

Theoretische Physik: Mechanik

Blatt 1

Fakultät für Physik

Technische Universität München

25.09.2017

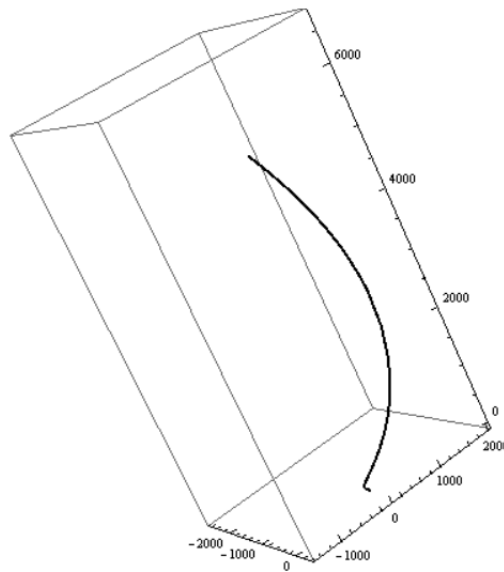
Inhaltsverzeichnis

1	Tangentenvektor einer Raumkurve	2
2	Krummlinige Koordinaten	2
3	Inhomogene Differentialgleichung	3
4	Harmonischer Oszillator	3
5	Konservatives Kraftfeld	4
6	Elastischer Stoß	4

1 Tangentenvektor einer Raumkurve

Berechnen Sie den Tangentenvektor zur Raumkurve

$$\vec{r}(t) = \frac{1}{2}e^t \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}. \quad (1)$$



2 Krummlinige Koordinaten

Betrachten Sie einen Vektor $\vec{r} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ in kartesischen Koordinaten.

(a) Berechnen Sie ausgehend von den Beziehungen

$$x_1 = \rho \cos(\varphi), \quad x_2 = \rho \sin(\varphi) \quad (2)$$

die beiden Vektoren

$$\vec{v}_\rho = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \rho} \\ \frac{\partial x_2}{\partial \rho} \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_\varphi = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial x_2}{\partial \varphi} \end{pmatrix}. \quad (3)$$

(b) Welchen Betrag haben \vec{v}_ρ und \vec{v}_φ ?

(c) Definieren Sie ausgehend von \vec{v}_ρ und \vec{v}_φ die dazugehörigen Einheitsvektoren \vec{e}_ρ

und \vec{e}_φ . Zeigen Sie, dass diese aufeinander senkrecht stehen, d.h. $\vec{e}_\rho \cdot \vec{e}_\varphi = 0$.

(d) Tragen Sie die Einheitsvektoren $\vec{e}_\rho(\varphi)$ und $\vec{e}_\varphi(\varphi)$ in ein kartesisches Koordinatensystem an den Stellen $\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{r} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ein.

3 Inhomogene Differentialgleichung

Gegeben sei die gewöhnliche inhomogene Differentialgleichung 1. Ordnung für $y(x)$,

$$y' + \frac{1}{x}y = x^3 \quad (4)$$

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung, indem Sie zuerst die homogene Lösung $y_{hom}(x)$ berechnen. Machen Sie dann für die inhomogene Differentialgleichung den Ansatz $y_{inhom}(x) = C(x)y_{hom}(x)$ und lösen Sie die Differentialgleichung für $C(x)$. Dieses Verfahren heißt Variation der Konstanten.

4 Harmonischer Oszillator

Ein Teilchen der Masse m bewege sich entlang der x-Achse unter dem Einfluss eines konservativen Kraftfeldes mit Potential $V(x)$. Das Teilchen befinde sich zu den Zeiten t_1 und t_2 an den Orten x_1 und x_2 und E bezeichne die Gesamtenergie. Zeigen Sie, dass

$$t_2 - t_1 = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\sqrt{E - V(x)}} dx \quad (5)$$

Zeigen Sie weiter, dass wenn das Kraftfeld durch das Potential eines harmonischen Oszillators

$$V(x) = \frac{1}{2}\kappa x^2 \quad (6)$$

gegeben ist und das Teilchen in Ruhe von $x = a$ startet, sich für seine Bewegung die folgende Trajektorie ergibt:

$$x(t) = a \cos\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}}t\right) \quad (7)$$

Beschreiben Sie die Bewegung des Teilchens.

5 Konservatives Kraftfeld

Ein Teilchen der Masse m bewege sich frei in der x - y -Ebene unter dem Einfluss des Kraftfeldes

$$\mathbf{F} = -m\omega^2 \mathbf{r}. \quad (8)$$

(a) Weisen Sie nach, dass sich das Teilchen entlang einer Ellipse um den Ursprung bewegt gemäß

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} a \cos(\omega t) \\ b \sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (9)$$

(b) Zeigen Sie, dass das Kraftfeld konservativ ist. Geben Sie einen expliziten Ausdruck für die resultierende potentielle Energie an.

(c) Berechnen Sie die Arbeit, die das Kraftfeld zwischen den Zeitpunkten $t = 0$ und $t = \frac{\pi}{2\omega}$ am Teilchen verrichtet.

(d) Bestimmen Sie die Gesamtenergie des Teilchens und vergewissern Sie sich, dass diese zeitlich konstant ist.

6 Elastischer Stoß

Betrachten Sie den elastischen Stoß dreier Billardkugeln A, B und C mit jeweils der Masse m in der Ebene. Vor dem Stoß bewege sich die Kugel A mit der Geschwindigkeit $v_0 = 5 \frac{m}{s}$ auf die anderen Kugeln B und C zu, welche vor dem Stoß ruhen. Nach der Kollision bewegen sich die Kugeln in die Richtungen, die in der Skizze angedeutet sind. Berechnen Sie den Betrag der Geschwindigkeiten aller drei Kugeln nach dem Stoß.

