FERIENKURS ANALYSIS 2 FÜR PHYSIKER

JOHANNES R. KAGER UND JULIAN SIEBER

Aufgabenblatt 3

Aufgabe 1 ($\star\star$). Wir betrachten die sogenannte *Astroide*:

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}, \qquad \gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos^3 t \\ \sin^3 t \end{pmatrix}.$$

(i) Begründen Sie, dass γ stetig differenzierbar ist und geben Sie $\dot{\gamma}$ an.
(ii) Bestimmen Sie die Bogenlänge von γ.
(iii) Berechnen Sie alle Maxima und Minima der Funktion $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$, $f(t) = |\gamma(t)|$.
(iv) Ist γ regulär?

Aufgabe 2 ($\star$). Bestimmen Sie die Bogenlänge der *Neilschen Parabel*

$$\gamma : [-1, 1] \to \mathbb{R}^2, \qquad \gamma(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}$$

bezüglich den nachfolgenden Normen:

(i) der gewöhnlichen euklidischen Norm,
(ii) der 1–Norm: $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$,
(iii) der Maximumsnorm: $\|x\|_\infty = \max\limits_{i=1,\dots,n} |x_i|$.

Aufgabe 3 ($\star$). Parametrisieren Sie die *Kettenlinie*

$$\gamma : [0, \infty) \to \mathbb{R}^2, \qquad \gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ \frac{1}{2}\cosh(2t) \end{pmatrix}$$

nach Bogenlänge.

Aufgabe 4 ($\star$). Berechnen Sie für $R > 0$ die Länge von $\gamma : [0, \pi/2] \to \mathbb{R}^2$,

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} 2R\cos^3 t \\ 2R\sin^3 t \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 5 ($\star$). Sei $c > 0$ und $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = e^{(c+i)t}$.

(i) Schreiben Sie γ als Kurve im $\mathbb{R}^2$ und skizzieren Sie diese.
(ii) Sei $a < b$ und $L(a, b)$ die Länge der Kurve $\gamma\big|_{[a,b]}$. Berechnen Sie $L(a, b)$ und zeigen Sie, dass $\lim\limits_{a\to-\infty} L(a, 0)$ existiert.

Aufgabe 6 ($\star$). Wir betrachten die *Kardioide*, welche durch

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}, \qquad \gamma(t) = \begin{pmatrix} (1 + \cos t)\cos(t) \\ (1 + \cos t)\sin t \end{pmatrix}$$

definiert ist.

(i) Bestimmen Sie die Punkte, in welchen die Ableitung der Kardioide verschwindet.
(ii) Skizzieren Sie γ.
(iii) Berechnen Sie die Länge von γ.

Hinweis: Die Identität $2(1 + \cos t) = 4\cos^2(t/2)$ könnte bei der Bearbeitung der letzten Teilaufgabe hilreich sein.

Aufgabe 7 ($\star$). (i) Parametrisieren Sie die *Schraubenlinie*

$$\gamma : [0, \infty) \to \mathbb{R}^3, \qquad \gamma(t) = \begin{pmatrix} r\cos t \\ r\sin t \\ ht \end{pmatrix}$$

für feste $r, h > 0$ auf Bogenlänge.

(ii) Finden Sie eine stetig differenzierbare Funktion $f : U \to \mathbb{R}^2$, $U \subset \mathbb{R}^3$ offen, mit
$$\gamma(0, 6\pi) = \{x \in \mathbb{R} \,|\, f(x) = 0\}.$$
Folgern Sie damit, dass $\gamma(0, 6\pi)$ eine eindimensionale $\mathcal{C}^1$–UMF ist.

Aufgabe 8 ($\star\star$)**.** Für $a > 0$ setzen wir $I = (-a, a)$. Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt *gerade*, falls $f(-x) = f(x)$ für alle $x \in I$ und *ungerade*, falls $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in I$. Zeigen Sie, dass die Taylorpolynome im Entwicklungspunkt 0 einer geraden (ungeraden) Funktion f ebenfalls gerade (ungerade) sind. (Die Existenz sei hierbei vorausgesetzt.)

Aufgabe 9 ($\star\star$)**.** Prüfen Sie, welche der nachfolgenden Mengen $\mathcal{C}^1$–UMF sind und bestimmen Sie ggf. deren Dimension. Beweisen Sie Ihre Aussagen.
(i) $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 1\}$
(ii) $N = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ x^2 + y^2 = x\}$
(iii) $O = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y = |x|\}$

Aufgabe 10 ($\star$)**.** Seien $a = (-1, 0)$, $b = (1, 0)$ und $\lambda > 0$. Die *Cassini–Kurve* wird durch
$$C_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x - a|^2 |x - b|^2 = \lambda^2\}$$
definiert. Bestimmen Sie mit Begründung für welche Parameter λ C_λ eine UMF ist.

Aufgabe 11 ($\star\star$)**.** Seien $M \subset \mathbb{R}^m$ und $N \subset \mathbb{R}^n$ k_m– bzw. k_n–dimensionale $\mathcal{C}^1$–UMF. Zeigen, dass dann $M \times N = \{(x, y) \,|\, x \in M,\ y \in N\}$ eine $\mathcal{C}^1$–UMF des $\mathbb{R}^{m+n}$ ist. Welche Dimension hat die neue UMF?

Aufgabe 12 ($\star$)**.** Seien $f : (0, \infty) \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und $\gamma : [1, 3] \to \mathbb{R}^3$ definiert durch
$$f(x, y, z) = \frac{2y}{x}, \qquad \gamma(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ t^2 \\ \frac{1}{3}t^3 \end{pmatrix}.$$
Berechnen Sie die Bogenlänge von γ sowie $\int_\gamma f(s)\, ds$.

Aufgabe 13 ($\star$)**.** Betrachten Sie die beiden Vektorfelder $v, w : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,
$$v(x, y) = \begin{pmatrix} y \\ x - y \end{pmatrix}, \qquad w(x, y) = \begin{pmatrix} y - x \\ -y \end{pmatrix}$$
und bestimmen Sie das Kurvenintegral entlang
(i) γ_1, welche den Halbkreis von $(0, -1)$ nach $(0, 1)$ mit Radius 1 und Mittelpunkt im Ursprung gegen den Uhrzeigersinn von unten nach oben durchläuft.
(ii) γ_2, welche die Verbindungsstrecke von $(0, -1)$ nach $(1, 0)$ und die Verbindungsstrecke von $(1, 0)$ nach $(0, 1)$ ebenfalls von unten nach oben durchläuft.

Aufgabe 14 ($\star$)**.** Zeigen Sie, dass das Vektorfeld $v : (0, \infty)\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,
$$v(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{z}{x} \\ 1 \\ \ln x \end{pmatrix}$$
wirbelfrei ist und berechnen sie das Kurvenintegral $\int_a^b v(s) \cdot ds$ mit $a = (1, 1, 1)$ und $b = (2, 2, 3)$.

Aufgabe 15 ($\star$)**.** Es seien $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ und $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^3$ definiert durch
$$v(x, y, z) = \begin{pmatrix} 3x^2 + 6y \\ 6yz \\ 6z \end{pmatrix}, \qquad \gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ \frac{1}{2}t^2 \\ \frac{1}{3}t^3 \end{pmatrix}.$$
Berechnen Sie $\nabla \times v$ sowie $\int_\gamma v(s) \cdot ds$.

Aufgabe 16 ($\star\star$)**.** Es seien das Vektorfeld $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ und die Kurve $\gamma : [0, \pi] \to \mathbb{R}^3$ definiert durch
$$v(x, y, z) = \begin{pmatrix} z + y \\ x + z \\ y + x \end{pmatrix}, \qquad \gamma(t) = \begin{pmatrix} 1 - \sin t \\ \frac{\cos t}{1 + \tan^2 t} \\ t \end{pmatrix}.$$
Berechnen Sie $\int_\gamma v(s) \cdot ds$.

Aufgabe 17 ($\star$)**.** Zeigen Sie, dass das Vektorfeld $v : A \to \mathbb{R}^2$, $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|(x, y) \neq (0, 0)\}$,

$$v(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{y}{x^2+y^2} + y \\ x - \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}$$

die Integrabilitätsbedingung erfüllt, jedoch kein Potential besitzt. Woran liegt das?

Aufgabe 18 ($\star$)**.** Sei $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ und $v \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$. Zeigen Sie die Identität

$$\nabla \times (fv) = \nabla f \times v + f\ \nabla \times v.$$

Aufgabe 19 ($\star\star$)**.**

(i) Seien $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ und $g, h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass

$$F(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, t)\ dt$$

stetig differenzierbar ist mit

$$F'(x) = f(x, h(x))h'(x) - f(x, g(x))g'(x) + \int_{g(x)}^{h(x)} \partial_x f(x, t)\ dt.$$

Hinweis: Die Abbildung $(x, y, z) \mapsto \int_y^z f(x, t)\ dt$ is für eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ebenfalls stetig.

(ii) Berechnen Sie die Ableitung von

$$F(x) = \int_{-x}^{x} \frac{1 - e^{-xt}}{t}\ dt.$$