FERIENKURS ANALYSIS 2 FÜR PHYSIKER

JOHANNES R. KAGER UND JULIAN SIEBER

Lösungsvorschlag zum Aufgabenblatt 4

Aufgabe 1 (*zum Aufwärmen*)**.** Zeigen Sie durch Differenzieren und Einsetzen, dass die Funktion $x = \frac{Ct}{1+t}$ die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $t(1+t)\dot{x} - x = 0$ darstellt ($C \in \mathbb{R}$). Wie lautet die durch den Punkt $P = (1; 8)$ gehende Lösungskurve?

Lösung. x und $\dot{x}$ werden in die Differentialgleichung eingesetzt und erfüllen diese Gleichung. Es handelt sich um die *allgemeine* Lösung, da sie als Lösung einer DGL erster Ordnung einen frei wählbaren Parameter enthält. Lösungskurve durch P: $x = \frac{16\,t}{1+t}$ ///

Aufgabe 2 ($\star$)**.** Lösen Sie folgende DGLen mithilfe „Trennen der Variablen" oder „Variation der Konstanten":

- $\dot{x}(1+t^2) = t\,x$
- $\dot{x} = (1-x)^2, \qquad x(0) = 2$
- $t\dot{x} + x = t \cdot \sin t$

Lösung.

- Mit TdV folgt $\frac{1}{x}dx = \frac{t}{1+t^2}dt$. Beidseitig integrieren:
$$\ln|x| = \frac{1}{2}\ln|1+t^2| + \ln|c|, \qquad c \in \mathbb{R}.$$
Anstatt der klassischen Integrationskonstanten c, empfiehlt es sich $\ln|c|$ zu addieren, da dann die Umstellung nach x leichter fällt. Beidseitige Anwendung der Exponentialfunktion:
$$|x| = |c|\,\sqrt{|1+t^2|} = |c|\,\sqrt{1+t^2} \Rightarrow x = \pm|c|\,\sqrt{1+t^2} = c\,\sqrt{1+t^2},\ \ c \in \mathbb{R}$$

- Mit TdV folgt die allgemeine Lösung $x = \frac{x+c-1}{x+c}$. Einbeziehen der Anfangsbedingung $x(0) = 2$ folgert: $x = \frac{t-2}{t-1}$.

- Mithilfe TdV ergibt sich als Lösung der homogenen DGL $t\dot{x} + x = 0$: $x_{\text{hom}} = \frac{c}{t}$.
VdK erfordert nun das Ersetzen von c mit $c(t)$ und das Einsetzen des erhaltenen Ausdruckes in die inhomogene DGL: $x = \frac{c(t)}{t}$
$$t\dot{x}(t) + x(t) = t\left(\frac{1}{t}\dot{c}(t) - \frac{1}{t^2}c(t)\right) + \frac{c(t)}{t} = t\sin(t)$$
$$\Rightarrow \dot{c}(t) = t\sin(t)$$
Partielle Integration liefert $c(t)$ (Int.konstante nicht vergessen!) und Einsetzen in $x = \frac{c(t)}{t}$ liefert die Lösung der inhomogenen DGL: $x = \frac{\sin t - t\cdot\cos t + c}{t}$.

Achtung: das c in x_{hom} entspricht nicht dem freien Parameter c in der Lösung der inh. DGL. Man verwendet aus Gewohnheit oft in beiden Gleichungen den Buchstaben c, muss sich aber des Unterschieds bewusst sein. Ebenso ist $c(t) \neq c$.

///

Aufgabe 3 ($\star\star$)**.** Bestimmen Sie die Lösungen der DGL

$$\dot{x}(t) + tx(t) = tx(t)^3.$$

Lösung. Die DGL ist eine Bernoulli'sche DGL mit $\alpha = 3$, $g(t) = -h(t) = t$. Wir setzen also $z = 1/x^2$ und lösen

$$\dot{z} = 2tz - 2t$$

mit Trennung der Variablen. Es ist

$$\int \frac{dz}{z-1} = 2\int t\,dt$$

und damit $z(t) = Ce^{t^2} + 1$. Folglich löst

$$x(t) = \pm\frac{1}{\sqrt{Ce^{t^2}+1}}$$

die Differentialgleichung. Es ist zu bemerken, dass die triviale Lösung $x(t) \equiv 0$ hiervon nicht erfasst ist und daher gesondert angegeben werden muss. ///

Aufgabe 4 ($\star$)**.** Sei $x : I \to \mathbb{R}$. Finden Sie die allgemeine Lösung der DGL 2. Ordnung

$$\ddot{x} - 6\dot{x} + 5x = 0$$

Lösung. Die Lösung kann mit dem Satz zur Lösungsnormalform errechnet werden (bzw. dem daraus gefolgerten Algorithmus in Tabelle 1), oder auch direkt mit Exponentialansatz $x = c\mathrm{e}^{bx}$. Dieser Ansatz wird eingesetzt in die DGL:

$$cb^2\mathrm{e}^{bx} - 6cb\mathrm{e}^{bx} + 5c\mathrm{e}^{bx} = 0 \Rightarrow b^2 - 6b + 5 = 0 \Rightarrow b_1 = 5, b_2 = 1$$

Allg. Lösung als Linearkombination der Fundamentalbasis:

$$x(t) = c_1\mathrm{e}^{b_1x} + c_2\mathrm{e}^{b_2x} = c_1\mathrm{e}^{5x} + c_2\mathrm{e}^{x}$$

///

Aufgabe 5 ($\star$)**.** Sei $y(x) : I \to \mathbb{R}$. Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\ddot{y} - 7\dot{y} + 6y = \sin x \tag{1}$$

so, dass $y(x)$ periodisch wird. Achtung: an der Stelle des gewohnten Fkt.namens x wird hier y verwendet. x ersetzt das gewohnte t.

Lösung. Unter Verwendung von Tabelle 1:

(i) Homogene DGL $\ddot{y} - 7\dot{y} + 6y$ lösen mit ch. Polynom:

$$\lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49-24}}{2} = \begin{cases} 6 \equiv \lambda_1 \\ 1 \equiv \lambda_2 \end{cases}$$

Als allgemeine Lösung der homogenen DGL ergibt sich:

$$y_0 = c_1\mathrm{e}^{\lambda_1 x} + c_2\mathrm{e}^{\lambda_2 x} = c_1\mathrm{e}^{6x} + c_2\mathrm{e}^{x}$$

(ii) Partikuläre Lösung: finde Lösungsansatz für Störfunktion $g(x) = \sin(x)$

$$y_p = A\sin(x) + B\cos(x)$$

Finde A, B durch Koeffizientenvergleich: y_p als y in (1) einsetzen

$$-A\sin(x) - B\cos(x) - 7A\cos(x) + 7B\sin(x) + 6A\sin(x) + 6B\cos(x) = \sin(x)$$
$$[5A + 7B]\sin(x) + [-7A + 5B]\cos(x) = \sin(x)$$

$$\Rightarrow 5A + 7B = 1$$
$$-7A + 5B = 0 \qquad \Rightarrow A = \frac{5}{74},\ \ B = \frac{7}{74}$$

(iii) Gesamtlösung als $y = y_0 + y_p$:

$$y(x) = c_1 e^{6x} + c_2 e^{x} + \frac{5}{74}\sin(x) + \frac{7}{74}\cos(x)$$

Die verlangte Periodizität wird durch $c_1 = c_2 = 0$ erreicht.

///

Aufgabe 6 ($\star\star$)**.** Skizzieren Sie das Richtungsfeld der jeweiligen DGL 1. Ordnung mit Hilfe von Isoklinen und versuchen Sie eine Lösungskurve einzuzeichnen. Wie lautet die allgemeine Lösung der DGL? (Hinweis: zeichnen Sie Linien konstanter Steigung $\dot{x}$ ein)

$$\text{a)} \quad \dot{x} = \frac{1}{2}\frac{x}{t}, \quad x > 0, \qquad \text{b)} \quad \dot{x} = x$$

Lösung. Einzeichnen der Isoklinen beispielhaft für a): Setze $\dot{x}$ auf Werte in $\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, \frac{3}{2}$ und stelle um nach $x(t)$.

$$\frac{3}{2} \stackrel{!}{=} \dot{x} = \frac{1}{2}\frac{x}{t} \Rightarrow x(t) = 3t$$

Analytische Lösungen (mithilfe „Trennen der Variablen"): a) $x = c\sqrt{t}$, b) $x = ce^t$. Die Richtungsfelder sind in Abb. 1 und Abb. 2 dargestellt. Dabei ist $a \equiv \dot{x}$. Quelle: *L. Papula Mathematik für Naturwissenschaftler Band 2, 2012*

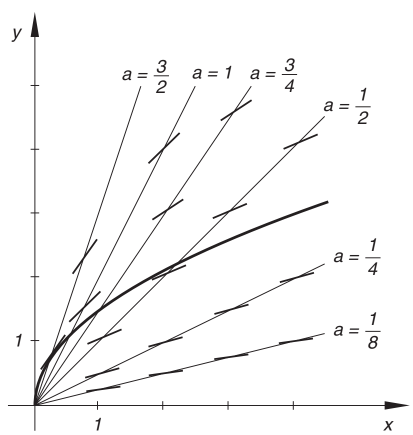

Abbildung 1. A6 a)

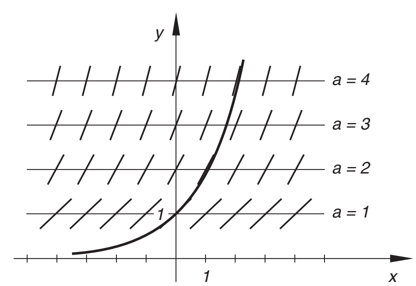

Abbildung 2. A6 b)

///

Aufgabe 7 (⋆⋆). Lösen Sie folgende lineare DGLen n-ter Ordnung. (Hinweis: Satz zur Lösungsnormalform)

- $\dddot{x} - 7\dot{x} + 6x = 0$
- $y''' - 4y'' - 11y' - 6y = 0$
- $x^{(4)} - x = 0$

Lösung. Nach dem Satz zur Lösungsnormalform gilt:

- $x = c_1\ e^x + c_2\mathrm{e}^{2x} + c_3\mathrm{e}^{-3x}$
- $y = (c_1 + c_2 x)\,\mathrm{e}^{-x} + c_3\mathrm{e}^{6t}$
- $\lambda_{1,2} = \pm 1, \lambda_{3,4} = \pm i \Rightarrow x = c_1\mathrm{e}^t + c_2\mathrm{e}^{-t} + c_3\mathrm{e}^{it} + c_4\mathrm{e}^{-it}$

///

Aufgabe 8 (⋆). Lösen Sie folgende Bernoullische DGL:

$$x' + \frac{1}{t}x - x^3 = 0$$

Lösung. Es gilt also $g(t) = \frac{1}{t}$ und $h(t) = -1$. Nach den Schritten wie im Skript:

(i) Es ist $\alpha = 3$ und damit $1 - \alpha = -2$. Damit gilt:

$$x^{-2} = y = z, \qquad \text{sowie umgestellt:} \qquad x = \pm z^{-\frac{1}{2}}.$$

Durch Einsetzen in die DGL erhalten wir

$$z' - \frac{2}{t}z = -2.$$

(ii) Die homogene Gleichung lautet

$$z_h' - \frac{2}{t}z_h = 0 \Rightarrow \frac{1}{z_h}dz_h = \frac{2}{t}dt$$

woraus durch beidseitige Integration folgt

$$\ln|z_h| = 2\ln|t| + \ln|K|, \qquad \text{mit} \quad K \in \mathbb{R}$$

und umgestellt nach z_h

$$z_h = K \cdot t^2$$

Nach dem Verfahren der Variation der Konstanten erhalten wir daraus $z(t) = K(t) \cdot t^2$ und finden durch Einsetzen in die lineare DGL heraus, dass

$$K(t) = \frac{2}{t} + c \qquad \text{mit} \quad c \in \mathbb{R} \text{ beliebig}$$

gelten muss. Zusammengefasst ergibt dies:

$$z(t) = K(t) \cdot t^2 = c \cdot t^2 + 2t.$$

(iii) Wir setzen $z(t)$ in die Rückransformationsgleichung ein:

$$x(t) = \pm\frac{1}{\sqrt{z(t)}} = \pm\frac{1}{\sqrt{c \cdot t^2 + 2t}}$$

Dieses ist die Lösung der Bernoulischen DGL.

///

Aufgabe 9 ($\star\star$)**.** Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(i) Berechnen Sie e^{At}.

(ii) Bestimmen Sie eine Basis des Vektorraumes aller Lösungen $x \in \mathbb{R}^3, t \in \mathbb{R}$ des Gleichungssystems

$$\dot{x} = Ax.$$

(iii) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lösung.

(i) Wir bemerken zunächst, dass $A = D + N$ mit

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

wobei N und D kommutieren. Ferner ist N nilpotent und es gilt

$$e^{Nt} = \mathbb{1} + Nt = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2t & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Insgesamt erhalten wir also

$$e^{At} = e^{Dt}e^{Nt} = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2t & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 2te^t & e^t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(ii) Die allg. Lösung lautet $x(t) = \exp(At)x_0$, somit bilden die Spalten von e^{At} ein Lösungsfundamentalsystem.

(iii) Angenehmerweise entkoppelt dank der Struktur von A das DGL System. Die dritte Zeile lautet

$$\dot{x_3}(t) = e^{2t},$$

also $x_3(t) = e^{2t}/2 + C$, $C \in \mathbb{R}$. Mit der Anfangsbedingung folgt $C = -1/2$, also

$$x_3(t) = \frac{1}{2}(e^{2t} - 1).$$

Für die beiden anderen Zeilen benutzen wir

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 2te^t & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix}$$

und erhalten so insgesamt

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t \\ e^t(2t+1) \\ \frac{1}{2}(e^{2t} - 1) \end{pmatrix}.$$

///

Aufgabe 10 ($\star\star$)**.** Sind folgende Aussagen richtig oder falsch? Begründen Sie!

(i) Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Ist die Funktion $t \to te^t$ eine Lösung von $\ddot{x} + a\dot{x} + bx = 0$, dann ist auch die Funktion $t \to e^t$ eine Lösung dieser Differentialgleichung.
(ii) Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei stetig differenzierbar. Die Funktionen $x_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $x_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seien Lösungen der Differentialgleichung $\dot{x} = f(t, x)$. Gilt $x_1(0) < x_2(0)$, dann folgt $x_1(t) < x_2(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

Lösung.

(i) Die Aussage ist richtig.
Durch Einsetzen der Lösung $t \to te^t$ ergeben sich die Koeffizienten $a = -2, b = 1$ und somit die DGL $\ddot{x} - 2\dot{x} + x = 0$. $t \to e^t$ ist offensichtlich Lösung davon.
(ii) Die Aussage ist richtig.
Gäbe es eine $t \neq 0$ mit $x_1(t) \geq x_2(t)$, so auch ein t^* mit $x_1(t^*) = x_2(t^*)$ (Zwischenwertsatz). Dann sind sowohl x_1 als auch x_2 Lösungen des Anfangswertproblems

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(t^*) = x_1(t^*) \tag{2}$$

Da f C^1-Funktion ist, ist f insbesondere stetig und lokal Lipschitzstetig bzgl. der zweiten Komponente. Aus dem Satz über globale Existenz von Lösungen, angewandt auf dem Anfangswertproblem (2) folgt dann

$$x_1(t) = x_2(t) \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}$$

im Widerspruch zur Voraussetzung

$$x_1(0) < x_2(0).$$

Also folgt $x_1(t) < x_2(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

///

Aufgabe 11 ($\star\star$)**.** Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und $f : X \to X$ eine Selbstabbildung, für welche es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, sodass

$$f^n := \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ mal}}$$

eine Kontraktion ist. Zeigen Sie, dass f einen eindeutigen Fixpunkt besitzt.

Geben Sie ein Beispiel an, welches zeigt das f selbst keine Kontraktion sein muss.

Betrachten Sie nun die Funktion $g : [0, \infty) \to [0, \infty)$,

$$g(x) = \frac{1}{3}\left(x + \sin x + \frac{1}{x+1}\right)$$

und zeigen Sie, dass g einen eindeutigen Fixpunkt besitzt.

Lösung. Sei $n \in \mathbb{N}$, sodass $f^n : X \to X$ kontrahierend ist. Der Banach'sche Fixpunktsatz liefert dann die Existenz und Eindeutigkeit eines Fixpunktes x_0. Für diesen gilt bekanntlich $f^n(x_0) = x_0$. Wenden wir nun f auf diese Gleichung an, so folgt

$$f^n(f(x_0)) = f(f^n(x_0)) = f(x_0).$$

Somit ist $f(x_0)$ ein Fixpunkt von f^n. Da jedoch der Fixpunkt eindeutig bestimmt ist, muss $f(x_0) = x_0$ gelten. Um die Eindeutigkeit zu zeigen nehmen wir an, dass $\tilde{x}$ ein weiterer Fixpunkt von f wäre. Dann folgt

$$f^n(\tilde{x}) = f^{n-1}(f(\tilde{x})) = f^{n-1}(\tilde{x}) = \cdots = f(\tilde{x}) = \tilde{x}$$

und damit liefert der Banach'sche Fixpunktsatz $\tilde{x} = x_0$.

Wir betrachten $\mathbb{R}$ mit der Standardmetrik. Für die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} -2x & \text{für } x < 0 \\ 0 & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$$

gilt $f \circ f \equiv 0$. Man sieht sofort, dass f keine Kontraktion ist, da die kleinstmögliche Lipschitzkonstante $L = 2$ ist.

Für die Funktion g bemerken wir, dass für $x \in [0, \infty)$

$$|g'(x)| = \left| \frac{1}{3} \left(1 + \cos x - \frac{1}{(x+1)^2} \right) \right| < 1.$$

Damit ist g eine kontrahierende Selbstabbildung des vollständigen metrischen Raumes $[0, \infty)$ und der Banach'sche Fixpunktsatz liefert die Behauptung. ///

Aufgabe 12 ($\star\star\star$)**.** Zeigen Sie, dass für $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x &= a_1 + \frac{1}{6}(\sin y + \sin z) \\ y &= a_2 + \frac{1}{6}(\sin x + \sin z) \\ z &= a_3 + \frac{1}{6}(\sin x + \sin y) \end{aligned}$$

eine eindeutige Lösung besitzt.

Lösung. Wir betrachten den metrischen Raum $(\mathbb{R}^3, d)$ mit der Metrik, welche von der 1–Norm induziert wird:

$$d(x, y) = \sum_{i=1}^{3} |x_i - y_i|.$$

Da alle Normen im Endlichdimensionalen äquivalent sind, folgt, dass $(\mathbb{R}^3, d)$ vollständig ist. Ferner gilt für $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} a_1 + \frac{1}{6}(\sin y + \sin z) \\ a_2 + \frac{1}{6}(\sin x + \sin z) \\ a_3 + \frac{1}{6}(\sin x + \sin y) \end{pmatrix},$$

dass

$$\begin{aligned} d(f(x, y, z), f(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})) = \frac{1}{6}(&|\sin y + \sin z - \sin \tilde{y} - \sin \tilde{z}| + |\sin x + \sin z - \sin \tilde{x} - \sin \tilde{z}| \\ &+ |\sin x + \sin y - \sin \tilde{x} - \sin \tilde{y}|) \\ &\leq \frac{1}{3}(|\sin y - \sin \tilde{y}| + |\sin x - \sin \tilde{x}| + |\sin z - \sin \tilde{z}|) \\ &\leq \frac{1}{3}(|x - \tilde{x}| + |y - \tilde{y}| + |z - \tilde{z}| \\ &= \frac{1}{3} d((x, y, z), (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})). \end{aligned}$$

Hierbei haben wir die Lipschitz Stetigkeit des Sinus $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$ benutzt. Diese können Sie leicht mit dem Mittelwertsatz nachprüfen. Insgesamt folgt die Behauptung nun aus dem Banach'schen Fixpunktsatz. ///