
Ferienkurs Experimentalphysik 2

Lösung Übungsblatt 1

Tutoren: Elena KAISER und Matthias GOLIBRZUCH

1 Elektrostatik

1.1 Öltröpfchen

An ein Öltröpfchen mit der Dichte $\rho = 0,8 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ und dem Radius $R = 10 \text{ }\mu\text{m}$, das zehn Elementarladungen $-e$ trägt, wird ein zweites Tröpfchen der gleichen Größe mit nur einer Elementarladung $-e$ aus dem Unendlichen bis auf einen Abstand von $a = 100 \text{ }\mu\text{m}$ angenähert.

- Berechnen Sie die dafür nötige Arbeit.
- Wie groß müsste die Dichte des Öls sein, damit die Gravitation bei diesem Abstand die elektrostatische Abstoßung kompensiert? Gilt dies nur für diesen Abstand?
- Welche Spannung muss an einem horizontal aufgestellten Plattenkondensator (Plattenabstand = 10 mm) angelegt werden, um das höher geladene Öltröpfchen im Schwerfeld der Erde zum Schweben zu bringen? Was passiert mit dem zweiten Tröpfchen unter diesen Bedingungen?

Lösung

- Um die nötige Arbeit zu berechnen die beiden Öltröpfchen anzunähern, muss man die Elektrische Kraft zwischen den beiden Tröpfchen vom Unendlichen bis zum Endpunkt integrieren.

$$W = - \int_{\infty}^a F_{el} dr = - \int_{\infty}^a \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} dr \quad (1)$$

Das ausführen des Integrals liefert:

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q_1 q_2}{r} \right]_{\infty}^a \quad (2)$$

Einsetzen der Werte liefert

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{10e^2}{a} = 2,3 \times 10^{-23} \text{ J} \quad (3)$$

- Damit die Gravitationskraft die Tröpfchen im Gleichgewicht halten kann muss sie die Elektrische Kraft ausgleichen.

Da die Gravitationskraft wie die elektrische Kraft radial wirkt und zudem anziehend und damit hier entgegen der elektrischen Kraft wirkt, müssen nur noch die Beträge übereinstimmen.

$$\begin{aligned}
 |F_{el}| &= |F_{Grav}| \\
 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} &= G \frac{m_1 m_2}{r^2} = G \frac{16\rho_n^2 \pi^2 R^6}{9r^2} \\
 \rho_n &= \sqrt{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{90e^2}{64G\pi^2 R^6}} = 1,4 \times 10^6 \frac{\text{kg}}{\text{m}}
 \end{aligned} \tag{4}$$

Da die neue Dichte nicht vom Abstand der beiden Öltröpfchen abhängt, würden sich bei dieser Dichte Gravitations- und elektrische Kraft immer aufheben.

- c) Um das Tröpfchen in einem Plattenkondensator zum schweben zu bringen müssen sich Gewichts- und elektrische Kraft ausgleichen. Wir nehmen an, dass der Kondensator so geladen ist, dass die beiden Kräfte anti-parallel wirken. Daher vergleichen wir wieder nur die Beträge.

$$\begin{aligned}
 |F_{el}| &= |F_G| \\
 Eq &= mg \\
 \frac{q_1 U}{d} &= \frac{4}{3} R^3 \rho g \\
 U &= \frac{4\pi R^3 \rho g d}{30e} = 20,9 \text{ kV}
 \end{aligned} \tag{5}$$

Nachdem die elektrische Kraft auf weniger geladene Öltröpfchen kleiner ist, würde das Tröpfchen nach unten fallen.

1.2 Coulombenergie

Ein Calciumatom besitzt 20 Protonen, dessen Ladung betragsmäßig gleich dem des Elektrons ist. Der Abstand zwischen diesen beträgt $a = 10^{-15}$ m. Will man 20 Protonen aus dem Unendlichen zusammenbringen, damit sie den Calciumkern bilden, muss Energie in Form von Coulombenergie aufgebracht werden. Diese muss von der Bindungsenergie der Kernkräfte kompensiert werden.

- a) Berechnen Sie die Coulombenergie.
- b) Angenommen die Kernkraft würde plötzlich aussetzen und die gesamte freiwerdende Coulombenergie in kinetische Energie umgesetzt. Wie groß wäre die Endgeschwindigkeit einer 100 g schweren Tafelschokolade, wenn die gesamte Energie nutzbar gemacht werden könnte?

Lösung

- a) Die Coulombenergie zweier aus dem Unendlichen auf den Abstand a gebrachter Elektronen ist

$$E_C = - \int_{\infty}^a F_C dr = - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^a \frac{1}{r^2} dr = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{a} \tag{6}$$

Diese Energie wird nun für alle 20 Elektronen aufsummiert. Dabei ist zu beachten, dass für das erste Elektron keine Energie aufgewendet werden muss und dass sich die Energie linear mit hinzugefügten Elektronen erhöht.

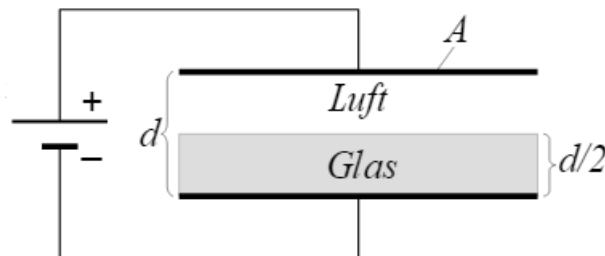
$$\sum_{n=0}^{19} \frac{ne^2}{4\pi\epsilon_0 a} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a} \frac{n(n+1)}{2} \Big|_{n=19} = 2,736 \times 10^8 eV = 4,378 \times 10^{-11} \text{ J} \quad (7)$$

b) Hier setzen wir einfach die Coulombenergie mit der kinetischen Energie gleich.

$$E_{kin} = E_C \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2E_C}{m}} = 2,96 \times 10^{-5} \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (8)$$

1.3 Kondensator mit Glasplatte

Ein Plattenkondensator mit der Plattenfläche A und dem Plattenabstand d wird zur Hälfte mit einer Glasplatte mit der relativen Dielektrizitätskonstanten ϵ_r und mit Luft gefüllt. Anschließend wird mit einer Batterie die Spannung U angelegt.



- Berechnen Sie Kapazität, Ladung auf den Platten, elektrische Feldstärke und Feldenergie für einen baugleichen Kondensator ohne Glasplatte. (Plattenabstand $d = 1$ cm, Spannung $U = 5$ kV, Fläche $A = 0,1$ m²)
- Wie groß ist bei angeschlossener Batterie das elektrische Feld i) im luftgefüllten Zwischenraum und ii) im Glas?
- Wie groß ist die Gesamtkapazität des Kondensators?

Lösung

a) Wir berechnen nacheinander die gesuchten Größen:

$$C = \epsilon_0 \frac{A}{d} = 88,5 \text{ pF} \quad (9)$$

$$Q = CU = 4,43 \times 10^{-7} \text{ C} \quad (10)$$

$$\vec{E} = \frac{U}{d} = 5 \times 10^5 \frac{\text{V}}{\text{m}} \quad (11)$$

$$E = \frac{1}{2} CU^2 = 1,11 \times 10^{-3} \text{ J} \quad (12)$$

b) Bei verbundener Batterie gilt

$$U = U_{Luft} + U_{Glas} \quad (13)$$

Mit $U = Ed$ folgt

$$U = E_{Luft} \frac{d}{2} + E_{Glas} \frac{d}{2} \quad (14)$$

Durch die Beziehung zwischen E-Feld an Luft und im Glas $E_{Glas} = \frac{1}{\epsilon_r} E_{Luft}$ ergibt sich

$$U = E_{Luft} \frac{d}{2} + \frac{1}{\epsilon_r} E_{Luft} \frac{d}{2} = \left(1 + \frac{1}{\epsilon_r}\right) E_{Luft} \frac{d}{2} \quad (15)$$

Und damit

$$E_{Luft} = \frac{2U}{\left(1 + \frac{1}{\epsilon_r}\right) d} \quad (16)$$

und

$$E_{Glas} = \frac{1}{\epsilon_r} E_{Luft} = \frac{2U}{(\epsilon_r + 1)d} \quad (17)$$

- c) Die vorgefundene Apparatur kann als Reihenschaltung eines mit Luft und eines mit Glas gefüllten Kondensators betrachtet werden. Daher ergibt sich die gesamt Kapazität zu

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_{Luft}} + \frac{1}{C_{Glas}} = \left(1 + \frac{1}{\epsilon_r}\right) \frac{1}{C_{Luft}} \quad (18)$$

Invertieren liefert

$$C = \frac{\epsilon_r}{\epsilon_r + 1} C_{Luft} = \frac{\epsilon_r}{\epsilon_r + 1} \epsilon_0 \frac{2A}{d} \quad (19)$$

1.4 Elektrische Feldstärke zwischen Metallringen

Zwei dünne Metallringe mit Durchmesser $d = 30$ cm stehen sich im Abstand $D = 1$ m gegenüber. Der linke Ring ist mit $Q^- = -1$ mC, der rechte mit $Q^+ = +1$ mC geladen. Wie stark ist das elektrische Feld genau auf der Mitte der Verbindungslinie der Ringmitelpunkte und in welche Richtung zeigt es?

Lösung

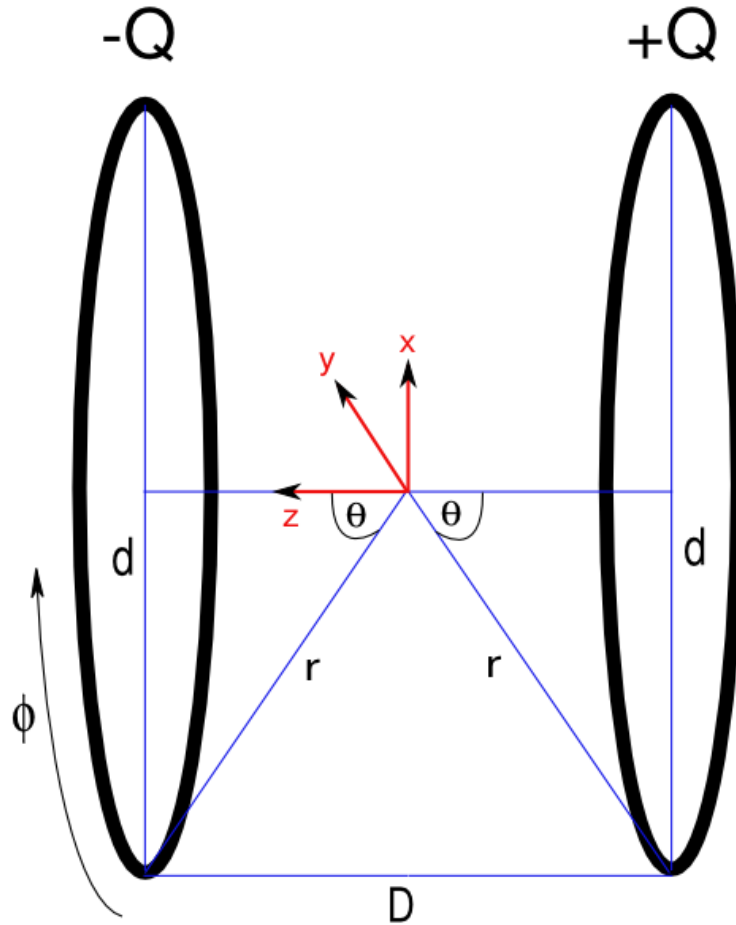


Abbildung 1: Feldstärke in der Mitte zweier geladener Ringe

Wir verwenden die Formel zur Berechnung eines elektrischen Feldes am Ort \vec{r} , dass durch eine beliebige Ladung am Ort \vec{r}' erzeugt wird.

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dQ \quad (20)$$

Durch das geschickte legen unseres Koordinatensystems (Ursprung genau im Mittelpunkt) und die Superposition beider Ringe vereinfacht sich die Rechnung zu.

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{links} \frac{-\vec{r}'}{|\vec{r}'|^3} dQ + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{rechts} \frac{-\vec{r}'}{|\vec{r}'|^3} dQ \quad (21)$$

Wir führen Kugelkoordinaten ein. Damit erhalten wir $dQ = \lambda \frac{d}{2} d\varphi$ mit Linienladungsdichte $\lambda = \frac{\pm Q}{\pi d}$. Und $|\vec{r}'| = r = \frac{1}{2} \sqrt{d^2 + D^2}$. Durch Einsetzen und Vorziehen der Konstanten Teile erhalten wir.

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \frac{-\lambda_1 d}{8\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} r \sin(180^\circ - \theta) \cos(\varphi) \\ r \sin(180^\circ - \theta) \sin(\varphi) \\ r \cos(180^\circ - \theta) \end{pmatrix} d\varphi + \frac{-\lambda_2 d}{8\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} r \sin(\theta) \cos(\varphi) \\ r \sin(\theta) \sin(\varphi) \\ r \cos(\theta) \end{pmatrix} d\varphi \\ &= \frac{-\lambda_1 d}{8\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} (-2\pi \cos(\theta)) \vec{e}_z + \frac{-\lambda_2 d}{8\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} (2\pi \cos(\theta)) \vec{e}_z \end{aligned} \quad (22)$$

$$= \frac{-Q}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \cos(\theta) = 6,32 \times 10^7 \frac{\text{N}}{\text{C}} \vec{e}_z \quad (23)$$

1.5 Kugel mit Loch

- a) Berechnen Sie das elektrische Feld einer homogen geladenen Kugel mit Radius R .
- b) Nun wird in diese Kugel ein kugelförmiges Loch mit Radius R_L gebohrt. Das Loch befindet sich im Mittelpunkt der Kugel. Berechnen Sie ohne erneute Anwendung des Gaus'schen Satzes das elektrische Feld im Loch, in der Hohlkugel und außerhalb der Hohlkugel.

Lösung

- a) Wir wenden den Gaus'schen Satz an um dieses Problem zu lösen. Als Volumen wählen wir eine Kugel mit Mittelpunkt im Mittelpunkt der geladenen Kugel und Radius r .

$$\int \vec{E} d\vec{A} = \frac{1}{\epsilon_0} \int \rho dV \quad (24)$$

Der linke Teil ergibt sowohl in als auch außerhalb der Kugel

$$\int \vec{E} d\vec{A} = E 4\pi r^2 \quad (25)$$

Für den Rechten Teil des Integrals müssen wir unterscheiden ob wir in oder außerhalb der Kugel sind. Für $r > R$ gilt:

$$\frac{1}{\epsilon_0} \int \rho dV = \frac{1}{\epsilon_0} Q \quad (26)$$

und für $r < R$

$$\frac{1}{\epsilon_0} \int \rho dV = \frac{1}{\epsilon_0} Q \frac{r^3}{R^3} \quad (27)$$

Gleichsetzen beider Seiten und auflösen nach E ergibt:

$$\vec{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r, \quad r > R \quad (28)$$

$$\vec{E}(r) = \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 R^3} \vec{e}_r, \quad r < R \quad (29)$$

Die Richtung ergibt sich aus der Symmetrie unseres Gaus-Volumens.

- b) Das Superpositionsprinzip erlaubt uns anstatt das Loch direkt zu berechnen das E-Feld der großen Kugel und einer zweiten mit den Maßen des Loches zu addieren, wobei die kleinere Kugel exakt die negative Ladung des von ihr eingenommenen Volumen der großen Kugel trägt.

$$Q_L = -Q \frac{R_L^3}{R^3} \quad (30)$$

Im Loch addieren wir die inneren Felder beider Kugeln $r < R_L$

$$\vec{E}(r) = \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 R^3} \vec{e}_r + \frac{Q_L r}{2\pi\epsilon_0 R_L^3} \vec{e}_r = \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 R^3} \vec{e}_r - \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 R^3} \vec{e}_r = 0 \quad (31)$$

Für das Feld im inneren der Kugel und außerhalb des Lochs addieren wir das innen Feld der großen und das außen Feld der kleinen Kugel $R_L < r < R$

$$\vec{E}(r) = \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 R^3} \vec{e}_r + \frac{Q_L}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} \frac{r^3 - R^3}{r^2} \vec{e}_r \quad (32)$$

Und außerhalb der Hohlkugel addieren wir die Werte für beide außen Felder $r > R$

$$\vec{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r + \frac{Q_L}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left(1 - \frac{R_L^3}{R^3}\right) \vec{e}_r \quad (33)$$