Ferienkurs Experimentalphysik 2

Lösung Übungsblatt 2

Tutoren: Elena Kaiser und Matthias Golibrzuch

2 Elektrischer Strom

2.1 Elektrischer Widerstand

Ein Bügeleisen von 235 V / 300 W hat eine Heizwicklung aus einem Manganinband (spezifischer Widerstand $\rho = 4 \cdot 10^{-7}\,\Omega m$) von $0,5$ mm Breite und $0,05$ mm Dicke.

a) Wie lang muss das Manganinband sein?

b) Wie ändert sich die Leistung des Bügeleisen, wenn man es an 110 V anschließt?

c) Wie müsste man die Länge der Wicklung ändern, damit das Bügeleisen bei 100 V die gleiche Leistung hat?

Lösung

a) Bei gegebener Leistung P_0 und fester Spannung kann der benötigte Widerstand des Manganinbands bestimmt werden.

$$P = U \cdot I = I^2 \cdot R = \frac{U^2}{R} \Rightarrow R = \frac{U_0^2}{P_0} = 184,1\,\Omega \tag{1}$$

Mit Hilfe des spezifischen Widerstands und der Querschnittsfläche kann die Länge des Manganinbands berechnet werden.

$$R = \rho\frac{L}{A} = \rho\frac{L}{b \cdot d} \Rightarrow L = \frac{R \cdot b \cdot d}{\rho} = 11,5\,\mathrm{m} \tag{2}$$

b) Der Widerstand des Bügeleisens bleibt unverändert. Mit Gleichung (1) kann die Leistung bei einer Spannung von $U_1 = 110$ V bestimmt werden.

$$P_1 = \frac{U_1^2}{R} = 65,7\,\mathrm{W}$$

c) Bei gleichbleibender Leistung P_0 muss die Länge des Manganinbands angepasst werden.

$$P_0 = \frac{U^2 \cdot b \cdot d}{\rho \cdot L} \Rightarrow L_1 = \frac{U_2^2 \cdot b \cdot d}{\rho \cdot P_0} = 2,1\,\mathrm{m}$$

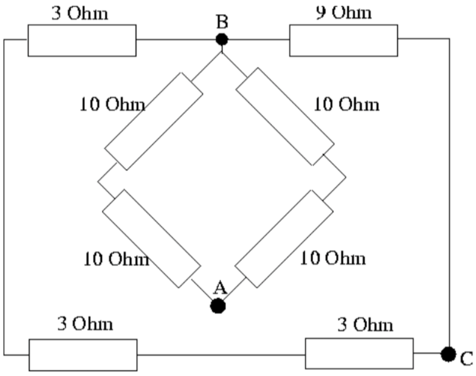
2.2 Widerstandsnetzwerk 1

Die Abbildung unten zeigt ein zusammengeschaltetes Netzwerk aus verschiedenen Widerständen. Zwischen den Punkten A und C fließt ein Strom von 2 A. Berechnen Sie die Spannung zwischen den Punkten

a) A und C

b) A und B

c) B und C.



Lösung

a) Bei bekannter Stromstärke I, kann die anliegende Spannung über das Ohm'sche Gesetz bestimmt werden.

$$I = \frac{U}{R} \Rightarrow U = I \cdot R \tag{3}$$

Nun muss der Gesamtwiderstand R_{ges} berechnet werden. Er addiert sich linear aus den Widerständen R_{AB} zwischen den Punkten A und B und dem Widerstand R_{BC} zwischen den Punkten B und C.

$$R_{ges} = R_{AB} + R_{BC}$$

Bei R_{AB} und R_{BC} handelt es sich jeweils um Parallelschaltungen. Für diese gilt:

$$\frac{1}{R_{AB}} = \frac{1}{2 \cdot R_1} + \frac{1}{2 \cdot R_1} = \frac{1}{10\,\Omega} \Rightarrow R_{AB} = 10\,\Omega$$

$$\frac{1}{R_{BC}} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{3 \cdot R_3} = \frac{2}{9\,\Omega} \Rightarrow R_{AB} = 4,5\,\Omega$$

Somit ist $R_{ges} = 14,5\,\Omega$ und die anliegende Spannung ergibt sich zu

$$U = I \cdot R_{ges} = 29\,\mathrm{V}$$

b) Da es sich um eine Reihenschaltung aus den Widerstandsnetzwerk zwischen den Punkten A und B und dem Widerstandsnetzwerk zwischen B und C handelt, fließen durch beide Netzwerke der gesamte Strom I.

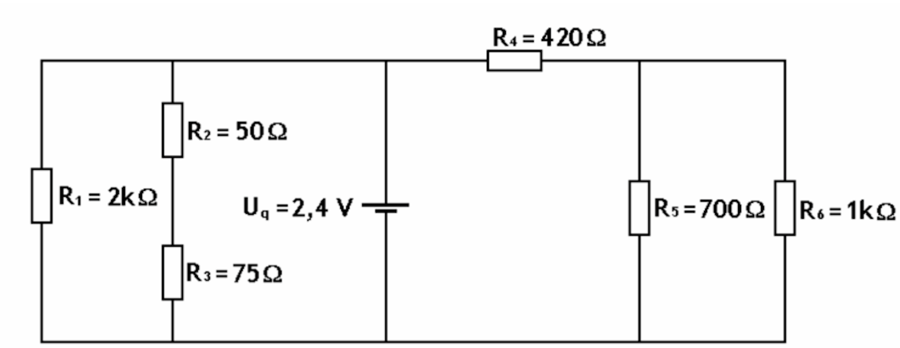
$$U_{AB} = I \cdot R_{AB} = 20\,\mathrm{V}$$

c)

$$U_{BC} = I \cdot R_{BC} = 9\,\mathrm{V}$$

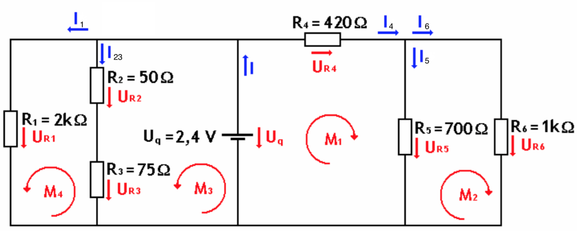
2.3 Widerstandsnetzwerk 2

Gegeben sei das folgende Gleichspannungsnetz. Zeichenen sie die Richtungen aller Ströme sowie der Spannungsabfälle ein und berechenen sie diese.
Hinweis: Für die berechnungen ist es hilfreich sich zunächst ein Ersatzschaltbild zu zeichen.
Spannungspeile zeigen immer vom positiveren zum negativeren Potential. Der Strom fließt in Richtung der Spannung (technische Stromrichtung von + nach −).

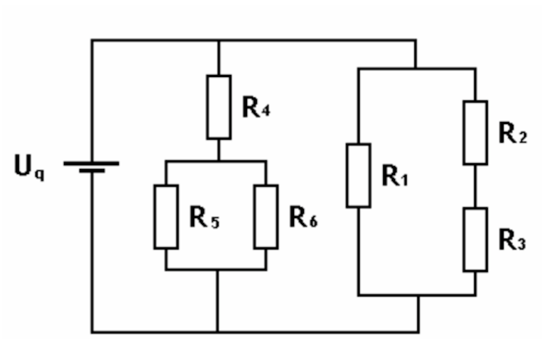


Lösung

In dieser Schaltung fließen die Ströme und Spannungen wie folgt. In der Abbildung sind auch die verwendeten Maschen eingezeichnet.
Um später alle Ströme und Spannungen berechnen zu können ist es vorteilhaft ein Er-



satzschaltbild zu zeichen. Über dieses kann der Gesamtwiderstand einfach, mittel Hilfe



der Regeln für in Reihe und parallel geschaltene Widerstände, berechnet werden.

$$R_{23} = R_2 + R_3 = 125\,\Omega$$

$$R_{123} = \frac{R_1 \cdot R_{23}}{R_1 + R_{23}} = 117,6\,\Omega$$
$$R_{56} = \frac{R_5 \cdot R_6}{R_5 + R_6} = 411,8\,\Omega$$
$$R_{456} = R_4 + R_{56} = 831,8\,\Omega$$
$$R_{ges} = \frac{R_{456} \cdot R_{123}}{R_{456} + R_{123}} = 103\,\Omega$$

Über das Ohmsche Gesetz kann der gesamte fließende Strom I berechnet werden.

$$I = \frac{U_q}{R_{ges}} = 23,3\,\mathrm{mA}$$

Um alle Ströme und Spannungen berechnen zu können werden sechs weitere Gleichungen benötigt. Vier dieser Gleichungen können über die Maschen M_1, M_2, M_3 und M_4 gestellt werden, die beiden letzten über zwei Knotenpunkte. Da Widerstand R_2 und R_3 in Reihe geschalten sind fließt durch die beiden der gleiche Strom $I_2 = I_3 = I_{23}$

$$U_q = I_4 R_4 + I_5 R_5$$
$$0 = -I_5 R_5 + I_6 R_6$$
$$U_q = I_2 R_2 + I_3 R_3$$
$$0 = I_2 R_2 + I_3 R_3 - I_1 R_1 = (R_2 + R_3) I_{23} - I_1 R_1$$
$$I = I_1 + I_{23} + I_4$$
$$I_4 = I_5 + I_6$$

Der erste Widerstand R_1 ist parallel zu allen anderen Widerständen geschalten. Über in fällt deshalb die gesamte Quellspannung $U_q = U_1 = 2,4\,\mathrm{V}$ ab. Somit folgt für den Strom:

$$I_1 = \frac{U_1}{R_1} = 1,2\,\mathrm{mA}$$

Um die Ströme und Spannungen an den Widerständen R_2 und R_3 bestimmen zu können betrachten wir Masche M_3.

$$I_{23} = \frac{U_q}{R_{23}} = 19,2\,\mathrm{mA}$$
$$U_2 = R_2 \cdot I_{23} = 0,96\,\mathrm{V}$$
$$U_3 = R_3 \cdot I_{23} = 1,44\,\mathrm{V}$$

Über die Knotenregel kann I_4 bestimmt werden, sowie anschließend die Spannung U_4.

$$I_4 = I - I_1 - I_{23} = 2,9\,\mathrm{mA}$$
$$U_4 = R_4 \cdot I_4 = 1,218\,\mathrm{V}$$

An den Widerständen R_5 und R_6 liegt die gleiche Spannung an die über, die Masche M_1 bestimmt werden kann.

$$U_5 = U_6 = U_q - U_4 = 1,182\,\mathrm{V}$$
$$I_5 = \frac{U_5}{R_5} = 1,7\,\mathrm{mA}$$
$$I_6 = \frac{U_6}{R_6} = 1,2\,\mathrm{mA}$$

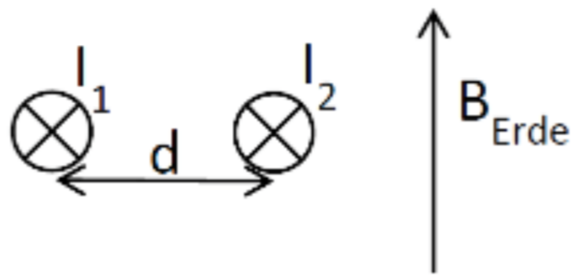
Alternativ hätte der Strom I_6 auch über die Knotenregel bestimmt werden können.

$$I_6 = I_4 - I_5 = 1,2\,\mathrm{mA}$$

3 Magnetostatik

3.1 Stromdurchflossene Drähte im Erdmagnetfeld

Zwei unendlich lange, sich im Vakuum befindende gerade Drähte verlaufen parallel im Abstand d voneinander. Durch jeden Draht fließt jeweils ein Strom der Stromstärke I_1 und I_2, wobei die beiden Ströme in die gleiche Richtung orientiert sind. Betrachten sie zunächst nur die durch die Ströme induzierten Felder, d.h. B_{Erde} wird vernachlässigt.



a) . Weshalb wirkt eine Kraft auf die beiden Leiter und in welche Richtung zeigt sie? Skizzieren sie die auftretenden Felder und Kräfte.

b) Leiten sie einen Ausdruck für die Kraft pro Länge $\frac{F}{l}$ her, welche auf einen Draht wirkt (B_{Erde} hier noch vernachlässigt).

c) Der zweite Draht wird nun durch einen Elektronenstrahl der Stromstärke I_2 ersetzt. Durch das Erdmagnetfeld kommt es zu einer Ablenkung dieses Strahls. Wie groß muss der Strom I_1 des Drahts im Abstand $d = 1\,\mathrm{cm}$ gewählt werden, um diesen Effekt zu kompensieren? Nehmen sie dabei an, dass die Ströme bezüglich der Erdoberfläche parralel verlaufen und das Erdmagnetfeld nur eine vertikale Komponente der Stärke $B_{Erde} = 44\,\mu\mathrm{T}$ hat.

Lösung

a) Ein stromdurchflossener gerader Leiter erzeugt ein Magnetfeld. Die Magnetfelder $\vec{B}_1$ und $\vec{B}_2$ welche durch die Ströme I_1 und I_2 erzeugt werden stehen senkrecht auf den jeweils anderen Draht.

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{e}_\varphi \tag{4}$$

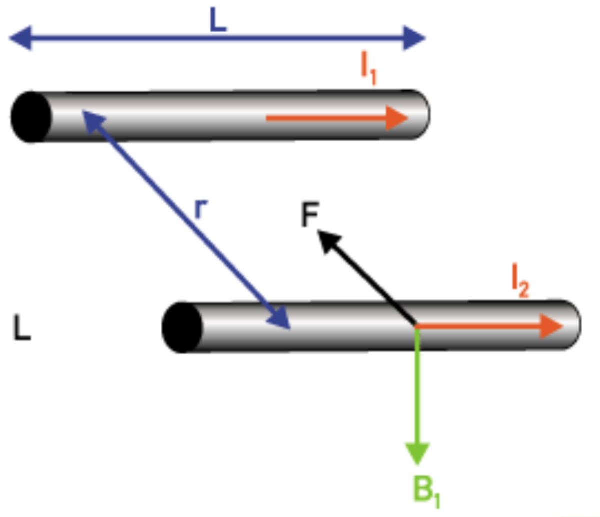
Befindet sich nun ein stromdurchflossener Leiter in einem Magnetfeld wirkt auf ihn die Lorentzkraft.

$$\mathrm{d}\vec{F} = I(\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{B}) \tag{5}$$

Da die beiden Drähte in die gleiche Richtung mit Strom durchflossen werden ist die Kraftwirkung anziehend und zeigt jeweils in die Richtung des anderen Drahts (siehe Abbildung).

b) Um die Kraft pro Länge bestimmen zu können muss der Betrag von Gleichung (5) integriert werden.

$$|\mathrm{d}\vec{F}| = I\mathrm{d}l|\vec{B}| \Rightarrow F = IlB \tag{6}$$



WIrd nun die Stärke des Magnetfelds des einen Drahtes im Abstand d zum anderen eingesetzt ergibt sich die Karft pro Länge.

$$\frac{F}{l} = I_i B_j = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d}$$

Für die Herleitung für den Ausdruck der Lorentzkraft auf einen stromdurchflossenen Draht kann im Skript gefunden werden.

c) das gesamte Magnetfeld am Ort des zweiten Drahtes ergibt sich aus Superposition des Erdmagnetfelds und des Magnetfelds, welches durch Draht 1 hervorgerufen wird. Die beden Magnetfelder zeigen in unterschiedliche Richtungen.

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_{Erde} \Rightarrow B = B_1 - B_{Erde} \tag{7}$$

Damit der Elektronenstrahl an unveränderter Stelle verläuft, darf keine Kraft auf ihn wirken. Somit muss das gesamte Magnetfeld am Ort des Strahls null sein. Aus dieser Bedingung kann die Stromstärke in Draht 1 bestimmt werden.

$$B_{Erde} = B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d} \Rightarrow I_1 = \frac{2\pi d B_{Erde}}{\mu_0} = 2,2\,\mathrm{A}$$

3.2 Hall-Sonde

Ein dünner Kupferstab (Dicke $\Delta x = 0,1\,\mathrm{mm}$ und Breite $\Delta y = 1\,\mathrm{cm}$) wird senkrecht zu einem Magnetfeld $\vec{B} = (B_x, 0, 0)$ von $2\,\mathrm{T}$ in z-Richtung ausgespannt und von einem Strom $I = 10\,\mathrm{A}$ durchflossen. Berechnen sie unter der Annahme, dass jedes Kupferatom ein freies Leistungselektron liefert ($n_e = 8 \cdot 10^{22}\,\mathrm{cm}^{-3}$),

a) die Driftgeschwindigkeit der Elektronen,

b) die Hall-Spannung,

c) die Kraft pro m des Kupferstabs.

Lösung

a) Die Driftgeschwindigkeit der Elektronen kann über das Ohm'sche Gesetz ermittelt werden.

$$j = \frac{I}{A} = n_e \cdot e \cdot v_D \Rightarrow v_D = \frac{I}{An_e e} = \frac{I}{\Delta x \Delta y n_e e} = 7,80 \cdot 10^{-4} \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \tag{8}$$

b) Die Hall-Spannung im Kupferstab beträgt:

$$U_H = \frac{IB}{n_e e \Delta x} = 1,56 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{V} \tag{9}$$

c) In dieser Anordnung steht das Magnetfeld senkreckt zu einem kurzen Stück Draht $\mathrm{d}\vec{L}$. Für den Betrag der Lorentzkraft auf den stromdurchflossenen Kupferdraht gilt somit

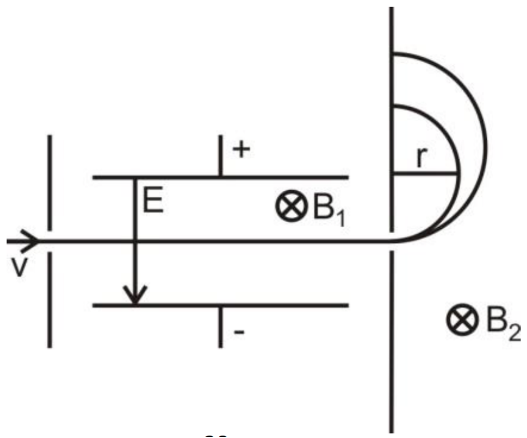
$$|\mathrm{d}\vec{F}| = I|\mathrm{d}\vec{L}|B_x \tag{10}$$

Mit Hilfe von Gleichung (10) kann die Kraft pro m auf den Kupferstab bestimmt werden.

$$\frac{F}{L} = I \cdot B_x = 20\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$$

3.3 Massenspektrometer

Ein für die physikalische Analytik wichtiges Gerät ist das Massenspektrometer (siehe Abbildung). Der aus der Ionenquelle austretende Ionenstrahl durchläuft zunächst die gekreuzten, sowohl zueinander als auch in Flugrichtung stehenden Felder $\vec{E}$ und $\vec{B}_1$ ohne Ablenkung. Im Seperationsbereich werden die Ionen dann durch ein zweites Magnetfeld $\vec{B}_2$ auf eine Kreisbahn gezwungen und treffen -nach ihrer Masse getrennt- auf eine Photoplatte auf.



a) Zeigen sie, dass $\dfrac{q}{m} = \dfrac{E}{r \cdot B_1 \cdot B_2}$ gilt.

b) Wie groß muss bei einem Feld $E = 50\,\mathrm{V/cm}$ das Feld B_1 gewählt werden, damit $^{20}\mathrm{Ne}^+$-Ionen mit $v = 5 \cdot 10^4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ den Filter ohne Ablenkung passieren? Welchen Radius r beschreiben sie bei $B_2 = 0,1\,\mathrm{T}$? Vergleichen sie mit $^{21}\mathrm{Ne}^+$-Ionen.

Lösung

a) Damit die Ionen den ersten Teil des Massenspektrometer durchqueren können muss die gesamte Krafteinwirkung auf die Ionen null sein. Die Lorentzkraft muss von der Kraft durch das anliegende elektrische Feld kompensiert werden.

$$\vec{F} = \vec{F}_{el} + \vec{F}_L = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}_1) \equiv 0 \tag{11}$$

$$\vec{F}_{el} = q\vec{E} = -qE\vec{e}_y$$

$$\vec{F}_L = q(\vec{v} \times \vec{B})_1 = qvB_1\vec{e}_y$$

Nur Ionen mit einer bestimmten Geschwindigkeit können den ersten Teil ohne Ablenkung passieren. Es handelt sich um einen Geschwindigkeitsfilter.

$$vB_1 = E \Rightarrow v = \frac{E}{B_1} \tag{12}$$

Im zweiten Teil des Massenspeltrometers wirkt nur die Lorentzkraft auf die Ionen und zwingt diese, da sie stets senktrecht zur Flugrichtung der Ionen steht, auf eine Kreisbahn. Durch Gleichsetzen des Betrags der Lorentzkraft mit der Zentripetalkraft kann das Verhältniss von Ladung zu Masse als Funktion des Radius r der Kreisbahn bestimmt werden.

$$qvB_2 = m\frac{v^2}{r} \Rightarrow \frac{q}{m} = \frac{v}{rB_2} \tag{13}$$

Einsetzen der Geschwindigkeit v liefert schließlich den gewünschten Ausdruck.

$$\frac{q}{m} = \frac{E}{rB_1B_2}$$

b) Das Verhältnis von E zu B_1 ist über Gleichung (12) fest mit der Geschwindigkeit verknüpft. Bei vorgegebener Geschwindigkeit muss das Magnetfeld angepasst werden.

$$B_1 = \frac{E}{v} = 0,1\,\mathrm{T}$$

Die $^{20}\mathrm{Ne}^+$-Ionen tragen eine Ladung von $q = +e$. und haben eine Masse von $m = 20u = 3,32 \cdot 10^{-26}\,\mathrm{kg}$. Mit dem in Teilaufgabe a) hergeletetem Ergebnis kann der Radius der Kreisbahn bestimmt werden.

$$r = \frac{E \cdot m}{q \cdot B_1 \cdot B_2} = \frac{m \cdot v}{e \cdot B_2} = 103,6\,\mathrm{mm}$$

Für die schwereren $^{21}\mathrm{Ne}^+$-Ionen ergibt sich ein leicht anderer Radius.

$$r' = 108,8\,\mathrm{mm}$$

Beide Ionen werden aufgrund ihrer unterschiedlichen Masse verschwieden stark abgelenkt und so ihrer Masse nach getrennt.

3.4 Magnetisierung

In eine von konstantem Strom durchflossene Zylinderspule wird eine Substanz eingebracht. Im Inneren der Spule sinkt das Magnetfeld nun um $0,004\%$. Wie groß ist die magnetische Suzeptibilität der Substanz? Um welche Art von Magnetismus handelt es sich?

Lösung

Für das Magnetfeld $\vec{B}_{in}$ innerhalb der Spule gilt

$$\vec{B}_{in} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0\mu_r\vec{H} = 0,99996 \cdot \mu_0\vec{H} = 0,99996 \cdot \vec{B}_{aus} \tag{14}$$

Es gilt der feste Zusammenhang zwischen relativer Permeabilität $\mu_r = 0,99996$ und der magnetischen Suzeptibilität χ_m

$$\mu_r = 1 + \chi_m \Rightarrow \chi_m = \mu_r - 1 = -0,00004 \tag{15}$$

Die Substanz im inneren der Spule ist somit diamagnetisch.