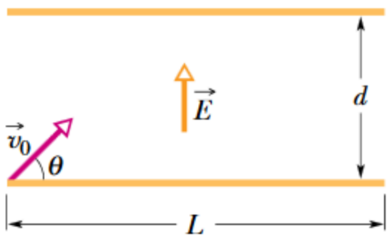
# Ferienkurs Experimentalphysik 2

## Probeklausur

**Tutoren:** Elena Kaiser und Matthias Golibrzuch

## 1 Elektron im Kondensator

Zwischen zwei horizontalen, parallelen Platten besteht ein homogenes elektrisches Feld $\vec{E}$ vom Betrag $2 \times 10^3$ N/C. Die untere Platte ist positiv, die obere Platte negativ geladen, sodass das Feld nach oben gerichtet ist. Die Länge der Platten beträgt $L = 10$ cm, ihr Abstand $d = 4$ cm. Von der linken Kante der unteren Platte wird ein Elektron mit der Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 6 \times 10^6$ m/s unter einem Winkel von 45° in den Plattenzwischenraum geschossen.




a) Wird das Elektron eine der Platten treffen?

b) Welche Platte wird gegebenenfalls getroffen und in welcher horizontalen Entfernung vom Einschusspunkt?

### Lösung

a) Um herauszufinden ob und/oder welche Platte getroffen wird müssen wir zunächst die Bahn des Elektrons beschreiben. Dazu beschäftigen wir uns erst mit der Richtung der elektrischen Kraft.

$$\vec{F}_{el} = q\vec{E} = -eE\vec{e}_z \tag{1}$$

Das heißt die Kraft wirkt in unserem Beispiel auf das Elektron nach unten. Damit ergeben sich folgende Funktionen für $x(t)$ und $z(t)$

$$x(t) = v_{0x}t \tag{2}$$

$$z(t) = \frac{1}{2}\frac{F_{el}}{m}t^2 + v_{0z}t = \frac{-eE}{2m}t^2 + v_{0z}t \tag{3}$$

Zuerst überprüfen wir ob das Elektron die oberer Platte trifft, dazu errechnen wir das Maximum in z-Richtung

$$z'(t) = \frac{-eE}{m}t + v_{0z} \overset{!}{=} 0 \ , \quad t_{max} = \frac{v_{0z}m}{Ee} \tag{4}$$

$$z(t_{max}) = -\frac{mv_{0z}^2}{2Ee} + v_{0z}\frac{v_{0z}m}{Ee} = \frac{mv_{0z}^2}{2Ee} = 0,026 \text{ m} \tag{5}$$

Das heißt die obere Platte wird nicht getroffen.
Für die Untere Platte müssen wir die Nullstelle von $z(t)$ berechnen.

$$\begin{aligned} \frac{-eE}{2m}t^2 + v_{0z}t &= 0 \quad | : t \\ \frac{-eE}{2m}t + v_{0z} &= 0 \\ t_0 &= \frac{2v_{0z}m}{Ee} \end{aligned} \tag{6}$$

Diese Zeit setzen wir nun in x(t) ein

$$x(t_0) = v_{0x}\frac{2v_{0z}m}{Ee} = 0,102 \text{ m} \tag{7}$$

Das bedeutet, dass auch die untere Platte nicht getroffen wird.

b) Keine Platte wird getroffen.

# 2 Zylinder mit Loch

a) Berechnen Sie das elektrische Feld eines unendlich langen, homogen geladenen Zylinders mit Radius $R$ und linearer Ladungsdichte $\lambda$.

b) Nun wird in diesen Zylinder ein Loch mit Radius $R_L$ gebohrt. Das Loch befindet sich im Mittelpunkt des Zylinders. Berechnen Sie ohne erneute Anwendung des Gaus'schen Satzes das elektrische Feld im Loch, im Hohlzylinder und außerhalb des Zylinders.

c) Nun ist das Loch nicht mehr in der Mitte des Zylinders, sondern um den Vektor $\vec{s}$ verschoben. Berechnen Sie das elektrische Feld **im Inneren** des Lochs.

## Lösung

a) Wir wenden den Gaus'schen Satz an um dieses Problem zu lösen. Als Volumen wählen wir einen Zylinder mit Rotationsachse parallel zur Zylinderachse mit Radius $r$ und Länge $L$.

$$\int \vec{E}d\vec{A} = \int_{Deckflächen} \vec{E}d\vec{A} + \int_{Mantel} \vec{E}d\vec{A} = \frac{1}{\epsilon_0}\int \rho dV \tag{8}$$

Da das elektrische Feld aus Symmetriegründen senkrecht auf den Deckflächen steht hat das Integral keinen Anteil und unsere Rechnung vereinfacht sich zu.

$$\int_{Mantel} \vec{E}d\vec{A} = \frac{1}{\epsilon_0}\int \rho dV \tag{9}$$

Der linke Teil ergibt sowohl im als auch außerhalb des Zylinders

$$\int_{Mantel} \vec{E}d\vec{A} = E2\pi rL \tag{10}$$

Für den Rechten Teil des Integrals müssen wir unterscheiden ob wir im oder außerhalb des Zylinders sind. Für $r > R$ gilt:

$$\frac{1}{\epsilon_0}\int \rho dV = \frac{1}{\epsilon_0}\lambda L \tag{11}$$

und für $r < R$

$$\frac{1}{\epsilon_0}\int \rho dV = \frac{1}{\epsilon_0}\lambda L\frac{r^2}{R^2} \tag{12}$$

Gleichsetzen beider Seiten und auflösen nach E ergibt:

$$\vec{E}(r) = \frac{\lambda}{\epsilon_0 2\pi r}\vec{e}_r \ , \quad r > R \tag{13}$$

$$\vec{E}(r) = \frac{\lambda r}{\epsilon_0 2\pi R^2}\vec{e}_r \ , \quad r < R \tag{14}$$

Die Richtung ergibt sich aus der Symmetrie unseres Gaus-Volumens.

b) Das Superpositionsprinzip erlaubt uns anstatt das Loch direkt zu berechnen das E-Feld des großen Zylinders und eines zweiten mit den Maßen des Loches zu addieren, wobei der kleinere Zylinder exakt die negative Ladung bzw. lineare Ladungsdichte des von ihm eingenommenen Volumen des großen Zylinders trägt.

$$\lambda_L = -\lambda\frac{R_L^2}{R^2} \tag{15}$$

Im Loch addieren wir die inneren Felder beider Zylinder $r < R_L$

$$\vec{E}(r) = \frac{\lambda r}{\epsilon_0 2\pi R^2}\vec{e}_r + \frac{\lambda_L r}{\epsilon_0 2\pi R_L^2}\vec{e}_r = \frac{\lambda r}{\epsilon_0 2\pi R^2}\vec{e}_r - \frac{\lambda r}{\epsilon_0 2\pi R^2}\vec{e}_r = 0 \tag{16}$$

Für das Feld im inneren des Zylinders und außerhalb des Lochs addieren wir das innen Feld des großen und das außen Feld des kleinen Zylinders $R_L < r < R$

$$\vec{E}(r) = \frac{\lambda r}{\epsilon_0 2\pi R^2}\vec{e}_r + \frac{\lambda_L}{\epsilon_0 2\pi r}\vec{e}_r = \frac{\lambda}{\epsilon_0 2\pi R^2}\frac{r^2 - R_L^2}{r}\vec{e}_r \tag{17}$$

Und außerhalb des Hohlzylinders addieren wir die Werte für beide außen Felder $r > R$

$$\vec{E}(r) = \frac{\lambda}{\epsilon_0 2\pi r}\vec{e}_r + \frac{\lambda_L}{\epsilon_0 2\pi r}\vec{e}_r = \frac{\lambda}{\epsilon_0 2\pi r}\left(1 - \frac{R_L^2}{R^2}\right)\vec{e}_r \tag{18}$$

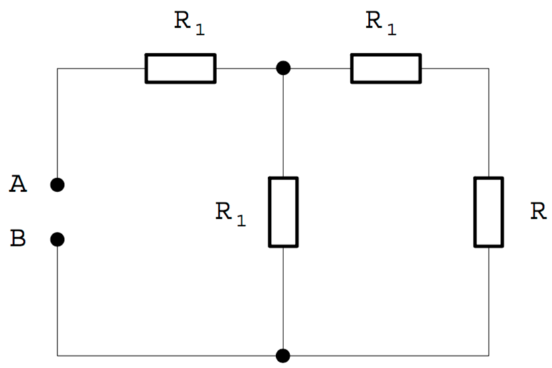
c) Hier verwenden wir das gleiche Prinzip wie in Aufgabenteil b) nur, dass der kleine Zylinder um den Vektor $\vec{s}$ verschoben ist.

$$\vec{E}(r) = \frac{\lambda\vec{r}}{\epsilon_0 2\pi R^2} + \frac{\lambda_L(\vec{r}-\vec{s})}{\epsilon_0 2\pi R_L^2} = \frac{\lambda\vec{r}}{\epsilon_0 2\pi R^2} - \frac{\lambda\vec{r}}{\epsilon_0 2\pi R^2} + \frac{\lambda\vec{s}}{\epsilon_0 2\pi R^2} = \frac{\lambda\vec{s}}{\epsilon_0 2\pi R^2} \tag{19}$$

Das elektrische Feld ist jetzt nicht mehr Null sondern konstant im Loch und zeigt in Richtung $\vec{s}$.

# 3 Widerstandsschaltung

Wie groß muss $R$ in folgender Schaltung gewählt werden, damit der Eingangswiderstand $R_{AB}$ zwischen den Klemmen A und B auch $R$ beträgt?




## Lösung

Der Gesamtwiderstand zwischen den Punkten A und B ist:

$$R_{AB} = R_1 + R' \equiv R$$

Für den Widerstand $R'$ der Parallelschaltung gilt:

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_1 + R} = \frac{2R_1 + R}{R_1(R_1 + R)}$$

Einsetzen in den Gesamtwiderstand $R_{AB}$ und umformen nach $R$.

$$R_1 + \frac{R_1(R_1 + R)}{2R_1 + R} = R$$

$$3R_1^2 = R^2 \Rightarrow R = \sqrt{3}R_1$$

# 4 Drahtschleife im Erdmagnetfeld

Eine dünne und als gewichtslose anzunehmende quadratische Drahtschleife der Seitenlänge $a = 20\,\mathrm{cm}$ wird parallel zur Erdoberfläche in ihrem Mittelpunkt aufgehängt. Es führt ein Magnetfeld der Stärke $B = 0,1\,\mathrm{T}$ durch sie hindurch, welches um 30° zu einer Senkrechten der Schleife gedreht ist.
Nun wird eine Punktmasse der Masse $m = 1\,\mathrm{g}$ genau in der Mitte einer Seite der Schleife befestigt und ein Strom $I$ durch die Schleife geschickt. Wie groß muss der Strom sein, damit die Schleife sich nicht bewegt?

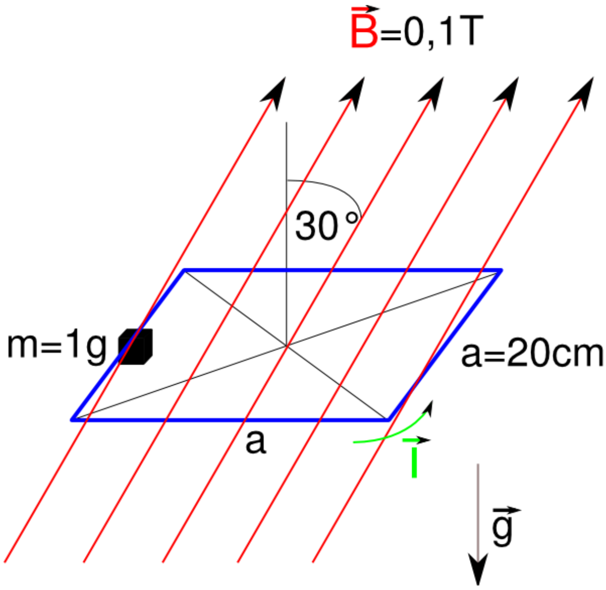
## Lösung

Im Folgenden wird der Ursprung des Koordinatensystems in den Mittelpunkt der Schleife gelegt und die $x$- und $y$-Achse an den Seiten der Schleife orientiert. Das magnetische Moment der Schleife ist

$$\vec{\mu} = I \cdot \vec{A} = Ia^2\vec{e}_z \tag{20}$$

Im Magnetfeld wirkt ein Drehmoment auf die Drahtschleife.

$$\vec{D}_B = \mu \times \vec{B} = \mu B \sin(30°)\vec{e}_y = Ia^2 B \sin(30°)\vec{e}_y \tag{21}$$




Ein weiteres Drehmoment wirkt auf die Drahtschleife aufgrund der daran angebrachten Masse $m$ am Ort $\vec{r} = (-a/2, 0, 0)$. Auf diese wirkt die Erbeschleunigung $\vec{g} = (0, 0, -g)$.

$$\vec{D}_g = \vec{r} \times \vec{F}_g = -\frac{amg}{2}\vec{e}_y$$

Da sich die Drahtschleife nicht bewegen soll, müssen sich diese beiden Drehmomente kompensieren. Aus dieser bedinging kann die Stromstärke bestimmt werden.

$$\vec{D}_B + \vec{D}_g = 0 \Rightarrow I = \frac{mg}{2aB\sin(30°)} = 0,49\,\mathrm{A} \tag{22}$$

# 5 Stab fällt durch Erdmagnetfeld

Es fällt von der Höhe $h = 1$ m ein metallischer Bügel der Breite $b = 10$ cm und Masse $m = 0.1$ kg entlang zweier senkrechter Leiter zu Boden. Parallel zur Erdoberfläche verlaufen die Feldlinien des Erdmagnetfeldes mit einer Stärke $B = 31$ $\mu$T.

a) Stellen Sie eine Formel für die induzierte Spannung auf und berechnen Sie, die nach der Fallstrecke $h$ induzierte Spannung $U_{ind}$. Vernachlässigen sie die Lorentzkraft.

b) Stellen Sie eine Formel für die Kraft auf, wenn der Widerstand 10 $\Omega$ beträgt. Zeigen Sie, dass die Annahme aus a), die Kraft zu vernachlässigen korrekt war.

c) Berechnen Sie die elektrische Arbeit, die während dem Fall verrichtet wird.

## Lösung

a) Die Position des Stabes $z(t)$ ist gegeben durch

$$z(t) = h - \frac{1}{2}gt^2 \tag{23}$$

Benutzen wir das zusammen mit dem Induktionsgesetz erhalten wir

$$U_{ind}(t) = -\dot{\phi} = -B\frac{dA}{dt} = -Bb\frac{dz}{dt} = -Bbgt \tag{24}$$

Für die Zeit bis zum Aufprall erhalten wir

$$t_0 = \sqrt{\frac{2h}{g}} \tag{25}$$

Und damit für die Induzierte Spannung nach dem Fall um $h$

$$U_{ind}(t_0) = -Bbg\sqrt{\frac{2h}{g}} = -1,37 \times 10^{-5}\ \mathrm{V} \tag{26}$$

b) Die wirkende kraft ist die Lorentzkraft

$$F_l(t) = BbI(t) = \frac{U(t)bB}{R} = -\frac{B^2b^2gt}{R} \tag{27}$$

Um zu Überprüfen, ob die Kraft im Vergleich zur Gewichtskraft vernachlässigbar ist berechnen wir ihren größten Wert bei $t = t_0$.

$$F_l(t_0) = -\frac{B^2b^2gt_0}{R} = -\frac{B^2b^2g\sqrt{\frac{2h}{g}}}{R} = -4,26 \times 10^{-12}\ \mathrm{N} \tag{28}$$

Dies ist im Vergleich zur Gewichtskraft, die bei $m = 0.1$ kg bei 0,981 N liegt zu vernachlässigen.

c) Wir berechnen die elektrische Arbeit durch integrieren der erbrachten elektrischen Leistung über die Zeit

$$\begin{aligned} W_{el} = \int_0^{t_0} P_{el}dt = \int_0^{t_0} U(t)I(t)dt = \int_0^{t_0} \frac{B^2b^2g^2t^2}{R}dt &= \frac{B^2b^2g^2t_0^3}{R} \\ &= 8,51 \times 10^{-12}\ \mathrm{W} \end{aligned} \tag{29}$$

# 6 Fahrradlicht mit Kondensator

Eine Glühlampe in einem Fahrradrücklicht besitzt die Aufschrift "6V/5W". Nach dem Anhalten leuchtet die Lampe noch 3 Minuten nach, bis die Spannung $U$ die Hälfte der Spannung $U_0$ beträgt, die während des Fahrens anliegt. Berechnen Sie die Kapazität des in dem Rücklicht eingebauten Kondensators.

## Lösung

Die Spannung, welche an der Lampe anliegt ist gleich der Spannung am Plattenkondensator:

$$\frac{Q}{C} = -R \cdot I \tag{30}$$

Mit der Relation

$$I = \frac{dQ}{dt} \tag{31}$$

erhalten wir für Q eine Differentialgleichung erster Ordnung in der Zeit:

$$Q = -R \cdot C \cdot \dot{Q} \tag{32}$$

Diese lässt sich mit Hilfe des exponentiellen Ansatzes lösen:

$$Q = Q_0 \cdot e^{-\frac{1}{RC} \cdot t} \tag{33}$$

Auf Grund dessen, dass Q und U über den konstanten Faktor C miteinander verknüpft sind, können wir das selbe für U machen:

$$U = U_0 \cdot e^{-\frac{1}{RC} \cdot t} \tag{34}$$

Der Widerstand R errechnet sich durch

$$R = \frac{U_0}{I_0} = \frac{U_0^2}{P} = 7,2\Omega \tag{35}$$

Im letzten Schritt wurden dabei die Werte eingesetzt, die auf der Glühlampe genannt wurden. Mit der Annahme, das die Lampe nicht mehr leuchtet, wenn $U = \frac{U_0}{2}$ folgt:

$$\frac{1}{2} = e^{-\frac{1}{RC} \cdot t} \tag{36}$$

So folgt für die Kapazität

$$C = -\frac{1}{R \cdot \ln(0,5)} \cdot t = \frac{-1}{7,2\Omega \cdot \ln(0,5)} \cdot 180s = 36,07F \tag{37}$$

# 7 EM-Welle

Zu bestimmen ist die Vakuum-Wellenlängen der elektromagnetischer Wellen, deren Schwingungsfrequenz im Vakuum 450 GHz beträgt. Welche Wellenzahl $k$ hat die Welle?

## Lösung

Die Frequenz $\nu$ und legt im die Wellenlänge im Vakuum fest.

$$c = \nu \cdot \lambda \Rightarrow \lambda = \frac{c}{\nu} = 666,2\,\mu\text{m} \tag{38}$$

Die Wellenzahl berechnet sich zu:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = 9,43 \cdot 10^3 \frac{1}{\text{m}} \tag{39}$$

# 8 Raumschiff

Im April des Jahres 2063 startet ein Raumschiff von der Erde und fliegt mit $v = 0,95c$ zum $4,34$ Lichtjahre entfernten Sternsystem Alpha Centauri. Als es dort ankommt, findet die Besatzung leider nichts Aufregendes und kehrt gleich wieder um.

a) Welches Jahr ist es auf der Erde, wenn das Raumschiff zurückkehrt, und welches Jahr ist es dann subjektiv für die Besatzung?

b) Auf dem Weg kommt das Raumschiff an einer Beobachtungsstation auf dem Pluto vorbei. Zu diesem Zeitpunkt hat es bereits volle Geschwindigkeit erreicht. Wie groß erscheint es für die Kameras auf dem Pluto, wenn es beim Bau 300 m lang war?

**Hinweis:** Beschleunigungseffekte können vernachlässigt werden.

## Lösung

a) Die Relativgeschwindigkeit des Raumschiffs zur Erde ist $v = 0,95c$. Daher kann man aus dem Blickwinkel der Erde ganz normal berechnen, wie lange das Schiff für den Hin- und Rückweg braucht.

$$\Delta t_E = \frac{2\Delta x}{v} = 9,14\,\text{Jahre}$$

Demnach ist es bei der Rückkehr der Besatzung auf der Erde das Jahr 2072.
Vom System der Erde aus gesehen kommt es im System des Raumschiffs aber zu einem verlangsamten Ablauf:

$$\Delta t_S = \frac{\Delta t_E}{\gamma} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\Delta t_E = 2,85\,\text{Jahre} \tag{40}$$

Also ist es bei der Rückkehr vom Schiff aus gesehen erst das Jahr 2066 (denn zur Startzeit im April war sozusagen das Jahr 2063,3).

b) Das Raumschiff ruht im Bezugssystem der Besatzung und bewegt sich im System des Pluto. Daher ist $L = 300\,\text{m}$ (denn die Besatzung sah das Raumschiff beim Einstieg schließlich auch ruhend) und

$$L' = \frac{L}{\gamma} = 93,7\,\text{m} \tag{41}$$

für die Beobachtungsstation.