Ferienkurs Experimentalphysik 2

Lösung Übungsblatt 4

Tutoren: Elena Kaiser und Matthias Golibrzuch

6 Elektromagnetische Wellen

6.1 Kugelwelle

Zeigen sie dass die Kugelwelle $\xi = \frac{A}{r}\exp(i(kr - \omega t))$ die Wellengleichung

$$\Delta\xi = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \tag{1}$$

löst. Wie groß ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle?
Hinweis: Der Laplacoperator in Kugelkoordinaten ist gegeben durch

$$\Delta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin(\theta)\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2(\theta)}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \tag{2}$$

Lösung

Einsetzen und explizites Ausrechnen von beiden Seiten der Wellengleichung liefert

$$\Delta\xi = \left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin(\theta)\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2(\theta)}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right)\xi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\xi}{\partial r}\right) = -k^2\xi$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2}(-i\omega)^2\xi = -\frac{\omega^2}{c^2}\xi = -k^2\xi$$

Hierbei wurde der Zusammenhang $\omega^2 = k^2c^2$ ausgenutzt. Somit löst die Kugelwelle die Wellengleichung. Ebenso ist ersichtlich, dass sie sich mit $v = c$ ausbreitet.

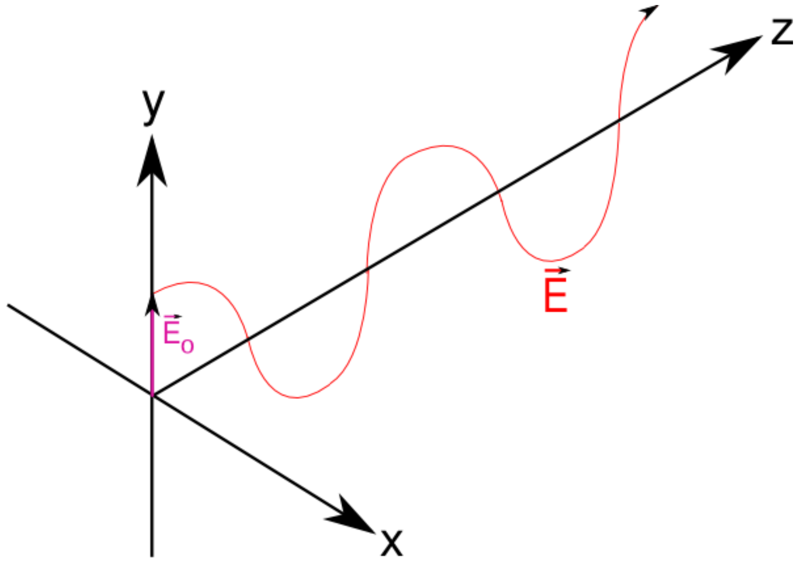
6.2 EM-Welle 1

Eine linear polarisierte elektromagnetische Welle pflanzt sich, wie in der Abbildung gezeigt, in positive z-Richtung fort. Der Vektor des elektrischen Feldes schwingt wie angegeben entlang der y-Achse. Die Maximalamplitude beträgt $E_0 = 1000\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$, die Welle hat eine Frequenz von 1 MHz.

a) Was ist die maximale magnetische Feldstärke B_0?

b) Geben Sie Betrag und Richtung des Vektors des magnetischen Feldes an einem Ort an, an dem $\vec{E} = (0; 250\,\mathrm{V/m}; 0)$ ist.

c) Was ist die kleinste Entfernung zwischen dem zuvor betrachteten Ort und dem nächsten Durchlaufen des maximalen magnetischen Feldes?



Lösung

a) Für die maximal mögliche magnetische Feldstärke ergibt sich $B_0 = \frac{E_0}{c} = 3,3\,\mu\text{T}$.

b) Am beschriebenen Ort z_1 hat das elektrische Feld ein Viertel des Maximalwerts, somit auch das Magnetfeld:

$$B(z_1) = \frac{E(z_1)}{c} = \frac{1}{4}B_0 = 0,83\,\mu\text{T}$$

Die Richtung ergibt sich aus der Tatsache, dass im Vakuum das Magentfeld $\vec{B}$ sowohl senkrecht zum elektrischen Feld $\vec{E}$ als auch zum Wellenvektor $\vec{k}$ steht. Das elektrische Feld ist in y-Richtung polasisiert, zeigt am Ort z_1 in positive Richtung und die Welle breitet sich in positive z-Richtung aus, deshalb zeigt das Magetfeld am Ort z_1 in positive x-Richtung.

c) Legt man das Koordinatensystem so, dass das Maximum bei $z = 0$ erreicht wird, kann man von einer einfachen Kosinuswelle ausgehen.

$$B(z) = B_0 \cos(kz)$$

Die Wellenzahl k berechnet sich aus der Frequenz zu:

$$k = \frac{2\pi}{c} \cdot \nu = 20,96 \cdot 10^{-3}\,\frac{1}{\text{m}} \tag{3}$$

Der Ort z_1 ist dann die gesuchte Entfernung.

$$z_1 = \frac{1}{k} \arccos\left(\frac{B(z_1)}{B_0}\right) = 63\,\text{m}$$

6.3 EM-Welle 2

Eine ebene, harmonische, monochromatische ($\lambda = 500\,\text{nm}$) elektromagnetische Welle breite sich im Vakuum entlang der x-Achse aus. Die Amplitude des elektrischen Felds betrage $E_0 = 100\,\text{V/m}$ und sei in z-Richtung polarisiert. Weiterhin sei $\vec{E}(\vec{r} = 0, t = 0) = E_0\vec{e}_z$ vorgegeben.

a) Geben sie die Kreisfrequenz ω und den Wellenvektor $\vec{k}$ an.

b) Geben sie $\vec{E}(\vec{r}, t)$ an und berechnen sie das dazugehörige $\vec{B}(\vec{r}, t)$.

c) Bestimmen sie die Energiedichte, die Intensität sowie die Richtung des Energieflusses.

Lösung

a) Der Betrag des Wellenvektors ist duch die Wellenlänge λ fest vorgeben. Die Richtung von $\vec{k}$ ist gleich der Ausbreitungsrichtung der elektromagnetischen Welle.

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = 12,57 \cdot 10^6 \, \frac{1}{\mathrm{m}} \tag{4}$$

$$\vec{k} = k\vec{e}_x \tag{5}$$

Für die Kreisfrequenz ω gilt folgender Zusammenhang.

$$c = \frac{\omega}{k} \Rightarrow \omega = c \cdot k = 3,77 \cdot 10^{15} \frac{1}{s} \tag{6}$$

b) Das elektrische Feld dieser Welle ist über die Anfangsbedingung festgelegt.

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = E_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)\vec{e}_z = E_0 \cos(kx - \omega t)\vec{e}_z$$

Das Magnetfeld der Welle steht sowohl senkrecht zum Wellenvektor $\vec{k}$ als auch zum elektrischen Feld.

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\omega}(\vec{k} \times \vec{E}) = -\frac{kE_0}{\omega} \cos(kx - \omega t)\vec{e}_y = -\frac{E_0}{c} \cos(kx - \omega t)\vec{e}_y \tag{7}$$

c) Die Energiedichte w_{em} und die Intensität I der elektromagnetischen Welle sind gegeben durch:

$$w_{em} = \frac{1}{2}\epsilon_0(E^2 + c^2B^2) = \epsilon_0 E^2 = 8,854 \cdot 10^{-8} \, \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2} \tag{8}$$

$$I = c\epsilon_0 E^2 = 26,54 \, \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}} \tag{9}$$

Um die Richtung des Energieflusses zu bestimmen wird der Poynting-Vektor berechnet.

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = \epsilon_0 c^2 (\vec{E} \times \vec{B} = \epsilon_0 c E^2 \vec{e}_x = I\vec{e}_x \tag{10}$$

Die elektromagnetische Welle transportiert somit Energie in Richtung der Ausbreitungsrichtung.

7 Relativitätstheorie

7.1 Lorentztransformation

S' bewegt sich in positive x-Richtung mit der Geschwindigkeit $v = 0,25c$ zum S-System, so dass die Ursprünge der Koordinatensysteme zur Zeit $t = t' = 0$ in Deckung sind. Im S'-System blitzen die Lampe 1 am Ort $x'_1 = 2 \cdot 10^6\,\mathrm{km}$ zur Zeit $t'_1 = 40\,\mathrm{s}$ und die Lampe 2 am Ort $x'_2 = -4 \cdot 10^6\,\mathrm{km}$ zur Zeit $t'_2 = 45\,\mathrm{s}$ auf. Berechnen Sie die Orte x_1 und x_2 sowie die Zeiten t_1 und t_2 für diese Ereignisse im S-System.

Lösung

Für die Lorentztransformation muss zunächst der Lorentzfaktor berechnet werden.

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{4}{\sqrt{15}} = 1,033 \tag{11}$$

Für das Ereignis 1 (Lichtblitz der Lampe 1) kann nun eine Lorentztransformation vom bewegten System S' in das System S durchgeführt werden.

$$x = \gamma(x' + vt') \Rightarrow x_1 = 5,2 \cdot 10^6\,\text{km}$$

$$t = \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right) \Rightarrow t_1 = 43\,\text{s}$$

Analog berechnen sich die Koordinaten des Ereignisses 2 (Lichtblitz der Lampe 2).

$$x_2 = -0,65 \cdot 10^6\,\text{km}$$

$$t_2 = 43\,\text{s}$$

7.2 Raumschiffe

Zwei Raumschiffe R_1 und R_2 starten zur Erdzeit $t = 0$ für eine Forschungsmission in Richtung des Sternbildes Cygnus (Schwan). Mit der Erdstation sei das System $S(t,x)$, mit dem Raumschiff R_1 das System $S' = (t', x')$ und mit dem Raumschiff R_2 das System $S'' = (t'', x'')$ fest verbunden. Bezogen auf die Erdstation hat das Raumschiff R_1 die Geschwindigkeit $v_1 = 0,6c$ und das Raumschiff R_2 die Geschwindigkeit $v_2 = 0,8c$. Die Borduhren sowie die Missionsuhr auf der Erdstation wurden beim Start synchronisiert und die Systeme S, S' und S'' seien gleich orientiert.

a) Zeichnen Sie ein Minkowski-Diagramm für das S-System und tragen sie Weltlinien der Raumschiffe R_1 und R_2 ein.

b) Bestimmen Sie die Geschwindigkeit des Raumschiffs R_2 im System des Raumschiffs R_1.

Zum Zeitpunkt $t_1 = 1\,\text{h}$ wird zur Kontrolle der Raumschiffe ein Lichtspruch an sie versandt. Der Lichtspruch wird von Raumschiff R_2 zum Zeitpunkt t''_2 (Ereignis P) sofort beantwortet und zur Erdstation zurückgesandt und trifft dort zum Zeitpunkt t_3 ein.

c) Tragen sie das Ereignis P in das Minkowski-Diagramm ein und berechnen sie die Zeit t_3

Nach $t'_P = 10\,\text{h}$ Flugzeit registriert das Raumschiff R_1 (Ereignis Q) gleichzeitig zwei Sternenexplosionen $E_1(t'_Q, x'_{E1})$ und $E_2(t'_Q, x'_{E2})$. Der räumliche Abstand $|x'_{E2} - x'_{E1}|$ wird zu $\frac{8}{5}$ Lichtstunden bestimmt. Die Ereignisse E_1 und E_2 liegen symmetrisch zur halben bis t'_Q von R_1 zurückgelegten Flugstrecke. Das Raumschiff meldet das Ereignis Q sofort per Lichtspruch an das Raumschiff R_2 und die Erdstation. Auf der Erde trift die Nachricht zum Zeitpunkt t_4 und auf R_2 zum Zeitpunkt t''_4 ein.

d) Tragen Sie das Ereignis Q in das Minkowski-Diagramm ein. Berechnen sie die Zeitpunkte t_4 und t''_4. Verwenden sie ihre Ergebnisse aus Teilaufgaben 1b) und c).

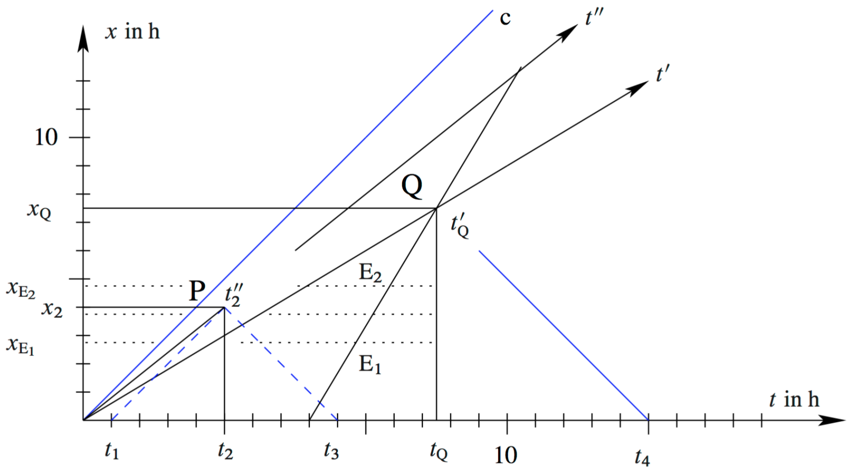
e) Berechnen sie die räumlichen Koordinaten x_{E1} und x_{E2} der Ereigniss E_1 und E_2 im System S. Tragen sie dann die beiden Ereignisse in das Minkowski-Diagramm ein. Welche Bedeutung hat die Linie, auf der Die Ereignisse Q, E_1 und E_2 liegen?

Lösung

Für die späteren Berechnungen werden zunächst die Lorentzfaktoren der beiden Raumschiffe benötigt.

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \Rightarrow \gamma_1 = \frac{5}{4} \text{ und } \gamma_2 = \frac{5}{3} \tag{12}$$

Hierbei ist $\beta = \frac{v}{c}$.



a)

b) $v_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta t_2}$ ist die Geschwindigkeit des Raumschiffs R_2 im Erdsystem. Lorentztransformation in das System S':

$$ct' = \gamma(ct - \beta x) \tag{13}$$

$$x' = \gamma(x - \beta ct) \tag{14}$$

$$\Rightarrow \frac{x'}{ct'} = \frac{x - \beta ct}{ct - \beta x} = \frac{\frac{x}{t} - \beta c}{c - \beta \frac{x}{t}}$$

somit

$$v'_2 = \frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{\frac{\Delta x}{\Delta t} - \beta c}{1 - \frac{\beta}{c}\frac{\Delta x}{\Delta t}} = \frac{v_2 - v_1}{1 - \frac{v_1 v_2}{c^2}} = \frac{5}{13}c$$

c) Das Raumschiff R_2 befindet sich im Bezugssystem der Erde am Ort

$$x_R = v_2 \cdot t \tag{15}$$

Der Lichtspruch befindet sich hingegen am Ort

$$x_S = c(t - t_1) \tag{16}$$

Um den Zeitpunkt t_2 zu bestimmen wird die Bedingung ausgenutzt, dass der Lichtspruch am Raumschiff ankommt, wenn beide am selben Ort $x_R = x_S = x_2$.

$$v_2 \cdot t_2 = c(t_2 - t_1) \Rightarrow t_2 = \frac{c}{c - v_2} t_1 = 5\,\text{h} \tag{17}$$

Die Laufzeit des Signals zum Raumschiff R_2 beträgt somit

$$\Delta t = t_2 - t_1 = 4\,\text{h} \tag{18}$$

Diese Zeitdifferenze entspricht auch der Laufzeit des Signals vom Raumschiffs zurück zum Erdbeobachter. Für t_3 folgt somit

$$t_3 = t_2 + \Delta t = 2t_2 - t_1 = 9\,\text{h} \tag{19}$$

d) Das Raumschiff R_1 registriert die beiden Erignisse zur Zeit $t'_P = 10\,\mathrm{h}$ und befindet sich am Ort $x'_Q = 0$. Eine Lorentztranformation in das System des Erbeobachters liefert:

$$t_P = \gamma_1 \left(t'_P + \frac{v_1 x'_P}{c^2} \right) = \gamma_1 t'_P = 12,5\,\mathrm{h} \tag{20}$$

$$x_Q = \gamma_1 (x'_Q + v_1 t'_P) = v_1 \gamma_1 t'_P = v_1 t_P = 7,5\,\text{Lichtstunden} \tag{21}$$

Um vom Ort x_Q zurück zur Erde zu kommen braucht das zur Zeit t_p vom Raumschiff R_1 losgeschickte Signal die Zeit Δt_1.

$$\Delta t_1 = \frac{x_Q}{c} = 7,5\,\mathrm{h} \tag{22}$$

Insgesamt ergibt sich die Zeit t_4.

$$t_4 = t_p + \Delta t_1 = 20\,\mathrm{h} \tag{23}$$

Um die Zeit t''_4 zu bestimmen wird ähnlich wie in Teilaufgabe c) vorgegangen.
Wir befinden uns im Koordinatensystem des Raumschiffs R_1. Ein Beobachter bestimmt den Ort x'_R an dem sich das Raumschiff R_2 befindet und den Ort x'_S an dem sich das Lichtsignal befindet.

$$x'_R = v'_2 \cdot t' \tag{24}$$

$$x'_S = c(t - t'_P) \tag{25}$$

Das Raumschiff R_2 registriert das Signal zum Zeitpunkt t'_4.

$$x'_R = x'_S \tag{26}$$

$$v'_2 \cdot t'_4 = c(t'_4 - t'_P) \Rightarrow t'_4 = \frac{c}{c - v'_2} t'_P = 16,25\,\mathrm{h} \tag{27}$$

Für die anschließende Lorentztranformation benötigen wir zunächst den Lorentzfaktor γ'_2.

$$\gamma'_2 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{(v'_2)^2}{c^2}}} = \frac{13}{12} \tag{28}$$

Einsetzten in die Lorentztransformation der Zeit:

$$t''_4 = \gamma'_2 \left(t'_4 - \frac{v'_2}{c^2} x'_4 \right) = \gamma'_2 \left(t'_4 - \frac{v'_2}{c^2} v'_2 t'_4 \right) = \gamma'_2 \left(1 - \frac{(v'_2)^2}{c^2} \right) = \frac{t'_4}{\gamma'_2} = 15\,\mathrm{h} \tag{29}$$

e) Der Ort x_Q an dem sich das System R_1 befindet als es die beiden Ereignisse registriert wurde bereits in der vorherigen Teilaufgabe bestimmt. Die halbe Flugstrecke lässt sich somit leicht bestimmen.

$$x_S = \frac{x_Q}{2} = \frac{15}{4}\,\text{Lichtstunden}$$

Die Ereignisse liegen symmetrisch zu x_S. Der Abstand $|x'_{E2} - x'_{E1}|$ wird in S' gemessen, der Abstand $|x_{E2} - x_{E1}|$ in S erscheint länger.

$$|x_{E2} - x_{E1}| = \gamma_1 |x'_{E2} - x'_{E1}| = 2\,\text{Lichtstunden}$$

Die beiden Ereignisse haben somit die Koordinaten

$$x_{E_i} = x_S \pm \frac{|x_{E2} - x_{E1}|}{2} \Rightarrow x_{E1} = \frac{11}{4}\,\text{Lichtstunden und } x_{E2} = \frac{19}{4}\,\text{Lichtstunden}$$

Die Gerade durch die Punkte Q, E_1 und E_2 stellt die Gleichzeitigkeitslinie im System S' dar.

7.3 Einstein-Zug

Der Einstein-Zug S' bewegt sich in positive x-Richtung mit der Geschwindigkeit $v = 0,6c$ zum Bahnhof S, so dass die Ursprünge der Koordinatensysteme am Zugende ($x' = 0$) bzw. der hinteren Bahnsteigkante ($x = 0$) zur Zeit $t = t' = 0$ in Deckung sind. S' gibt zur Zeit $t' = 0$ einen Schuss in positive x'-Richtung auf die Lokomotive ab. Er stellt fest, dass das Geschoss eine Geschwindigkeit von $u' = 0,8c$ hat und in die Lokomotive einschlägt. Anschließend bestimmt er die Länge des Zuges zu $s' = 3$ Lichtsekunden.

a) Welche Zuglänge s misst S?

b) Welche Laufzeit Δt misst S für das Geschoss?

c) Welche Geschwindigkeit u misst S für das Geschoss?

Lösung

a) Um die Zuglänge s bestimmen zu können wird der Lorentzfaktor γ für den bewegten Zug benötigt.

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 1,25$$

Der Zug wirkt für einen Beobachter auf dem Bahnsteig längenkontrahiert.

$$s = \frac{s'}{\gamma} = 2,4\,\text{Lichtsekunden}$$

b) Ein Beobachter im Zug bestimmt die Laufzeit zu:

$$t'_0 = \frac{s'}{u'} = 3,75\,\text{s}$$

Da der Auftreffort und der Abschussort nicht auf der selben Stelle liegen wird die Flugzeit t_0 für einen Beobachter in S über eine Lorentztransformation des Zeitpunkts t'_0 bestimmt.

$$t_0 = \gamma \left(t'_0 + \frac{v}{c^2} s' \right) = 6,96\,\text{s}$$

c) Das Geschoss ist für einen Beobachter in S' zur Zeit t'_0 am Ort s'. Für einen Beobachter ist es zur Zeit t_0 am Ort s.

$$s = \gamma(x + vt'_0) = 6,56\,\text{Lichtsekunden}$$

Die Geschwindigkeit u, welche der Beobachter in S misst, ist somit:

$$u = \frac{s}{t_0} = 0,95c$$

Alternativ kann die Geschwindigkeit auch über eine Geschwindigkeitstransformation erhalten werden.

$$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}} = 0,95c$$