Theoretische Physik: Mechanik

Blatt 1

Fakultät für Physik
Technische Universität München

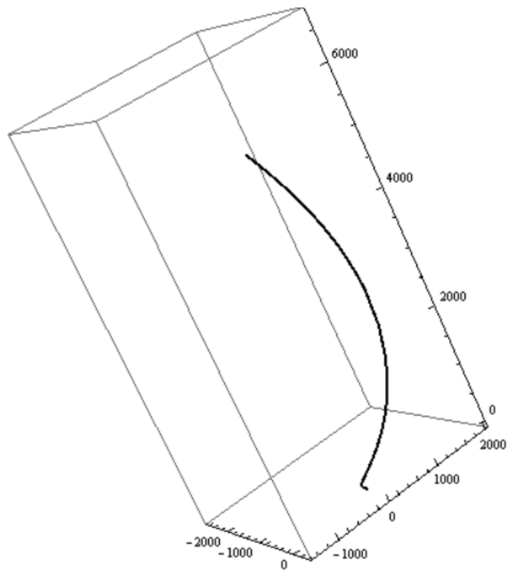
25.09.2017

Inhaltsverzeichnis

1 Tangentenvektor einer Raumkurve

Berechnen Sie den Tangentenvektor zur Raumkurve

$$\vec{r}(t) = \frac{1}{2}e^t \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}. \tag{1}$$



Lösung:

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{1}{2}e^t \begin{pmatrix} \cos(t) - \sin(t) \\ \sin(t) + cos(t) \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \tag{2}$$

$$\left|\frac{d\vec{r}(t)}{dt}\right| = \frac{1}{2}e^t \sqrt{(\cos(t) - \sin(t))^2 + (\cos(t) + \sin(t))^2 + 2} = e^t \tag{3}$$

$$\vec{T} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \frac{1}{\left|\frac{d\vec{r}(t)}{dt}\right|} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \cos(t) - \sin(t) \\ \sin(t) + cos(t) \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \tag{4}$$

2 Krummlinige Koordinaten

Betrachten Sie einen Vektor $\vec{r} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ in kartesischen Koordinaten.
(a) Berechnen Sie ausgehend von den Beziehungen

$$x_1 = \rho\cos(\varphi), \quad x_2 = \rho\sin(\varphi) \tag{5}$$

die beiden Vektoren

$$\vec{v}_\rho = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \rho} \\ \frac{\partial x_2}{\partial \rho} \end{pmatrix} \quad \vec{v}_\varphi = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial x_2}{\partial \varphi} \end{pmatrix}. \tag{6}$$

(b) Welchen Betrag haben $\vec{v}_\rho$ und $\vec{v}_\varphi$?
(c) Definieren Sie ausgehend von $\vec{v}_\rho$ und $\vec{v}_\varphi$ die dazugehörigen Einheitsvektoren $\vec{e}_\rho$ und $\vec{e}_\varphi$. Zeigen Sie, dass diese aufeinander senkrecht stehen, d.h. $\vec{e}_\rho \cdot \vec{e}_\varphi = 0$.
(d) Tragen Sie die Einheitsvektoren $\vec{e}_\rho(\varphi)$ und $\vec{e}_\varphi(\varphi)$ in ein kartesisches Koordinatensystem an den Stellen $\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{r} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ein.

Lösung:

(a)

$$\vec{v}_\rho = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_\varphi = \begin{pmatrix} -\rho\sin(\varphi) \\ \rho\cos(\varphi) \end{pmatrix}. \tag{7}$$

(b)

$$|\vec{v}_\rho| = \sqrt{\cos(\varphi)^2 + \sin(\varphi)^2} = 1, \quad |\vec{v}_\varphi| = \sqrt{\rho^2\sin(\varphi)^2 + \rho^2\cos(\varphi)^2} = \rho \tag{8}$$

(c) $\vec{v}_\rho$ ist bereits auf Eins normiert, d.h.

$$\vec{e}_\rho := \vec{v}_\rho = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Für $\vec{e}_\varphi$ definieren wir:

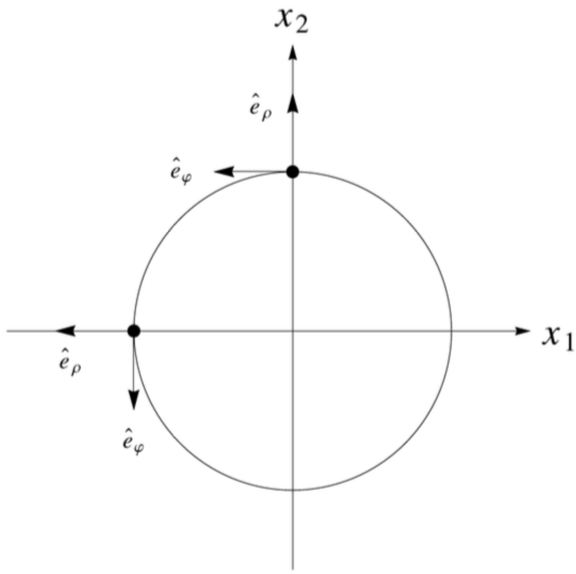
$$\vec{e}_\varphi := \frac{\vec{v}_\varphi}{\rho} = \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Die beiden neu definierten Vektoren sind Einheitsvektoren: $|\vec{e}_\rho| = 1$ und $|\vec{e}_\varphi| = 1$. Die Orthogonalität von $\vec{e}_\rho$ und $\vec{e}_\varphi$ folgt aus einem verschwindenden Skalarprodukt:

$$\vec{e}_\rho \cdot \vec{e}_\varphi = \cos\varphi(-\sin\varphi) + \sin\varphi\cos\varphi = 0. \tag{11}$$

(d)

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \varphi = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \vec{e}_\rho = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\rho = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{12}$$



$$\vec{r} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \varphi = \pi \quad \Rightarrow \quad \vec{e}_\rho = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\rho = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{13}$$

3 Inhomogene Differentialgleichung

Gegeben sei die gewöhnliche inhomogene Differentialgleichung 1. Ordnung für $y(x)$,

$$y' + \frac{1}{x} y = x^3 \tag{14}$$

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung, indem Sie zuerst die homogene Lösung $y_{hom}(x)$ berechnen. Machen Sie dann für die inhomogene Differentialgleichung den Anzatz $y_{inhom}(x) = C(x) y_{hom}(x)$ und lösen Sie die Differentialgleichung für $C(x)$. Dieses Verfahren heißt Variation der Konstanten.

Lösung:

Für die homogene DGL

$$y' + \frac{1}{x} y = 0 \tag{15}$$

gilt

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \log y_{hom} = -\log x + Konstante \Rightarrow \quad y_{hom} = \frac{C}{x} \tag{16}$$

wobei C $\in R$.
Durch Variation der Konstanten setzt man die partikuläre Lösung in der Form an

$$y_{inhom}(x) = C(x) y_{hom}(x) \tag{17}$$

daher

$$\frac{C'(x)}{x} = x^3 \quad \Rightarrow \quad C(x) = \frac{x^5}{5}. \tag{18}$$

Damit ist die Lösung der inhomogenen DGL gegeben durch

$$y(x) = \frac{C}{x} + \frac{x^4}{5}. \tag{19}$$

4 Harmonischer Oszillator

Ein Teilchen der Masse m bewege sich entlang der x-Achse unter dem Einfluss eines konservativen Kraftfeldes mit Potential $V(x)$. Das Teilchen befinde sich zu den Zeiten t_1 und t_2 an den Orten x_1 und x_2 und E bezeichne die Gesamtenergie. Zeigen Sie, dass

$$t_2 - t_1 = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\sqrt{E - V(x)}} \, dx \tag{20}$$

Zeigen Sie weiter, dass wenn das Kraftfeld durch das Potential eines harmonischen Oszillators

$$V(x) = \frac{1}{2} \kappa x^2 \tag{21}$$

gegeben ist und das Teilchen in Ruhe von $x = a$ startet, sich für seine Bewegung die folgende Trajektorie ergibt:

$$x(t) = a \cos(\sqrt{\frac{\kappa}{m}} t) \tag{22}$$

Beschreiben Sie die Bewegung des Teilchens.

Lösung:

Die Energieerhaltung liefert

$$E = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + V(x) \tag{23}$$

oder

$$\dot{x}^2 = \frac{2}{m}(E - V(x)). \tag{24}$$

Zieht man die Quadratwurzel hieraus, erhält man

$$dt = \sqrt{\frac{m}{2}} \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}}. \tag{25}$$

Mit dem Potential eines harmonischen Oszillators

$$V(x) = \frac{1}{2}\kappa x^2 \tag{26}$$

und dem Startpunkt $x_1 = a$ bekommt man weiter für die Gesamtenergie

$$E = \frac{1}{2}\kappa x^2. \tag{27}$$

Dies führt auf das Integral

$$t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_a^x \frac{1}{\sqrt{E - V(x)}}\, dx = \sqrt{\frac{m}{\kappa}} \int_a^x \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\, dx = \sqrt{\frac{m}{\kappa}} \arccos(\frac{x}{a}) \tag{28}$$

und somit zu

$$x(t) = a\cos(\sqrt{\frac{\kappa}{m}} t). \tag{29}$$

5 Konservatives Kraftfeld

Ein Teilchen der Masse m bewege sich frei in der x-y-Ebene unter dem Einfluss des Kraftfeldes

$$\mathbf{F} = -m\omega^2\mathbf{r}. \tag{30}$$

(a) Weisen Sie nach, dass sich das Teilchen entlang einer Ellipse um den Ursprung bewegt gemäß

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} a\cos(\omega t) \\ b\sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{31}$$

(b) Zeigen Sie, dass das Kraftfeld konservativ ist. Geben Sie einen expliziten Ausdruck für die resultierende potentielle Energie an.
(c) Berechnen Sie die Arbeit, die das Kraftfeld zwischen den Zeitpunkten $t = 0$ und $t = \frac{\pi}{2\omega}$ am Teilchen verrichtet.
(d) Bestimmen Sie die Gesamtenergie des Teilchens und vergewissern Sie sich, dass diese zeitlich konstant ist.

Lösung:

(a) Unter Verwendung des Newtonschen Gesetzes findet man für die Teilchenbahn

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \begin{pmatrix} -m\omega^2 a\cos(\omega t) \\ -m\omega^2 b\sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} = -m\omega^2\mathbf{r} = \mathbf{F}(\mathbf{r}). \tag{32}$$

(b) Man kann weiter zeigen, dass das Kraftfeld konservativ ist, indem man zunächst seine Rotation ausrechnet:

$$\nabla \times \mathbf{F} = -m\omega^2 \times \mathbf{r} = 0. \tag{33}$$

Demnach muss es eine potentielle Energie $V(\mathbf{r})$ geben mit

$$\mathbf{F} = -\nabla V. \tag{34}$$

Durch direkte Integration kommt man - bis auf Konstanten - auf den folgenden Ausdruck für die potentielle Energie:

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}m\omega^2(x^2+y^2) = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2. \tag{35}$$

(c) Für die potentielle Energie zu den Zeiten $t = 0$ und $t = \frac{\pi}{2\omega}$ gilt

$$V(t=0) = \frac{1}{2}m\omega^2 a^2, \quad V(t=\frac{\pi}{2\omega}) = \frac{1}{2}m\omega^2 b^2 \tag{36}$$

Somit ist die Arbeit, die durch Bewegung des Teilchens in diesem Zeitintervall verrichtet wird

$$V(t=0) - V(t=\frac{\pi}{2\omega}) = \frac{1}{2}m\omega^2(a^2-b^2). \tag{37}$$

(d) Um die Energieerhaltung zu demonstrieren, berechnet man zunächst die kinetische Energie an jedem Punkt der Trajektorie,

$$T = \frac{1}{2}m(\frac{d\mathbf{r}}{dt})^2 = \frac{1}{2}m(a^2\omega^2 sin^2(wt) - b^2\omega^2 cos^2(wt)). \tag{38}$$

Wie bereits gezeigt wurde, ist die potentielle Energie an jedem Punkt der Bahnkurve

$$V = \frac{1}{2}mr^2 = \frac{1}{2}m\omega^2(a^2 sin^2(wt) - b^2 cos^2(wt)). \tag{39}$$

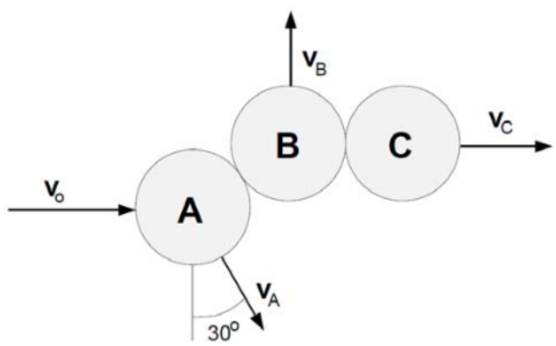
Addiert man die beiden Beiträge, so ergibt sich

$$E = T + V = \frac{1}{2}m\omega^2(a^2+b^2), \tag{40}$$

als Konstante in der Zeit, wie erwartet.

6 Elastischer Stoß

Betrachten Sie den elastischen Stoß dreier Billardkugeln A, B und C mit jeweils der Masse m in der Ebene. Vor dem Stoß bewege sich die Kugel A mit der Geschwindigkeit $v_0 = 5\ \frac{m}{s}$ auf die anderen Kugeln B und C zu, welche vor dem Stoß ruhen. Nach der Kollision bewegen sich die Kugeln in die Richtungen, die in der Skizze angedeutet sind. Berechnen Sie den Betrag der Geschwindigkeiten aller drei Kugeln nach dem Stoß.



Lösung:

Die Impulserhaltung liefert:

$$m\vec{v}_0 = m\vec{v}_A + m\vec{v}_B + m\vec{v}_C. \tag{41}$$

In Komponenten ausgedrückt:

$$v_B - v_A \cos 30^\circ = 0 \quad y - Richtung, \tag{42}$$

$$v_C + v_A \sin 30^\circ = v_0 = 5\frac{m}{s} \quad x - Richtung. \tag{43}$$

Bei elastischen Stößen kann man von der Energieerhaltung in der folgenden Form Gebrauch machen:

$$E^{kin}_{nach} = \frac{1}{2}m(v_A^2 + v_B^2 + v_C^2) = E^{kin}_{vor} = \frac{1}{2}mv_0^2. \tag{44}$$

Hiermit haben wir ein nichtlineares System von drei Gleichungen für drei Unbekannte. Quadriert man jeweils die ersten beiden Gleichungen, addiert sie danach und subtrahiert man schließlich die Energieerhaltungsgleichung, so bekommt man $2v_A(v_C \sin 30^\circ - v_B \cos 30^\circ) = 0$, also

$$v_C = v_B \cot 30^\circ \tag{45}$$

für $v_A \neq 0$. Diese Gleichung zusammen mit den beiden Gleichungen der Impulserhaltung bildet nun ein lineares Gleichungssystem dreier Gleichungen für drei Unbekannte. Damit ist die Aufgabe elementar lösbar und man erhält

$$v_A = v_0 \sin 30^\circ = \frac{v_0}{2} = 2,5 \frac{m}{s}, \tag{46}$$

$$v_B = v_0 \sin 30^\circ \cos 30^\circ = v_0 \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{5\sqrt{3}}{4} \frac{m}{s} \approx 2,16 \frac{m}{s}, \tag{47}$$

$$v_C = v_0 \cos^2 30^\circ = v_0 \frac{3}{4} = \frac{15}{4} \frac{m}{s} = 3,75 \frac{m}{s}. \tag{48}$$