FERIENKURS ANALYSIS 2 FÜR PHYSIKER

JOHANNES R. KAGER UND JULIAN SIEBER

Lösungsvorschlag zum Aufgabenblatt 3

Aufgabe 1 ($\star\star$)**.** Wir betrachten die sogenannte *Astroide*:

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}, \qquad \gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos^3 t \\ \sin^3 t \end{pmatrix}.$$

(i) Begründen Sie, dass γ stetig differenzierbar ist und geben Sie $\dot{\gamma}$ an.
(ii) Bestimmen Sie die Bogenlänge von γ.
(iii) Berechnen Sie alle Maxima und Minima der Funktion $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$, $f(t) = |\gamma(t)|$.
(iv) Ist γ regulär?

Lösung. (i): Die Komponentenfunktionen von γ sind unendlich oft differenzierbar und wir erhalten

$$\dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} -3\cos^2(t)\sin(t) \\ 3\sin^2(t)\cos(t). \end{pmatrix}$$

(ii): Die Bogenlänge berechnen wir gemäß

$$L(\gamma) = \int_0^{2\pi} |\dot{\gamma}(t)|\, dt = 3\int_0^{2\pi} |\sin(t)\cos(t)|\, dt = 12\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\cos(t) = 6\left[\sin^2(t)\right]_0^{\pi/2} = 6.$$

Hierbei haben wir die Periodizität der Funktion $x \mapsto |\sin(x)\cos(x)|$ ausgenutzt.

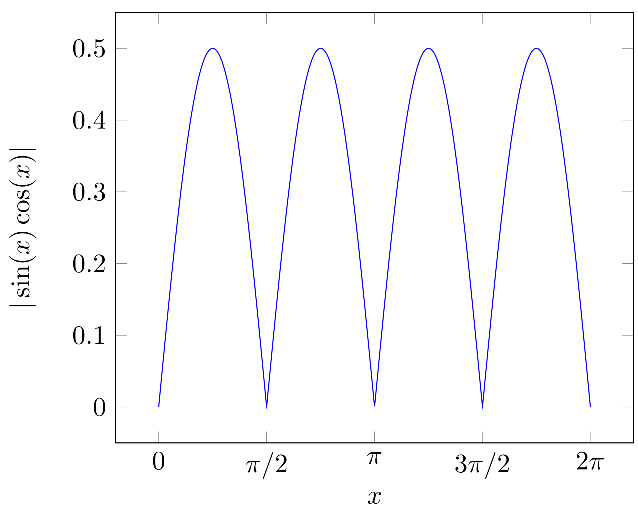

ABBILDUNG 1. Plot der Funktion $x \mapsto |\sin(x)\cos(x)|$.

(iii): Da die Funktion $[0, \infty) \ni x \mapsto x^2$ streng monoton wächst, können wir statt $t \mapsto |\gamma(t)|$ die Abbildung $t \mapsto |\gamma(t)|^2$ minimieren (maximieren). Das erleichtert die Rechnung ungemein. Es ist $g(t) := |\gamma(t)|^2 = \cos^6(t) + \sin^6(t)$. Mit bekannter Schulmathematik folgt sofort

$$g'(t) = 6\cos(t)\sin(t)(-\cos^4(t) + \sin^4(t)) \overset{!}{=} 0$$

und damit ist $g'(t) = 0$ genau dann, wenn

$$\begin{aligned} \cos(t) = 0 &\iff t \in (2\mathbb{Z}+1)\frac{\pi}{2} \\ \sin(t) = 0 &\iff t \in \pi\mathbb{Z} \\ \cos^4(t) = \sin^4(t) \iff \cos(t) = \pm\sin(t) &\iff t \in (2\mathbb{Z}+1)\frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Insgesamt liegen also Extremalstellen bei $t \in \pi k/4$, $k \in \{0, \ldots, 8\}$, vor. Statt nun standardmäßig die zweite Ableitung auszurechnen, untersuchen wir das Monotonieverhalten von g. Wir finden

$$\begin{aligned} g'(t) < 0 \text{ für } t \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right) \cup \left(\pi, \frac{5\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}\right) \\ g'(t) > 0 \text{ für } t \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{4}, \pi\right) \cup \left(\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right). \end{aligned}$$

Damit ergibt sich zusammenfassend

Maxima	Minima
$\lvert\gamma(0)\rvert = 1$	$\lvert\gamma(\pi/4)\rvert = 1/2$
$\lvert\gamma(\pi/2)\rvert = 1$	$\lvert\gamma(3\pi/4)\rvert = 1/2$
$\lvert\gamma(\pi)\rvert = 1$	$\lvert\gamma(5\pi/4)\rvert = 1/2$
$\lvert\gamma(3\pi/2)\rvert = 1$	$\lvert\gamma(7\pi/4)\rvert = 1/2$

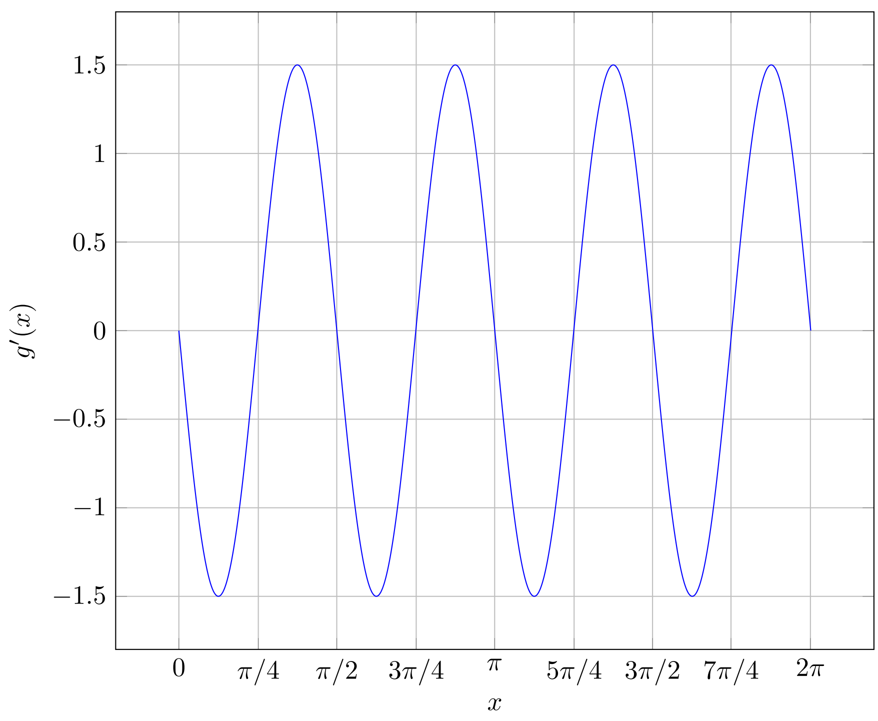

Abbildung 2. Plot der Funktion $x \mapsto 6\cos(x)\sin(x)(-\cos^4(x) + \sin^4(x))$.

(iv): Die Kurve γ ist nicht regulär, wie man leicht an $t \in \{0, \pi/2, \pi, 3\pi/2, 2\pi\}$ sieht. Dort verschwindet nämlich $\dot{\gamma}$. ///

Aufgabe 2 ($\star$)**.** Bestimmen Sie die Bogenlänge der *Neilschen Parabel*

$$\gamma : [-1, 1] \to \mathbb{R}^2, \qquad \gamma(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}$$

bezüglich den nachfolgenden Normen:

(i) der gewöhnlichen euklidischen Norm,
(ii) der 1–Norm: $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$,
(iii) der Maximumsnorm: $\|x\|_\infty = \max\limits_{i=1,\dots,n} |x_i|$.

Lösung. Für die Ableitung der Kurve erhalten wir

$$\dot\gamma = \begin{pmatrix} 2t \\ 3t^2 \end{pmatrix}.$$

(i): Wir rechnen:

$$\begin{aligned} L_2(\gamma) &= \int_{-1}^1 \sqrt{4t^2+9t^4}\ dt = -\int_{-1}^0 t\sqrt{4+9t^2}\ dt + \int_0^1 t\sqrt{4+9t^2}\ dt \\ &= -\left[\frac{1}{27}(4+9t^2)^{3/2}\right]_{-1}^0 + \left[\frac{1}{27}(4+9t^2)^{3/2}\right]_0^1 = -\frac{8}{27} + \frac{13^{3/2}}{27} + \frac{13^{3/2}}{27} - \frac{8}{27} \\ &= 2\frac{13^{3/2}-8}{27}. \end{aligned}$$

(ii): Wir rechnen:

$$L_1(\gamma) = \int_{-1}^1 \|\dot\gamma(t)\|_1\ dt = \int_{-1}^1 2|t| + 3t^2; dt = 2+2 = 4.$$

(iii): Wir rechnen:

$$\begin{aligned} L_\infty(\gamma) &= \int_{-1}^1 \|\dot\gamma(t)\|_\infty\ dt = \int_{-1}^1 \max\{2|t|, 3t^2\}\ dt \\ &= 2\left(2\int_0^{\frac{2}{3}} t\ dt + 3\int_{\frac{2}{3}}^1 t^2\right) = 2\left(\frac{4}{9} + 1 - \frac{8}{27}\right) = \frac{62}{27}. \end{aligned}$$

///

Aufgabe 3 ($\star$)**.** Parametrisieren Sie die *Kettenlinie*

$$\gamma : [0,\infty) \to \mathbb{R}^2, \qquad \gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ \frac{1}{2}\cosh(2t) \end{pmatrix}$$

nach Bogenlänge.

Lösung. Wir berechnen die Bogenlänge als Funktion des Zeitparameters:

$$s(t) = \int_0^t |\dot\gamma(\tau)|\ d\tau = \int_0^t \sqrt{1+\sinh^2(2\tau)}\ d\tau = \int_0^t \cosh(2\tau)\ d\tau = \frac{1}{2}(\sinh(2t)-1).$$

Die Umkehrfunktion lautet $\tilde t(s) = \operatorname{arsinh}(2s-1)/2$ und damit erhalten wir die nach Bogenlänge parametrisierte Kurve

$$\sigma(s) = \gamma(\tilde t(s)) = \begin{pmatrix} \frac{\operatorname{arsinh}(2s-1)}{2} \\ \frac{1}{2}\cosh(\operatorname{arsinh}(2s-1)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\operatorname{arsinh}(2s-1)}{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{(2s-1)^2-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\operatorname{arsinh}(2s-1)}{2} \\ \sqrt{s^2-s} \end{pmatrix}.$$

///

Aufgabe 4 ($\star$)**.** Berechnen Sie für $R > 0$ die Länge von $\gamma : [0, \pi/2] \to \mathbb{R}^2$,

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} 2R\cos^3 t \\ 2R\sin^3 t \end{pmatrix}.$$

Lösung. Es ist

$$\dot\gamma(t) = 6R\cos(t)\sin(t)\begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \quad\Longrightarrow\quad |\dot\gamma(t)| = 6R|\cos(t)\sin(t)|$$

und damit folgt

$$L(\gamma) = \int_0^{\pi/2} |\dot\gamma(t)|\ dt = 6R\int_0^{\pi/2} |\cos(t)\sin(t)|\ dt = 3r\left[\sin^2 t\right]_0^{\pi/2} = 3R.$$

///

Aufgabe 5 ($\star$)**.** Sei $c > 0$ und $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = e^{(c+i)t}$.

(i) Schreiben Sie γ als Kurve im $\mathbb{R}^2$ und skizzieren Sie diese.

(ii) Sei $a < b$ und $L(a,b)$ die Länge der Kurve $\gamma\big|_{[a,b]}$. Berechnen Sie $L(a,b)$ und zeigen Sie, dass $\lim\limits_{a\to-\infty} L(a,0)$ existiert.

Lösung. (i): Aus der bekannten Euler'schen Formel erhalten wir

$$\gamma(t) = e^{(c+i)t} = e^{ct}(\cos t + i\sin t).$$

Verwenden wir nun den kanonischen Isomorphismus

$$\begin{aligned}\Phi : \mathbb{C} &\to \mathbb{R}^2,\\ z &\mapsto \begin{pmatrix}\operatorname{Re} z\\ \operatorname{Im} z\end{pmatrix},\end{aligned}$$

erhalten wir die Kurve

$$\eta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \qquad \eta(t) = e^{ct}\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix},$$

welche $\operatorname{bild}(\gamma) = \operatorname{bild}(\Phi^{-1}\circ\eta)$ erfüllt.

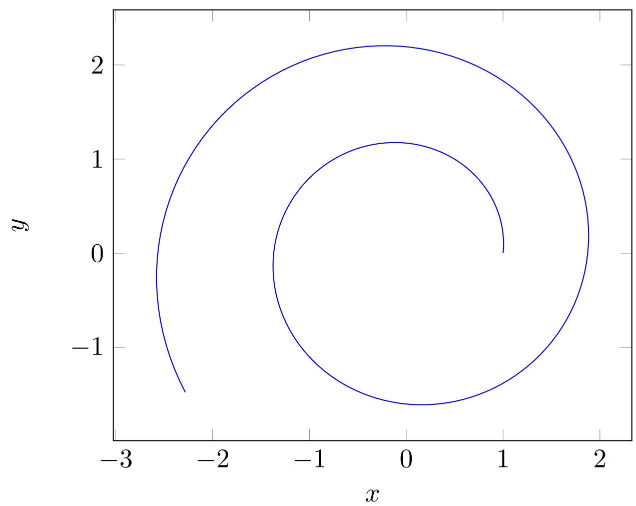

ABBILDUNG 3. Plot der Kurve für $c = 1/10$.

(ii): Wir berechnen

$$L(a,b) = \int_a^b e^{ct}\,dt = \frac{1}{c}(e^{bc} - e^{ac})$$

und damit

$$\lim_{a\to-\infty} L(a,b) = \frac{e^{bc}}{c}.$$

///

Aufgabe 6 ($\star$)**.** Wir betrachten die *Kardioide*, welche durch

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}, \qquad \gamma(t) = \begin{pmatrix}(1+\cos t)\cos(t)\\ (1+\cos t)\sin t\end{pmatrix}$$

definiert ist.

(i) Bestimmen Sie die Punkte, in welchen die Ableitung der Kardioide verschwindet.

(ii) Skizzieren Sie γ.

(iii) Berechnen Sie die Länge von γ.

Hinweis: Die Identität $2(1+\cos t) = 4\cos^2(t/2)$ könnte bei der Bearbeitung der letzten Teilaufgabe hilreich sein.

Lösung. (i): Die Ableitung der Kardioide lautet

$$\begin{aligned}\dot{\gamma}(t) &= \begin{pmatrix} -\sin(t) - 2\sin(t)\cos(t) \\ \cos(t) + \cos^2(t) - \sin^2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(t)(2\cos(t)+1) \\ 2\cos^2(t) + \cos(t) - 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\sin(t)(2\cos(t)+1) \\ (\cos(t)+1)(2\cos(t)-1) \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Den singulären Punkt $t = \pi$ liest man unmittelbar ab.

(ii): Die Skizze erklärt den Namen "Herzlinie".

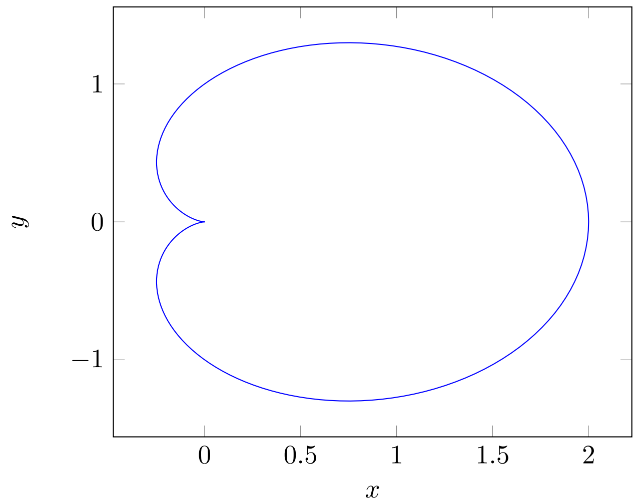

ABBILDUNG 4. Plot der Kardioide.

(iii): Wir erhalten

$$|\dot{\gamma}(t)|^2 = \sin(t)(2\cos(t)+1)^2 + (\cos(t)+1)^2(2\cos(t)-1)^2 = 2 + 2\cos(t)$$

und mit Hilfe des Hinweises

$$\begin{aligned}L(\gamma) &= \int_0^{2\pi} |\dot{\gamma}(t)|\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2+2\cos(t)}\, dt = 2\int_0^{2\pi} \left|\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right|\, dt \\ &= 2\left(\int_0^{\pi} \cos\left(\frac{t}{2}\right)\, dt - \int_{\pi}^{2\pi} \cos\left(\frac{t}{2}\right)\, dt\right) \\ &= 2\left(\left[2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right]_0^{\pi} - \left[2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right]_{\pi}^{2\pi}\right) = 8.\end{aligned}$$

///

Aufgabe 7 ($\star$). (i) Parametrisieren Sie die *Schraubenlinie*

$$\gamma : [0,\infty) \to \mathbb{R}^3, \qquad \gamma(t) = \begin{pmatrix} r\cos t \\ r\sin t \\ ht \end{pmatrix}$$

für feste $r, h > 0$ auf Bogenlänge.

(ii) Finden Sie eine stetig differenzierbare Funktion $f : U \to \mathbb{R}^2$, $U \subset \mathbb{R}^3$ offen, mit

$$\gamma(0, 6\pi) = \{x \in \mathbb{R} \,|\, f(x) = 0\}.$$

Folgern Sie damit, dass $\gamma(0, 6\pi)$ eine eindimensionale $\mathcal{C}^1$–UMF ist.

Lösung. (i): Wir erhalten

$$\dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} -r\sin t \\ r\cos t \\ h \end{pmatrix}$$

und damit $|\dot\gamma(t)|^2 = r^2 + h^2$. Für die Bogenlänge ergibt sich also

$$s(t) = \int_0^t |\dot\gamma(\tau)|\, d\tau = t\sqrt{r^2 + h^2}.$$

Für die Umkehrfunktion finden wir $\tilde t(s) = s(r^2 + h^2)^{-1/2}$, woraus wir die auf Bogenlänge parametrisierte Kurve σ sofort angeben können:

$$\sigma(s) = \gamma(\tilde t(s)) = \begin{pmatrix} r\cos\left(\frac{s}{\sqrt{r^2+h^2}}\right) \\ r\sin\left(\frac{s}{\sqrt{r^2+h^2}}\right) \\ \frac{hs}{\sqrt{r^2+h^2}} \end{pmatrix}.$$

(ii): Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \times (0, 6\pi) \to \mathbb{R}^2$,

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} x - r\cos z \\ y - r\sin z \end{pmatrix}$$

erfüllt die gewünschte Eigenschaft. Ferner ist hat die Ableitung

$$Df(x, y, x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & r\sin z \\ 0 & 1 & -r\cos z \end{pmatrix}$$

vollen Rang, da die Zeilen linear unabhängig sind. Somit ist $\gamma(0, 6\pi)$ eine eindimensionale $\mathcal{C}^1$–UMF. ///

Aufgabe 8 ($\star\star$)**.** Für $a > 0$ setzen wir $I = (-a, a)$. Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt *gerade*, falls $f(-x) = f(x)$ für alle $x \in I$ und *ungerade*, falls $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in I$. Zeigen Sie, dass die Taylorpolynome im Entwicklungspunkt 0 einer geraden (ungeraden) Funktion f ebenfalls gerade (ungerade) sind. (Die Existenz sei hierbei vorausgesetzt.)

Lösung. Betrachten wir zunächst den geraden Fall. Mit der Kettenregel sieht man leicht, dass $f(x) = f(-x)$ unmittelbar $f'(x) = -f'(-x)$ folgt, d.h. f' ist ungerade. Analog zeigt man die umgekehrte Aussage, dass die Ableitung einer ungeraden Funktion gerade ist. Damit folgt nun in diesem Fall, dass $f^{(k)}(0) = 0$ für k ungerade. Damit erhält man nun für $n \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned} T_{2n+1}f(x; 0) &= \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \\ &= f(0) + \frac{f^{(2)}(0)}{2} x^2 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!} x^4 + \cdots + \frac{f^{(2n)}(0)}{(2n)!} x^{2n} = T_{2n}f(x; 0), \end{aligned}$$

was klarerweise ein gerades Polynom ist.

Im Fall einer ungerade Funktion f ergibt sich $f^{(k)}(0) = 0$ für k gerade und damit ist für $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} T_{2n-1}f(x; 0) &= \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \\ &= f'(0)x + \frac{f^{(3)}(0)}{!} x^3 + \frac{f^{(5)}(0)}{5!} x^5 + \cdots + \frac{f^{(2n-1)}(0)}{(2n-1)!} x^{2n-1} \\ &= T_{2n}f(x; 0), \end{aligned}$$

was klarerweise ein ungerades Polynom ist. ///

Aufgabe 9 ($\star\star$)**.** Prüfen Sie, welche der nachfolgenden Mengen $\mathcal{C}^1$–UMF sind und bestimmen Sie ggf. deren Dimension. Beweisen Sie Ihre Aussagen.

(i) $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ |x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 1\}$
(ii) $N = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ |x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ x^2 + y^2 = x\}$
(iii) $O = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ |y = |x|\}$

Lösung. (i): Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz - 1$, dann ist

$$M \cap \mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ |f(x, y, z) = 0\}.$$

Bleibt zu zeigen, dass die Jacobi Matrix

$$J_f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 3x^2 - 3yz & 3y^2 - 3xz & 3z^2 - 3xy \end{pmatrix}$$

vollen Rang hat. Dazu bemerken wir, dass $J_f(x,y,z) = 0$ impliziert

$$x^2 = yz$$
$$y^2 = xz$$
$$z^2 = xy$$

und damit $f(x,y,z) = xyz + xyz + xyz - 3xyz - 1 = -1$, also $(x,y,z) \notin M$. Dies zeigt, dass M eine zweidimensionale $\mathcal{C}^1$–UMF ist.

(ii): Wir können N umschreiben zu $N = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + z^2 = 1\}$. Sei $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $g(x,y,z) = x + z^2 - 1$, dann ist

$$N \cap \mathbb{R}^3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid g(x,y,z) = 0\}.$$

Die Jacobi Matrix lautet

$$J_g(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2z \end{pmatrix}$$

und hat klarerweise vollen Rang. Dies zeigt, dass N eine zweidimensionale $\mathcal{C}^1$–UMF ist.

(iii): Wir zeigen, dass O keine eindimensionale (zweidimensional scheidet klarerweise aus) $\mathcal{C}^1$–UMF ist. Angenommen wir hätten eine solche vorliegen, so gäbe es offene Mengen $U \subset \mathbb{R}^2, V \subset \mathbb{R}$ und einen Homöomorphismus $\Phi : V \to U \cap O$, $\Phi \in \mathcal{C}^1(V, \mathbb{R}^2)$, mit $\operatorname{rang} D\Phi(0,0) = 1$. Bezeichne nun $t_0 = \Phi^{-1}(0,0)$. Ferner gilt wegen $\Phi(V) \subset M$ $\Phi_2(t) > 0$ für alle $t \in V \setminus \{t_0\}$ und damit nimmt Φ_2 in t_0 ein lokales Minimum an. Folglich ist $\Phi_2'(t_0) = 0$ und wir erhalten

$$0 = \Phi_2'(t_0) = \lim_{h\to 0} \frac{\Phi_2(t_0+h) - \Phi_2(t_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|\Phi_1(t_0+h)|}{h},$$

woraus unmittelbar

$$\Phi_1'(t_0) = \lim_{h\to 0} \frac{\Phi_1(t_0+h) - \Phi_1(t_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\Phi_1(t_0+h)}{h} = 0$$

folgt. Damit ergibt sich

$$D\Phi(t_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und somit gibt es keine zulässige Karte der vermeintlichen UMF O. ///

Aufgabe 10 ($\star$)**.** Seien $a = (-1,0)$, $b = (1,0)$ und $\lambda > 0$. Die *Cassini–Kurve* wird durch

$$C_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x-a|^2 |x-b|^2 = \lambda^2\}$$

definiert. Bestimmen Sie mit Begründung für welche Parameter λ C_λ eine UMF ist.

Lösung. Es sei $f_\lambda : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f_\lambda(x) = |x-a|^2|x-b|^2 - \lambda^2$. Eine kurze Rechnung zeigt

$$Df_\lambda(x) = \begin{pmatrix} 4x_1(x_1^2 + x_2^2 - 1) & 4x_2(x_1^2 + x_2^2 + 1) \end{pmatrix}.$$

Damit hat Df_λ genau dann nicht vollen Rang, wenn $x_2 = 0$ und $x_1 \in \{0, \pm 1\}$. Jedoch gilt $(\pm 1, 0) \notin C_\lambda$ für alle $\lambda > 0$ und $(0,0) \in C_\lambda$ ausschließlich, falls $\lambda = 1$.

Insgesamt folgt, dass C_λ, $\lambda \in (0,\infty) \setminus \{1\}$, eine eindimensionale $\mathcal{C}^\infty$–UMF ist. ///

Aufgabe 11 ($\star\star$)**.** Seien $M \subset \mathbb{R}^m$ und $N \subset \mathbb{R}^n$ k_m– bzw. k_n–dimensionale $\mathcal{C}^1$–UMF. Zeigen, dass dann $M \times N = \{(x,y) \mid x \in M,\, y \in N\}$ eine $\mathcal{C}^1$–UMF des $\mathbb{R}^{m+n}$ ist. Welche Dimension hat die neue UMF?

Lösung. Seien $V_m \subset \mathbb{R}^{k_m}$, $U_m \subset \mathbb{R}^m$ und $V_n \subset \mathbb{R}^{k_n}$, $U_n \subset \mathbb{R}^n$ offene Mengen, sodass $\Phi : V_m \to U_m \cap M$ und $\Psi : V_n \to U_n \cap N$ Parametrisierungen von M bzw. N sind. Dann ist

$$\Xi : V_m \times V_n \to (U_m \times U_n) \cap (M \times N),$$
$$(x,y) \mapsto (\Phi(x), \Psi(y))$$

bijektiv und homöomorph. Ferner ist Ξ stetig differenzierbar und es gilt

$$D\Xi(x,y) = \begin{pmatrix} D\Phi(x) & 0 \\ 0 & D\Psi(y) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(m+n)\times(k_m+k_n)}.$$

Ferner ist $\operatorname{rang} D\Xi(x,y) = k_m + k_n$ für alle $(x,y) \in M \times N$ und damit ist $M \times N$ eine (k_m+k_n)–dimensionale $\mathcal{C}^1$–UMF des $\mathbb{R}^{m+n}$. ///

Aufgabe 12 ($\star$)**.** Seien $f : (0, \infty) \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und $\gamma : [1, 3] \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$f(x, y, z) = \frac{2y}{x}, \qquad \gamma(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ t^2 \\ \frac{1}{3}t^3 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Bogenlänge von γ sowie $\int_\gamma f(s)\, ds$.

Lösung. Wir erhalten

$$\dot\gamma(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2t \\ t^2 \end{pmatrix}$$

und damit

$$L(\gamma) = \int_1^3 |\dot\gamma(t)|\, dt = \int_1^3 \sqrt{4 + 4t^2 + t^4}\, dt = \int_1^3 t^2 + 2\, dt = 4 + 9 - \frac{1}{3} = \frac{38}{3}.$$

Ferner ist

$$\int_\gamma f(s)\, ds = \int_1^3 f(\gamma(t))|\dot\gamma(t)|\, dt = \int_1^3 t(2 + t^2)\, dt = 8 + \frac{81}{4} - \frac{1}{4} = 28.$$

///

Aufgabe 13 ($\star$)**.** Betrachten Sie die beiden Vektorfelder $v, w : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$v(x, y) = \begin{pmatrix} y \\ x - y \end{pmatrix}, \qquad w(x, y) = \begin{pmatrix} y - x \\ -y \end{pmatrix}$$

und bestimmen Sie das Kurvenintegral entlang

(i) γ_1, welche den Halbkreis von $(0, -1)$ nach $(0, 1)$ mit Radius 1 und Mittelpunkt im Ursprung gegen den Uhrzeigersinn von unten nach oben durchläuft.

(ii) γ_2, welche die Verbindungsstrecke von $(0, -1)$ nach $(1, 0)$ und die Verbindungsstrecke von $(1, 0)$ nach $(0, 1)$ ebenfalls von unten nach oben durchläuft.

Lösung. Wir parametrisieren $\gamma_1 : [-\pi/2, \psi/2] \to \mathbb{R}^2$,

$$\gamma_1(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

und $\gamma_2 = \gamma_{2,1} + \gamma_{2,2}$ mit $\gamma_{2,1} : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma_{2,2} : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$,

$$\gamma_{2,1} = \begin{pmatrix} t \\ t - 1 \end{pmatrix}, \qquad \gamma_{2,2} = \begin{pmatrix} 1 - t \\ t \end{pmatrix}.$$

(i): Wir rechnen

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_1} v(s) \cdot ds &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} v(\gamma_1(t)) \cdot \dot\gamma_1(t)\, dt \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t - \sin t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} dt \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t - \sin^2 t - \sin t \cos t\, dt \\
&= 0
\end{aligned}$$

und weiter

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_2} v(s) \cdot ds &= \int_0^1 v(\gamma_{2,1}(t)) \cdot \dot\gamma_{2,1}(t)\, dt + \int_0^1 v(\gamma_{2,2}(t)) \cdot \dot\gamma_{2,2}(t)\, dt \\
&= \int_0^1 \begin{pmatrix} t - 1 \\ t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} dt + \int_0^1 \begin{pmatrix} t \\ 1 - 2t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} dt \\
&= \int_0^1 t + 1 - 3t\, dt \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Man kann sich das Ergebnis auch überlegen, indem man bemerkt, dass v konservativ ist. Ein mögliches Potential lautet $\Phi(x, y) = xy - y^2/2$.
Für w berechnet man

$$\int_{\gamma_1} w(s) \cdot ds = -\frac{\pi}{2}, \qquad \int_{\gamma_2} w(s) \cdot ds = -1.$$

Prüfen Sie nach, dass $\operatorname{rot} w(x, y) = 1$. ///

Aufgabe 14 ($\star$)**.** Zeigen Sie, dass das Vektorfeld $v : (0, \infty)\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$v(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{z}{x} \\ 1 \\ \ln x \end{pmatrix}$$

wirbelfrei ist und berechnen sie das Kurvenintegral $\int_a^b v(s) \cdot ds$ mit $a = (1, 1, 1)$ und $b = (2, 2, 3)$.

Lösung. Es gilt

$$\nabla \times v(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Da das Defintionsgebiet sternförmig, also insbesondere einfach zusammenhängend ist, existiert ein Potential. Ein solches lautet beispielsweise $\Phi(x, y, z) = z \ln x + y$. Damit ist $\int_a^b v(s) \cdot ds = \Phi(b) - \Phi(a) = 3 \ln 2 + 1$. ///

Aufgabe 15 ($\star$)**.** Es seien $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ und $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$v(x, y, z) = \begin{pmatrix} 3x^2 + 6y \\ 6yz \\ 6z \end{pmatrix}, \qquad \gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ \frac{1}{2}t^2 \\ \frac{1}{3}t^3 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $\nabla \times v$ sowie $\int_\gamma v(s) \cdot ds$.

Lösung. Wir berechnen

$$\nabla \times v(x, y, z) = \begin{pmatrix} -6y \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

Mit

$$\dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \end{pmatrix}$$

folgt

$$\int_\gamma v(s) \cdot ds = \int_0^1 \begin{pmatrix} 6t^2 \\ t^5 \\ 2t^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \end{pmatrix} \; dt = \int_0^1 6t^2 + t^6 + 2t^5 \; dt = 2 + \frac{1}{7} + \frac{1}{3} = \frac{52}{21}.$$

///

Aufgabe 16 ($\star\star$)**.** Es seien das Vektorfeld $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ und die Kurve $\gamma : [0, \pi] \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$v(x, y, z) = \begin{pmatrix} z + y \\ x + z \\ y + x \end{pmatrix}, \qquad \gamma(t) = \begin{pmatrix} 1 - \sin t \\ \frac{\cos t}{1 + \tan^2 t} \\ t \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $\int_\gamma v(s) \cdot ds$.

Lösung. Wir prüfen die Integrabilitätsbedingung

$$\nabla \times v(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 - 1 \\ 1 - 1 \\ 1 - 1 \end{pmatrix} = 0$$

und da der Definitionsbereich einfach zusammenhängend ist, liefert das Poincaré'sche Lemma die Existenz eines Potentials. Scharfes Hinsehen liefert $\Phi(x,y,z) = xy + xz + yz$. Damit ergibt sich mit $\gamma(0) = (1,1,0)$ sowie $\gamma(\pi) = (1,-1,\pi)$, dass

$$\int_\gamma v(s)\cdot ds = \Phi(\gamma(\pi)) - \Phi(\gamma(0)) = \Phi(1,-1,\pi) - \Phi(1,1,0) = -1-1 = -2.$$

///

Aufgabe 17 ($\star$)**.** Zeigen Sie, dass das Vektorfeld $v : A \to \mathbb{R}^2$, $A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,|(x,y) \neq (0,0)\}$,

$$v(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{y}{x^2+y^2} + y \\ x - \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}$$

die Integrabilitätsbedingung erfüllt, jedoch kein Potential besitzt. Woran liegt das?

Lösung. Es ist

$$\frac{\partial v_1}{\partial y}(x,y) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} + 1$$
$$\frac{\partial v_2}{\partial y}(x,y) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} + 1.$$

Allerdings gilt für $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$

$$\int_\gamma v(s)\cdot ds = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 2\sin t \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \, dt = 2\pi.$$

Damit ist v nicht konservativ und besitzt somit kein Potential. Grund dafür ist, dass A nicht einfach zusammenhängend ist. ///

Aufgabe 18 ($\star$)**.** Sei $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$ und $v \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3)$. Zeigen Sie die Identität

$$\nabla \times (fv) = \nabla f \times v + f\ \nabla \times v.$$

Lösung. Sämtliche Summen laufen von 1 bis 3. Wir berechnen mit der Produktregel für $i = 1,2,3$

$$\begin{aligned}(\nabla \times (fv))_k &= \sum_{i,j} \varepsilon_{ijk}\partial_i (fv)_j = \sum_{i,j} \varepsilon_{ijk} v_j \partial_i f + f \sum_{i,j} \varepsilon_{ijk}\partial_i v_j \\ &= \sum_{i,j} \varepsilon_{ijk} (\nabla f)_i v_j + f(\nabla\times v)_k = \left(\nabla f \times v + f\ \nabla \times v\right)_k .\end{aligned}$$

///

Aufgabe 19 ($\star\star$)**.**

(i) Seien $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ und $g,h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass

$$F(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} f(x,t)\, dt$$

stetig differenzierbar ist mit

$$F'(x) = f(x,h(x))h'(x) - f(x,g(x))g'(x) + \int_{g(x)}^{h(x)} \partial_x f(x,t)\, dt.$$

Hinweis: Die Abbildung $(x,y,z) \mapsto \int_y^z f(x,t)\,dt$ is für eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ebenfalls stetig.

(ii) Berechnen Sie die Ableitung von

$$F(x) = \int_{-x}^{x} \frac{1-e^{-xt}}{t}\, dt.$$

Lösung. (i): Der Beweis ist eine einfache Anwendung des Satzes über parameterabhängige Integrale. Wir betrachten zunächst die Funktion $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$G(x,y,z) = \int_y^z f(x,t)\, dt$$

und bemerken, dass nach dem Hauptsatz der Differential– und Integralrechnung

$$\partial_y G(x,y,z) = -f(x,y), \qquad \partial_z G(x,y,z) = f(x,z)$$

gilt. Nach dem Satz über parameterabhängige Integrale ist

$$\partial_x G(x,y,z) = \int_y^z \partial_x f(x,t)\, dt.$$

Mit dem Hinweis schließen wir, dass alle partiellen Ableitungen von G auf $\mathbb{R}^3$ stetig sind und damit ist G total differenzierbar. Mit der Kettenregel folgt

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{d}{dx} G(x,g(x),h(x)) = \begin{pmatrix} \partial_x G(x,g(x),h(x)) & \partial_y G(x,g(x),h(x)) & \partial_z G(x,g(x),h(x)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ g'(x) \\ h'(x) \end{pmatrix} \\ &= \int_{g(x)}^{h(x)} \partial_x f(x,t)\, dt - f(x,g(x))g'(x) + f(x,h(x))h'(x). \end{aligned}$$

(ii): Wir überprufen, dass $f(x,t) = (1-e^{-xt})/t$ stetig differenzierbar ist. Zunächst bemerken wir, dass f stetig durch x bei $t=0$ fortgesetzt werden kann. Das können Sie sich mit L'Hospital schnell überlegen. Ferner ist f unendlich oft differenzierbar, da wir die Funktion in eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R=\infty$ entwickeln können:

$$\frac{1}{t}\left(1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-xt)^n}{n!}\right) = -\frac{1}{t}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-xt)^n}{n!} = x\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-xt)^n}{(n+1)!}.$$

Wir wenden Punkt (i) an und erhalten

$$F'(x) = \int_{-x}^{x} e^{-xt}\, dt - \frac{1-e^{x^2}}{x} + \frac{1-e^{-x^2}}{x} = -\frac{e^{-x^2}-e^{x^2}}{x} - \frac{1-e^{x^2}}{x} + \frac{1-e^{-x^2}}{x} = 2\frac{e^{x^2}-e^{-x^2}}{x}$$

///