FERIENKURS ANALYSIS 2 FÜR PHYSIKER

JOHANNES R. KAGER UND JULIAN SIEBER

Aufgabenblatt 4

Aufgabe 1 (*zum Aufwärmen*)**.** Zeigen Sie durch Differenzieren und Einsetzen, dass die Funktion $x = \frac{Ct}{1+t}$ die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $t(1+t)\dot{x} - x = 0$ darstellt ($C \in \mathbb{R}$). Wie lautet die durch den Punkt $P = (1; 8)$ gehende Lösungskurve?

Aufgabe 2 ($\star$)**.** Lösen Sie folgende DGLen mithilfe "Trennen der Variablen" oder "Variation der Konstanten":

- $\dot{x}(1+t^2) = t\,x$
- $\dot{x} = (1-x)^2, \qquad x(0) = 2$
- $t\dot{x} + x = t \cdot \sin t$

Aufgabe 3 ($\star\star$)**.** Bestimmen Sie die Lösungen der DGL

$$\dot{x}(t) + tx(t) = tx(t)^3.$$

Aufgabe 4 ($\star$)**.** Sei $x : I \to \mathbb{R}$. Finden Sie die allgemeine Lösung der DGL 2. Ordnung

$$\ddot{x} - 6\dot{x} + 5x = 0$$

Aufgabe 5 ($\star$)**.** Sei $y(x) : I \to \mathbb{R}$. Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\ddot{y} - 7\dot{y} + 6y = \sin x \tag{1}$$

so, dass $y(x)$ periodisch wird. Achtung: an der Stelle des gewohnten Fkt.namens x wird hier y verwendet. x ersetzt das gewohnte t.

Aufgabe 6 ($\star\star$)**.** Skizzieren Sie das Richtungsfeld der jeweiligen DGL 1. Ordnung mit Hilfe von Isoklinen und versuchen Sie eine Lösungskurve einzuzeichnen. Wie lautet die allgemeine Lösung der DGL? (Hinweis: zeichnen Sie Linien konstanter Steigung $\dot{x}$ ein)

$$\text{a)} \quad \dot{x} = \frac{1}{2}\frac{x}{t}, \quad x > 0, \qquad \text{b)} \quad \dot{x} = x$$

Aufgabe 7 ($\star\star$)**.** Lösen Sie folgende lineare DGLen n-ter Ordnung. (Hinweis: Satz zur Lösungsnormalform)

- $\dddot{x} - 7\dot{x} + 6x = 0$
- $y''' - 4y'' - 11y' - 6y = 0$
- $x^{(4)} - x = 0$

Aufgabe 8 ($\star$)**.** Lösen Sie folgende Bernoullische DGL:

$$x' + \frac{1}{t}x - x^3 = 0$$

Aufgabe 9 ($\star\star$)**.** Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(i) Berechnen Sie e^{At}.

(ii) Bestimmen Sie eine Basis des Vektorraumes aller Lösungen $x \in \mathbb{R}^3, t \in \mathbb{R}$ des Gleichungssystems

$$\dot{x} = Ax.$$

(iii) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 10 ($\star\star$)**.** Sind folgende Aussagen richtig oder falsch? Begründen Sie!

(i) Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Ist die Funktion $t \to t\mathrm{e}^t$ eine Lösung von $\ddot{x} + a\dot{x} + bx = 0$, dann ist auch die Funktion $t \to \mathrm{e}^t$ eine Lösung dieser Differentialgleichung.

(ii) Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei stetig differenzierbar. Die Funktionen $x_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $x_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seien Lösungen der Differentialgleichung $\dot{x} = f(t, x)$. Gilt $x_1(0) < x_2(0)$, dann folgt $x_1(t) < x_2(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 11 ($\star\star$)**.** Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und $f : X \to X$ eine Selbstabbildung, für welche es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, sodass

$$f^n := \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ mal}}$$

eine Kontraktion ist. Zeigen Sie, dass f einen eindeutigen Fixpunkt besitzt.

Geben Sie ein Beispiel an, welches zeigt das f selbst keine Kontraktion sein muss.

Betrachten Sie nun die Funktion $g : [0, \infty) \to [0, \infty)$,

$$g(x) = \frac{1}{3} \left(x + \sin x + \frac{1}{x+1} \right)$$

und zeigen Sie, dass g einen eindeutigen Fixpunkt besitzt.

Aufgabe 12 ($\star\star\star$)**.** Zeigen Sie, dass für $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x &= a_1 + \frac{1}{6}(\sin y + \sin z) \\ y &= a_2 + \frac{1}{6}(\sin x + \sin z) \\ z &= a_3 + \frac{1}{6}(\sin x + \sin y) \end{aligned}$$

eine eindeutige Lösung besitzt.