:

$$\mathbf{L}_R = \mathbf{L} - \mathbf{L}_{SP} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -8t^2 - 96t + 302 \\ 24t^2 82t + 29 \\ 70t^2 - 60t + 156 \end{pmatrix} \tag{7}$$

$$\mathbf{N}_R = \dot{\mathbf{L}}_R = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -16t - 96 \\ 48t + 82 \\ 140t - 60 \end{pmatrix} \tag{8}$$

Beachten Sie, dass diese Rechnung viel komplizierter wäre, wenn wir den inneren Drehimpuls und das Drehmoment bezüglich des Schwerpunkts direkt aus den Koordinaten $\mathbf{r}_i$ - $\mathbf{R}$ und deren Ableitungen berechnet hätten. Beachten Sie außerdem, dass die Gleichung $\mathbf{N}_R = \dot{\mathbf{L}}_R$ nur gilt, weil $\mathbf{R}$ der Schwerpunkt ist. Für ein beliebiges Koordinatensystem gilt diese Beziehung nicht.

2 N-Teilchen System

Betrachten Sie ein System aus N punktförmigen Teilchen mit unterschiedlichen Massen m_i und den Potentialen der paarweisen Wechselwirkung

$$V_{ij}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = V_{ij}^0 \left|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\right|^\alpha, \quad V_{ij}^0 = V_{ji}^0 \neq 0 \tag{9}$$

wobei $\mathbf{x}_i$(t) die Position des Teilchens i zur Zeit t ist und alle V_{ij}^0 sowie α konstant sind. Schreiben Sie für dieses System Ausdrücke für jede der folgenden Größen auf und geben Sie jeweils an, ob diese bezüglich der Zeit erhalten sind.

(a) Ort des Schwerpunktes $\mathbf{x}_{CM}$
(b) Geschwindigkeit des Schwerpunktes $\dot{\mathbf{x}}_{CM}$
(c) Gesamtimpuls $\mathbf{P}$
(d) Gesamtdrehimpuls $\mathbf{L}_{tot}$
(e) Gesamte kinetische Energie T
(f) Gesamte potentielle Energie V
(g) Gesamtenergie E

Lösung:

Mit der gesamten Masse

$$M_0 = \sum_{i=1}^{n} m_i \tag{10}$$

bekommen wir
(a)

$$\mathbf{x}_{CM} = \frac{1}{M_0} \sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{x}_i \tag{11}$$

(b)

$$\dot{\mathbf{x}}_{CM} = \frac{1}{M_0} \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\mathbf{x}}_i = konst. \tag{12}$$

(c)

$$\mathbf{P} = \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\mathbf{x}}_i = konst. \tag{13}$$

(d)

$$\mathbf{L}_{tot} = \sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{x}_i \times \dot{\mathbf{x}}_i = konst. \tag{14}$$

(e)

$$\mathbf{T} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\mathbf{x}}_i^2 \tag{15}$$

(f)

$$\mathbf{V} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1;i\neq j}^{n} V_{ij}^0 \left|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\right|^\alpha \tag{16}$$

(g)

$$E = T + V = konst. \tag{17}$$

In diesem System sind die Geschwindigkeit des Schwerpunkts $\dot{\mathbf{x}}_{CM}$, der Gesamtimpuls $\mathbf{P}$, der Gesamtdrehimpuls $\mathbf{L}_{tot}$ und die Gesamtenergie E erhalten.

3 Rotierende Bezugssysteme

Die Beschleunigung eines Teilchens der Masse m an der Stelle $\vec{r}(\mathrm{t})$ in einem nichtinertialen Bezugssystem, welches mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit von $\vec{\omega}$ um den Ursprung rotiert ist gegeben durch

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{\vec{F}}{m} - 2(\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}) - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}). \tag{18}$$

Berechnen Sie die kartesischen Komponenten der Beschleunigung, falls $\vec{\omega} \mid\mid \vec{e}_y$.

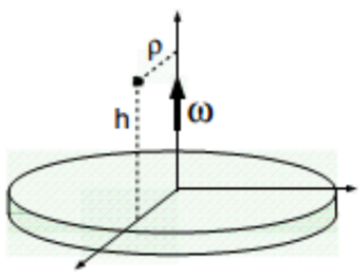
Lösung:

Die Winkelgeschwindigkeit ist $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_y$. Dies liefert uns für die Beschleunigung

$$\begin{aligned}
\ddot{\vec{r}} &= \frac{\vec{F}}{m} - 2\omega(\vec{e}_y \times \dot{\vec{r}}) - \omega^2 \vec{e}_y \times (\vec{e}_y \times \vec{r}) \\
&= \frac{\vec{F}}{m} - 2\omega(\vec{e}_y \times \dot{\vec{r}}) - \omega^2 \vec{e}_y(\vec{e}_y \cdot \vec{r}) + \omega^2 \cdot \vec{e}_y^2 \cdot \vec{r} \\
&= \frac{\vec{F}}{m} - 2\omega(\vec{e}_y \times \dot{\vec{r}}) - \omega^2 y \vec{e}_y + \omega^2 \vec{r} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\vec{F}_x}{m} - 2\omega \dot{z} + \omega^2 x \\ \frac{\vec{F}_y}{m} \\ \frac{\vec{F}_z}{m} - 2\omega \dot{x} + \omega^2 z \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{19}$$

4 Koordinatensystem auf rotierender Scheibe

Ein Teilchen fällt senkrecht in einem homogenen Gravitationsfeld auf eine rotierende Scheibe zu. Das Teilchen befinde sich anfangs in Ruhe in der Höhe h und einem radialen Abstand ρ vom Zentrum der Scheibe. Die Scheibe rotiert mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ um seine Symmetrieachse (die z-Achse). Integrieren Sie die Bewegungsgleichungen in dem rotierenden Koordinatensystem, welches fest mit der rotierenden Scheibe verbunden ist und berechnen Sie die Zeit und den Ort des Aufpralls des Teilchens auf der Scheibe.



Tipp: Benutzen Sie, dass die Beschleunigung eines Teilchens der Masse m an der

Stelle $\vec{r}$(t) in einem mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ rotierenden Referenzsystems durch die Formel aus Aufgabe 3 gegeben ist. Drücken Sie diese Gleichung in Zylinderkoordinaten aus, um drei Differentialgleichungen entsprechend der drei Basisvektoren $\vec{e}_\rho$, $\vec{e}_\varphi$ und $\vec{e}_z$ zu erhalten. Benutzen Sie die $\vec{e}_z$-Richtung für die Berechnung des Aufprall-Zeitpunkts. Multiplizieren Sie dann die Gleichung für die $\vec{e}_\varphi$-Richtung mit ρ und integrieren Sie diese, um φ(t) zu erhalten.
Bedenken Sie, dass das Teilchen anfangs in Ruhe ist. Jedoch nur in Bezug auf ein nichtrotierendes Koordinatensystem. Daher gilt im rotierenden zylindrischen Koordinatensystem $\dot{\rho}(0) = 0$ und $\dot{\varphi}(0) =$ -ω.

Lösung:

Drücke den Ortsvektor $\vec{r}$ und die Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ in Zylinderkoordinaten

$$\vec{r} = \rho\vec{e}_\rho + z\vec{e}_z \tag{20}$$

$$\vec{\omega} = \omega\vec{e}_z \tag{21}$$

mit den Einheitsvektoren

$$\vec{e}_\rho = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{22}$$

aus. Die Zeitableitungen dieser Basisvektoren sind

$$\dot{\vec{e}}_\rho = \dot{\varphi}\vec{e}_\varphi, \quad \dot{\vec{e}}_\varphi = -\dot{\varphi}\vec{e}_\rho, \quad \dot{\vec{e}}_z = 0 \tag{23}$$

Damit bekommen wir für die Zeitableitung von $\vec{r}$ und $\dot{\vec{r}}$:

$$\dot{\vec{r}} = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\vec{e}}_\rho = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \dot{z}\vec{e}_z \tag{24}$$

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\rho}\vec{e}_\rho + 2\dot{\rho}\dot{\vec{e}}_\rho + \rho\ddot{\vec{e}}_\rho + \dot{z}\vec{e}_z = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\vec{e}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi})\dot{\vec{e}}_\varphi + \ddot{z}\vec{e}_z \tag{25}$$

Daraus erhalten wir für die Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned}
\ddot{\vec{r}} &= (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\vec{e}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi})\dot{\vec{e}}_\varphi + \ddot{z}\vec{e}_z \\
&= \frac{\vec{F}}{m} - 2(\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}) - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \\
&= -g\vec{e}_z - 2\omega\vec{e}_z \times (\dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \dot{z}\vec{e}_z) - \omega^2\vec{e}_z \times (\vec{e}_z \times (\rho\vec{e}_\rho + z\vec{e}_z)) \\
&= -g\vec{e}_z - 2\omega\dot{\rho}\vec{e}_\varphi + 2\omega\rho\dot{\varphi}\vec{e}_\rho + \omega^2\rho\vec{e}_\rho
\end{aligned} \tag{26}$$

wobei wir die Relationen

$$\vec{e}_z \times \vec{e}_\rho = \vec{e}_\varphi, \quad \vec{e}_z \times \vec{e}_\varphi = -\vec{e}_\rho \tag{27}$$

benutzt haben. Betrachten wir nun die Komponenten für die drei Basisvektoren einzeln, erhalten wir die drei Differentialgleichungen

$$\vec{e}_\rho : \quad \ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2 = 2\omega\dot{\varphi}\rho + \omega^2\rho \tag{28}$$

$$\vec{e}_\varphi : \quad 2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi} = -2\omega\dot{\rho} \tag{29}$$

$$\vec{e}_z : \quad \ddot{z} = -g \tag{30}$$

Zuerst lösen wir die $\vec{e}_z$-Gleichung um den Zeitpunkt für den Aufprall zu bestimmen:

$$z(0) = h,\ \dot{z}(0) = 0 \Rightarrow z = h - \frac{1}{2}gt^2 \quad \Rightarrow \quad \text{Aufprall auf Platte bei}\ \ T = \sqrt{\frac{2h}{g}} \tag{31}$$

Nun multiplizieren wir die $\vec{e}_\varphi$-Gleichung mit ρ:

$$2\dot{\varphi}\rho\dot{\varphi} - \rho\ddot{\varphi} = -2\omega\dot{\rho}\rho \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\varphi}) = \frac{d}{dt}(-\omega\rho^2) \tag{32}$$

Integration liefert

$$\rho^2\dot{\varphi} + \omega\rho^2 = konst. = 0 \quad \text{da}\ \dot{\varphi}(0) = -\omega \tag{33}$$

oder

$$\dot{\varphi} = -\omega \quad \Rightarrow \quad \varphi(t) = -\omega t + \varphi_0 \tag{34}$$

Einsetzen des Egebnisses in die $\vec{e}_\rho$-Gleichung gibt uns

$$\ddot{\rho} = 0. \tag{35}$$

Mit den Anfangsbedingungen

$$\rho(0) = R, \quad \dot{\rho}(0) = 0 \tag{36}$$

erhalten wir als Lösung

$$\rho(t) = R. \tag{37}$$

Damit ist der Ort des Aufpralls:

$$\rho(T) = R, \quad \varphi(T) = \varphi_0 - \omega\sqrt{\frac{2h}{g}} \tag{38}$$

5 Zwangskraft auf einem Zylinder

Die Bewegung eines Teilchens sei auf die Oberfläche eines Zylinders mit Radius R und Ausrichtung entlang der z-Achse beschränkt. Formulieren Sie einen Ausdruck für diese geometrische Zwangsbedingung und die Zwangskraft, stellen Sie die vollen Bewegungsgleichungen für das Teilchen unter Verwendung einer beliebigen externen Kraft $\vec{F}_{ext}$ auf und berechnen Sie die Zwangskraft. Verwenden Sie ausschließlich zylindrische Koordinaten (ρ, ϕ, z) oder Vektorschreibweise!

Lösung:

Die Zwangsbedingung lässt sich in zylindrischen Koordinaten beschreiben durch

$$f_{zw}(\rho) := \rho - R = 0. \tag{39}$$

Diese gibt uns die Zwangskraft

$$\begin{aligned}\vec{F}_{zw} &= \lambda(t)\vec{\nabla} f_{zw} \\ &= \lambda(t)\left(\frac{\partial f_{zw}}{\partial \rho}\vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f_{zw}}{\partial \phi}\vec{e}_\phi + \frac{\partial f_{zw}}{\partial z}\vec{e}_z\right) \\ &= \lambda(t)\vec{e}_\rho\end{aligned} \tag{40}$$

Die Bewegungsgleichungen des Teilchens sind nun

$$m\ddot{\vec{x}} = \vec{F}_{ext} + \vec{F}_{zw} = \vec{F}_{ext} + \lambda(t)\vec{e}_\rho, \tag{41}$$

bzw. speziell die ρ-Komponente ergibt

$$m\ddot{x}_\rho = m\ddot{\rho} - m\rho\dot{\phi}^2 = F_{ext,\rho} + \lambda(t). \tag{42}$$

Leiten wir nun obige Zwangsbedingung zweimal nach der Zeit ab, so erhalten wir $\ddot{\rho} = 0$. Damit lässt sich der Lagrange-Multiplikator lösen und die Zwangskraft in geschlossener Form angeben:

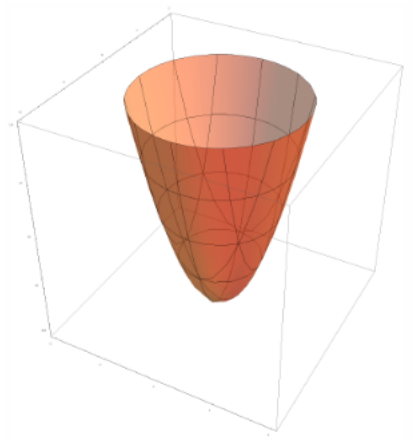
$$\vec{F}_{zw} = -(mR\dot{\phi}^2 + F_{ext,\rho})\vec{e}_\rho \tag{43}$$

6 Bewegung auf Paraboloid

Ein Teilchen der Masse m bewege sich reibungsfrei unter dem Einfluss der Gravitation auf der Oberfläche eines Paraboloids

$$x^2 + y^2 = az. \tag{44}$$

Verwenden Sie x und y als generalisierte Koordinaten, eliminieren Sie z und $\dot{z}$ aus der kinetischen und der potentiellen Energie und finden Sie den Lagrange für dieses System. Finden Sie als Nächstes einen Ausdruck für den Lagrange in Zylinderkoordinaten durch Eliminierung von x und y und deren Ableitungen. Bestimmen Sie anschließend die Bewegungsgleichungen und die zyklische Koordinate.



Lösung:

Es gilt:

$$z = \frac{1}{a}(x^2 + y^2), \tag{45}$$

$$\dot{z} = \frac{2}{a}(x\dot{x} + y\dot{y}). \tag{46}$$

Somit bekommt man für die kinetische Energie:

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{2m}{a^2}(x\dot{x} + y\dot{y})^2 \tag{47}$$

sowie für die potentielle Energie:

$$V = mgz = \frac{mg}{a}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2). \tag{48}$$

Damit bekommt man für den Lagrangian:

$$L = T - V = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{2m}{a^2}(x\dot{x} + y\dot{y})^2 - \frac{mg}{a}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \tag{49}$$

Geht man zu Zylinderkoordinaten über, so hat man

$$\begin{aligned} &x = \rho\cos(\varphi), \quad y = \rho\sin(\varphi) \\ &\dot{x} = \dot{\rho}\cos(\varphi) - \rho\dot{\varphi}\sin(\varphi), \quad \dot{y} = \dot{\rho}\sin(\varphi) + \rho\dot{\varphi}\cos(\varphi) \end{aligned} \tag{50}$$

und somit für den Lagrangian:

$$L = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2) + \frac{2m}{a^2}\rho^2\dot{\rho}^2 - \frac{mg\rho^2}{a} \tag{51}$$

Die Bewegungsgleichungen lassen sich aus der Euler-Lagrange Gleichung herleiten:

$$\frac{d}{dt}\frac{dL}{d\dot{q}_i} = \frac{dL}{dq_i} \tag{52}$$

Hieraus folgt jeweils für ρ und φ (zyklische Koordinate, da L nicht explitzit von φ abhängt):

$$m\ddot{\rho} + \frac{4m}{a^2}\rho\dot{\rho}^2 = m\dot{\varphi}^2\rho - \frac{2mg}{a}\rho \tag{53}$$

$$m\rho^2\dot{\varphi} = konst. \tag{54}$$