Ferienkurs Analysis 2 für Physiker **Name:** ____________________
Sommersemester 2017
Probeklausur **Matrikelnummer:** ____________________
22.09.17
Prüfungsdauer: 90 Minuten

Die Klausur enthält **12** Seiten (einschließlich dieses Deckblattes) sowie **9** Fragen.
Sie können insgesamt **83** Punkte erreichen.
Einzig erlaubtes Hilfsmittel ist ein, wenn notwendig beidseitig, handbeschriebenes DIN-A4 Blatt. Insbesondere dürfen keine Fachbücher & Skripte sowie elektronischen Hilfsmittel jeder Art (z.B. Handy, Taschenrechner, Laptop,...) verwendet werden.

Bewertungstabelle

Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\sum$
Punkte:	8	15	5	6	10	11	5	18	5	83
Ergebnis:										

Note: __________

Viel Erfolg!

---

1. $\boxed{\textit{8 Punkte}}$ Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} & \text{falls } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass f stetig ist.

(b) Zeigen Sie, dass die partiellen Ableitungen von f im Nullpunkt existieren und bestimmen Sie diese.

(c) Berechnen Sie die Richtungsableitung von f in Richtung $v = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$.

Lösung: (a): Abseits des Koordinatenursprungs ist die Funktion als Quotient stetiger Funktionen mit Nenner $\neq 0$ stetig.**[0,5]**

Betrachten wir nun den Koordinatenurpsrung. Aus den Abschätzungen **[0,5]**

$$|x| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2+y^2} = \left| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right|, \qquad |y| = \sqrt{y^2} \leq \sqrt{x^2+y^2} = \left| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right|$$

folgt für $(x,y) \neq (0,0)$, dass

$$|f(x,y)| = \left| \frac{x^2 y}{x^2+y^2} \right| \leq \frac{|(x,y)|^3}{|(x,y)|^2} = |(x,y)|. \qquad \textbf{[1]}$$

Trivialerweise gilt diese Abschätzung auch für $(x,y) = (0,0)$. Ist nun $(x_n, y_n) \subset \mathbb{R}^2$ eine Nullfolge, so gilt

$$|f(x_n,y_n)| \leq |(x_n,y_n)| \xrightarrow{n\to\infty} 0, \qquad \textbf{[1]}$$

also $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n,y_n) = 0$.

(b): Wir setzen die Definition der partiellen Ableitungen ein und erhalten **[2]**

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h^3} = 0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h^3} = 0.$$

(c): Die Funktion f ist im Nullpunkt **nicht** total differenzierbar.**[1]** Daher müssen wir direkt mit der Definition arbeiten:

$$D_v f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h/\sqrt{2}, h/\sqrt{2}) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^3}{2^{3/2} h^3} = \frac{1}{2^{3/2}}. \qquad \textbf{[2]}$$

2. $\boxed{\textit{15 Punkte}}$ Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = x^2 + \sin^2 y.$$

(a) Bestimmen Sie die Richtungsableitung von f im Ursprung in Richtung $v \in \mathbb{R}^2$, $|v| = 1$.

(b) Bestimmen Sie alle kritischen Punkte von f und klassifizieren Sie diese.

(c) Bestimmen Sie nun die globalen Extrema auf $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|x^2 + y^2 \leq 4\}$. *Hinweis:* Die Gleichung $\sin(x)\cos(x) = x$ hat in $\mathbb{R}$ nur die Lösung $x = 0$.

Lösung: (a): Die partiellen Ableitungen von f existieren und sind stetig, wie man sich schnell überzeugen kann. Daher ist f total differenzierbar und es gilt

$$D_v f(0,0) = \langle \nabla f(0,0), v\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 2x \\ 2\sin y \cos y \end{pmatrix}\Bigg|_{(x,y)=(0,0)}, v \right\rangle = 0. \qquad \textbf{[1]}$$

(b): Am Gradienten von f erkennt man die kritischen Punkte

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ k\frac{\pi}{2} \end{pmatrix} \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\}. \qquad \textbf{[1]}$$

Die gegebene Funktion ist unendlich oft differenzierbar und die Hesse–Matrix lautet

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2(\cos^2 y - \sin^2 y) \end{pmatrix}. \qquad \textbf{[2]}$$

Wir werten diese an den kritischen Punkten. Dazu betrachten wir zunächst die geraden Vielfachen von $\pi/2$ und erhalten

$$H_f(0, k\pi) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}. \qquad \textbf{[1]}$$

Dort liegt also ein lokales Minimum vor. **[1]**

Für die ungeraden Vielfachen gilt

$$H_f\left(0, \frac{(2k+1)\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad \textbf{[1]}$$

und somit findet sich dort ein Sattelpunkt. **[1]**

(c): Im Inneren von K liegt lediglich das lokale Minimum $(0, 0)$ mit $f(0, 0) = 0$. Um den Rand $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|x^2 + y^2 = 4\}$ zu untersuchen, verwenden wir die Methode der Lagrange–Multiplikatoren. Wir parametrisieren die Nebenbedingung gemäß $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g(x, y) = x^2 + y^2 - 4$ **[1]**, sodass

$$g\big|_{\partial K} \equiv 0$$

gilt. Wir erhalten damit das folgende nicht–lineare Gleichungssystem [1]:

$$\nabla f(x,y) + \lambda \nabla g(x,y) = \begin{pmatrix} 2x(1+\lambda) \\ 2\left(\sin(y)\cos(y) + \lambda y\right) \end{pmatrix} = 0$$
$$x^2 + y^2 - 4 = 0.$$

Aus der ersten Gleichung folgt im Fall $x = 0$ $y = \pm 2$ und $\lambda = -\frac{\sin(2)\cos(2)}{2}$ [1]. Für $\lambda = -1$ erhalten wir mit Hilfe des Hinweises $y = 0$ und somit $x = \pm 2$ [1]. Zusammenfassend ergibt sich

(x,y)	$f(x,y)$
$(0,0)$	0
$(0,2)$	$\sin^2(2)$
$(0,-2)$	$\sin^2(2)$
$(2,0)$	4
$(-2,0)$	4

und folglich liegt das globale Minimum auf K bei $(0,0)$ und die globalen Maxima bei $(\pm 2, 0)$. [1]

3. $\boxed{\textit{5 Punkte}}$ Gibt es eine differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, welche

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} y \arctan x \\ x \arctan y \end{pmatrix}$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ erfüllt? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung: Es gibt **keine** solche Funktion.

Begründung: Gäbe es eine solche Funktion, so wäre diese unendlich oft differenzierbar. [1] Also wäre nach Satz von Schwarz

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) \qquad [2]$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Wir rechnen nun nach, dass

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(x \arctan y) = \arctan y \neq \arctan x = \frac{\partial}{\partial y}(y \arctan x) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) \; [2]$$

für $x \neq y$, da der Arkustangens bekanntermaßen injektiv ist.

Alternative: Man kann die Nichtexistenz der Funktion f auch wie folgt zeigen. Angenommen es gäbe eine solche Funktion f, dann wäre diese ein Potential des

Vektorfelds $v(x, y) = \nabla f(x, y)$ **[2]** und sonach folgern wir $\operatorname{rot} v(x, y) = 0$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ **[1]**. Wir rechnen nun nach, dass

$$\operatorname{rot} v(x, y) = \arctan y - \arctan x \neq 0 \qquad \textbf{[2]}$$

für $x \neq y$. Der erhaltene Widerspruch zeigt die Nichtexistenz.

4. $\boxed{\textit{6 Punkte}}$ Bestimmen Sie das Taylorpolynom 5.Ordnung von $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \cos^2(x)\sin(y)$ im Entwicklungspunkt $(0,0)$.

Lösung: Wir erhalten

$$\cos^2 x = \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \dots\right)\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \dots\right)$$
$$= 1 - x^2 + \frac{x^4}{3} + \mathcal{O}(x^6).$$

Mit der Reihenentwicklung des Sinus $\sin y = y - y^3/6 + y^5/120 + \mathcal{O}(x^7)$ erhalten wir somit

$$T_4(f;(0,0)) = y - x^2 y + \frac{x^4}{3}y - \frac{y^3}{6} + \frac{x^2y^3}{6} + \frac{y^5}{120}.$$

[pro richtigem Summand 1P]

5. (a) $\boxed{\textit{6 Punkte}}$ Es seien das Vektorfeld $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ und die Kurve $\gamma : [0,\pi/2] \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$v(x,y,z) = \begin{pmatrix} 3x^2 + 6y \\ 6x + z^2 \\ 2yz \end{pmatrix}, \qquad \gamma(t) = \begin{pmatrix} 2\sin^{2017}(t) + \tan^2(2t)e^{\arctan t} \\ \dfrac{\sin t}{1 + \tan^2(2t)} \\ \sin^{2017}(t) \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $\int_\gamma v(s) \cdot ds$.

(b) $\boxed{\textit{4 Punkte}}$ Seien $I, J \subset \mathbb{R}$ mehrpunktige Intervalle und $\varphi : I \to J$ eine $\mathcal{C}^1$–Parametertransformation. Ferner seien $\gamma : J \to \mathbb{R}^n$ eine $\mathcal{C}^1$–Kurve und $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld. Zeigen Sie, dass für $\xi(t) := (\gamma \circ \varphi)(t)$

$$\int_\xi F(y) \cdot dy = \operatorname{sgn} \varphi' \int_\gamma F(y) \cdot dy$$

gilt.

Lösung: (a): Wir prüfen die Integrabilitätsbedingung

$$\nabla \times v(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2z - 2z \\ 0 \\ 6 - 6 \end{pmatrix} = 0 \qquad \textbf{[1]}$$

und da der Definitionsbereich einfach zusammenhängend und offen ist, liefert das Poincaré'sche Lemma die Existenz eines Potentials **[1]**. Scharfes Hinsehen liefert

$\Phi(x,y,z) = x^3 + 6xy + yz^2$ **[1]**. Damit ergibt sich mit $\gamma(0) = (0,0,0)$ sowie $\gamma(\pi/2) = (2,1,1)$ **[1]**, dass

$$\int_\gamma v(s) \cdot ds = \Phi(\gamma(\pi)) - \Phi(\gamma(0)) = \Phi(2,1,1) - \Phi(0,0,0) = 21. \qquad \textbf{[2]}$$

(b): Es gilt mit der Kettenregel und der Substitution $u = \varphi(t)$

$$\int_\xi F(y) \cdot dy \overset{\textbf{[0,5]}}{=} \int_I F(\xi(t)) \cdot \dot{\xi}(t)\, dt \overset{\textbf{[1]}}{=} \int_I F(\gamma(\varphi(t))) \cdot \dot{\gamma}(\varphi(t))\varphi'(t)\, dt$$

$$\overset{\textbf{[2]}}{=} \operatorname{sgn}(\varphi') \int_J F(\gamma(u)) \cdot \dot{\gamma}(u)\, du \overset{\textbf{[0,5]}}{=} \operatorname{sgn}(\varphi') \int_\gamma F(y) \cdot dy.$$

(In der Angabe der Probeklausur war an dieser Stelle eine andere Aufgabe enthalten.)

6. $\boxed{\textit{11 Punkte}}$ Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$.

(a) Bestimmen Sie einen Atlas der $\mathcal{C}^1$–Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{n+1}$

$$M = \{x \in U \times \mathbb{R} \,|\, f(x_1, \ldots, x_n) = x_{n+1}\}.$$

Weisen Sie die Karteneigenschaften der Konstituenten des Atlas nach. Welche Dimension hat die Untermannigfaltigkeit?

(b) Bestimmen Sie eine Basis des Normalenraums N_pM am Punkt $p \in M$.

Lösung: (a): Der Atlas besteht aus einer Karte, nämlich

$$\Phi : U \to \mathbb{R}^{n+1} \cap M,$$
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ f(x_1, \ldots, x_n) \end{pmatrix}. \qquad \textbf{[1]}$$

Der Nachweis der Karteneigenschaften ist straight–forward. Die Surjektivität **[1]** ist offensichtlich und für die Injektivität seien $x = (x_1, \ldots, x_n), \tilde{x} = (\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n) \in \mathbb{R}^n$ mit $\Phi(x) = \Phi(\tilde{x})$. Damit gilt

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ f(x_1, \ldots, x_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \vdots \\ \tilde{x}_n \\ f(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n) \end{pmatrix}$$

und folglich $(x_1, \ldots, x_n) = (\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n)$. **[1]** Die Stetigkeit von Φ und

$$\Phi^{-1} : \mathbb{R}^{n+1} \cap M \to U,$$
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ f(x_1, \ldots, x_n) \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

folgt unmittelbar aus der Stetigkeit der Komponentenfunktionen. **[1]** Ferner ist $\Phi \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^{n+1})$ und mit

$$D\Phi(x_1, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_{n-1}} & \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+1) \times n} \qquad \textbf{[2]}$$

ist offensichtlich $\operatorname{rang} D\Phi(x_1, \ldots, x_n) = n$ für alle $(x_1, \ldots, x_n) \in U$. **[1]** Also ist M eine n–dimensionale $\mathcal{C}^1$–Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{n+1}$. **[1]**

(b): Aus der Vorlesung wissen wir, dass die Spalten von $D\Phi(p)$ eine Basis des Tangentialraums T_pM im Punkt $p \in M$ bilden. **[1]** Für den Normalenraum gilt $N_pM = (T_pM)^\perp$ und damit ist $\dim N_pM = 1$. Scharfes Hinsehen liefert nun, dass der Vektor

$$v = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(p) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(p) \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1} \qquad \textbf{[2]}$$

im orthogonalen Komplement des Tangentialraums liegt. Also gilt

$$N_pM = \operatorname{span}\{v\}.$$

7. $\boxed{\textit{5 Punkte}}$ Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^2$,

$$f(v, w, x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1x_2^2 + x_1x_3v + x_2w^2 - 3 \\ v^3x_2x_3 + 2x_1w - w^2v^2 - 2 \end{pmatrix},$$

welche $f(1, 1, 1, 1, 1) = 0$ erfüllt. Zeigen Sie, dass f in einer Umgebung $U \times V$, $U \subset \mathbb{R}^2$ und $V \subset \mathbb{R}^3$ offen und nicht–leer, des Punktes $p = (1, 1, 1, 1, 1) \in \mathbb{R}^5$ nach v, w gleichzeitig aufgelöst werden kann und bestimmen Sie für die Auflösung $g : V \to \mathbb{R}^2$ die Jacobi Matrix $Dg(1, 1, 1)$.

Lösung: Es ist $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^5, \mathbb{R}^2)$ **[1]** und der zu betrachtende Teil der Jacobi Matrix lautet

$$D_{(v,w)}(p) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial v}(p) & \frac{\partial f_1}{\partial w}(p) \\ \frac{\partial f_2}{\partial v}(p) & \frac{\partial f_2}{\partial w}(p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \textbf{[2]}$$

welche $\det\left(D_{(v,w)}(p)\right) = -2 \neq 0$ erfüllt. Die Auflösbarkeit folgt damit aus dem Satz über implizite Funktionen. Für die Ableitung der Auflösung g erhalten wir

$$\begin{aligned} Dg(1,1,1) &= -\left[D_{(v,w)}(p)\right]^{-1} D_{(x_1,x_2,x_3)}f(p) \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= -\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \qquad \textbf{[2]} \end{aligned}$$

8. (a) $\boxed{\textit{7 Punkte}}$ Lösen sie die folgenden Anfangswertprobleme:

$$\begin{array}{rll} \text{i.} & \dot{x} = \frac{x^2+x-6}{\cos(t)}, & x(0) = 2 \\ \text{ii.} & \dot{x} = \frac{t}{1+x+t^2+xt^2}, & x(0) = 2 \end{array}$$

(b) $\boxed{\textit{11 Punkte}}$ Für $t \in \mathbb{R}$ sei $A(t) = \begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ vorgelegt.

i. Berechnen Sie eine Basis $\{\phi(t), \psi(t), \rho(t)\}$ des Lösungsraums der linearen Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t),$$

welche

$$\phi(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \psi(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \rho(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

erfüllt.

ii. Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{pmatrix} = A(t) \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lösung: (a) i.: Offensichtlich erfüllt die konstante Lösung $x(t) \equiv 2$ die Differentialgleichung einschließlich der Anfangsbedingung. **[3]**

ii.: Wir haben

$$\dot{x} = \frac{t}{1+x+t^2+xt^2} = \frac{t}{(1+t^2)(1+x)}-$$

Trennung der Variablen führt auf

$$\begin{aligned} & \int 1 + x \, dx = \int \frac{t}{1+t^2} \, dt \\ \iff \quad & x + \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}\ln(1+t^2) + \frac{C}{2} \\ \iff \quad & x_{1/2} = -1 \pm \sqrt{1 + \ln(1+t^2) + C}. \qquad \textbf{[3]} \end{aligned}$$

Gemäß der Anfangsbedingung scheidet das negative Vorzeichen aus und explizites Einsetzen leifert

$$x(t) = \sqrt{9 + \ln(1+t^2)}.\textbf{[1]}$$

(b) i.: Die Differentialgleichung entkoppelt

$$\dot{x}_1(t) = tx_1(t) \tag{1}$$
$$\begin{pmatrix}\dot{x}_2(t)\\ \dot{x}_3(t)\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}3 & 2\\ 0 & 3\end{pmatrix}}_{=:B}\begin{pmatrix}x_2(t)\\ x_3(t)\end{pmatrix}.$$

Wir berechnen $\exp(tB)$ über die Zerlegung in kommutierende Diagonal- und nilpotente Matrix:

$$e^{tB} = \begin{pmatrix}e^{3t} & 0\\ 0 & e^{3t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2t\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}e^{3t} & 2te^{3t}\\ 0 & e^{3t}\end{pmatrix} \qquad \textbf{[2]}$$

Die allgemeine Lösung von (1) lautet $x_1(t) = C_1 e^{t^2/2}$, womit für die allgemeine Lösung des Systems

$$x(t) = \begin{pmatrix}C_1 e^{t^2/2}\\ C_2 e^{3t} + 2C_3 te^{3t}\\ C_3 e^{3t}\end{pmatrix} = C_1\underbrace{\begin{pmatrix}e^{t^2/2}\\ 0\\ 0\end{pmatrix}}_{=:\alpha(t)} + C_2\underbrace{\begin{pmatrix}0\\ e^{3t}\\ 0\end{pmatrix}}_{=:\beta(t)} + C_3\underbrace{\begin{pmatrix}0\\ 2te^{3t}\\ e^{3t}\end{pmatrix}}_{=:\gamma(t)} \qquad \textbf{[1]}$$

folgt. Die Menge $\{\alpha(t), \beta(t), \gamma(t)\}$ bildet nach Konstruktion eine Basis des Lösungsraumes. Jedoch erfüllt sie nicht die geforderten Anfangsbedingungen. Dazu definieren wir $\phi = 2\beta$, $\psi = 3\gamma$ und $\rho = \alpha + \beta$ (hier sind selbstverständlich auch andere Kombinationen möglich) und erhalten so die Basis

$$\phi(t) = \begin{pmatrix}0\\ 2e^{3t}\\ 0\end{pmatrix}, \quad \psi(t) = \begin{pmatrix}0\\ 6te^{3t}\\ 3e^{3t}\end{pmatrix}, \quad \rho(t) = \begin{pmatrix}e^{t^2/2}\\ e^{3t}\\ 0\end{pmatrix}, \qquad \textbf{[2]}$$

welche die gewünschten Bedingungen erfüllt.

ii.: Mit Variation der Konstanten (oder durch geschicktes Raten) erhält man die allgemeine Lösung von $\dot{x}_1(t) = tx_1(t) + t$ gemäß dem bekannten Ansatz $x_1(t) = C(t)e^{t^2/2}$:

$$\dot{C}(t) = te^{-t^2/2} \implies C(t) = -e^{-t^2/2} + D. \qquad \textbf{[2]}$$

Also ist mit der Anfangsbedingung $x_1(t) = 3e^{t^2/2} - 1$. Eine spezielle Lösung von

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_2(t)\\ \dot{x}_3(t)\end{pmatrix} = B\begin{pmatrix}x_2(t)\\ x_3(t)\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}5\\ 3\end{pmatrix}$$

ist $(-1, -1)$ **[1]**, da

$$B\begin{pmatrix}-1\\ -1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}5\\ 3\end{pmatrix} = 0.$$

Aus Teil i. erhält man unter Beachtung der Anfangsbedinungen

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3e^{t^2/2} - 1 \\ 2e^{3t} + 4te^{3t} - 1 \\ 2e^{3t} - 1 \end{pmatrix}. \qquad \textbf{[2]}$$

9. $\boxed{\textit{5 Punkte}}$ *(Betrachten Sie diese Aufgabe als zusätzliche Übungsaufgabe. Es war nicht unsere Absicht, diese in die Probklausur zu integrieren; hingegen sollten Sie sich (die neue) Aufgabe 5 umso mehr zu Herzen nehmen, da eine Aufgabe dessen Typs als Klausuraufgabe sehr wahrscheinlich ist.)*
Sei $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ und $v \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$. Zeigen Sie die Identität

$$\nabla \times (fv) = \nabla f \times v + f\nabla \times v.$$

Lösung: Sämtliche Summen laufen von 1 bis 3. Wir berechnen mit der Produktregel für $i = 1, 2, 3$

$$\begin{aligned} (\nabla \times (fv))_i &\overset{[1]}{=} \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} \partial_j (fv)_k \overset{[2]}{=} \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} v_k \partial_j f + f \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} \partial_j v_k \\ &\overset{[1]}{=} \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} (\nabla f)_j v_k + f(\nabla \times v)_i \overset{[1]}{=} (\nabla f \times v + f\nabla \times v)_i \,. \end{aligned}$$

Es ist auch möglich den Beweis durch striktes Hinschreiben jeder Komponente durchzuführen. Sei dazu $v = (v_1, v_2, v_3)^T$

$$\begin{aligned} \nabla \times (fv) &= \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} fv_1 \\ fv_2 \\ fv_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_2(fv_3) - \partial_3(fv_2) \\ \partial_3(fv_1) - \partial_1(fv_3) \\ \partial_1(fv_2) - \partial_2(fv_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_3\partial_2 f + f\partial_2 v_3 - v_2\partial_3 f - f\partial_3 v_2 \\ v_1\partial_3 f + f\partial_3 v_1 - v_3\partial_1 f - f\partial_1 v_3 \\ v_2\partial_1 f + f\partial_1 v_2 - v_1\partial_2 f - f\partial_2 v_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} v_3\partial_2 f - v_2\partial_3 f \\ v_1\partial_3 f - v_3\partial_1 f \\ v_2\partial_1 f - v_1\partial_2 f \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f\partial_2 v_3 - f\partial_3 v_2 \\ f\partial_3 v_1 - f\partial_1 v_2 \\ f\partial_1 v_2 - f\partial_2 v_1 \end{pmatrix} = -v \times \nabla f + f\nabla \times v \\ &= \nabla f \times v + f\nabla \times v \end{aligned}$$