FERIENKURS ANALYSIS 2 FÜR PHYSIKER

JOHANNES R. KAGER UND JULIAN SIEBER

Lösungsvorschlag zum Aufgabenblatt 2

Aufgabe 1 ($\star$). Bestimmen Sie für die Funktion $f(x,y) = y^4 - 3xy^2 + x^3$

(a) eine Funktion, deren Graph Tangentialebene an den Graph G_f bei $(0,1)$ ist,
(b) eine quadratische Funktion, die mit f bis zu den zweiten Ableitungen im Punkt (x_0, y_0) übereinstimmt,
(c) lokale und globale Extremstellen und Sattelpunkte.

Überlegen Sie sich außerdem, wie Sie das Maximum und Minimum der Funktion für $(x,y) \in [-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}] \times [-2,2]$ suchen würden. Die Berechnung des Ergebnisses ist nicht notwendig (der ähnliche Ansatz wird Sie in A.3 erneut begegnen).

Lösung.

(a) Die Tangentialebene muss die selben partiellen Ableitungen haben, wie die Funktion f an dem betrachteten Punkt $(0,1)$. Abgeleitet und eingesetzt sind das: $\nabla f(0,1) = (-3y^2 + 3x^2, 4y^3 - 6xy)(0,1) = (-3,4)$. Also ergibt sich als Tangentialebene

$$T(x,y) = f(0,1) + \nabla f(0,1) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y-1 \end{pmatrix} = 1 - 3x + 4(y-1)$$

.

(b) Wir verwenden das Taylorpolynom 2. Ordnung mit Entwicklungspunkt (x_0, y_0), welches aus gestriger Vorlesung bekannt ist:

$$Q(x,y) = f(x_0,y_0) + \nabla f(x_0,y_0) \cdot \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x-x_0 & y-y_0 \end{pmatrix} H_f(x_0,y_0) \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix}$$

mit der Hessematrix

$$H_x(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & -6y \\ -6y & 12y^2 - 6x \end{pmatrix}.$$

und dem Gradienten wie in a). Der Vollständigkeit halber geben wir das ausmultiplizierte Ergebniss an: $Q(x,y) = 3x_0x^2 - 3x_0^2x + x_0^3 + 6y_0^2y^2 - 8y_0^3y + 3y_0^4$.

(c) Die stationären Punkte sind gegeben durch $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} -3y^2 + 3x^2 \\ 4y^3 - 6xy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Die erste Gleichung ist gleichbedeutend mit $y = x$ oder $y = -x$. Die zweite Gleichung $y(2y^2 - 3x) = 0$ ist genau dann erfüllt, wenn $y = 0$ oder $x = \frac{2}{3}y^2$, wegen $x^2 = y^2$ also $1 = \frac{2}{3}x$, bzw. $x = \frac{3}{2}$. Die drei Lösungen (x,y) dieses nichtlinearen Gleichungssystems sind also $P_1 = (0,0), P_2 = (\frac{3}{2}, \frac{3}{2}), P_3 = (\frac{3}{2}, -\frac{3}{2})$.

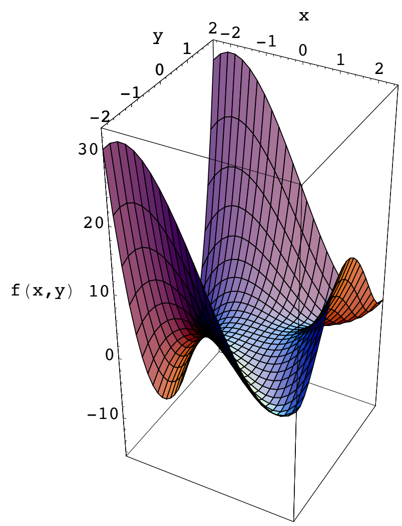


ABBILDUNG 1. Funktion f von Aufgabe 1

Wir betrachten nun für jeden Punkt einzeln die Hessematrix: $P_1 H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Mit dieser Hessematrix ist keine Aussage über die Art des stationären Punktes möglich. Es gilt aber $f(x,0) = x^3$, somit ist P_1 ein Sattelpunkt.
$P_2 H_f(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}) = \begin{pmatrix} 9 & -9 \\ -9 & 18 \end{pmatrix}$. Die Matrix ist positiv definit, da beide Eigenwerte positiv sind. Dies erhält man durch stures Ausrechnen der Eigenwerte mit $\det(H_f(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}) - \lambda \mathbb{1}) = 0$, oder durch Anwenden des Satzes von Hurwitz-Sylvester. Bei P_2 haben wir also ein lokales Minimum.
P_3 : f ist symmetrisch bezüglich y, somit ist auch bei P_3 ein lokales Minimum. f besitzt keine globalen Extremwerte, da zum Beispiel $f(x,0) = x^3$ offenbar nach oben und unten unbeschränkt ist.

Da f als Polynom stetig ist, gibt es in dem abgeschlossenen Rechteck sowohl ein absolutes Maximum, als auch ein absolutes Minimum. Zunächst lässt sich das Innere des Rechtecks betrachten. Wir kontrollieren dazu einfach, welche der in c) berechneten Punkte in dieser Fläche liegen und merken uns die Werte der lokalen Minima oder Maxima. Zusätzlich zum Inneren muss auch der Rand des Rechtecks betrachtet werden. Dazu kontrollieren wir f eingeschränkt auf jede Kante einzeln und zusätzlich noch die vier Eckpunkte des Rechtecks. Nun vergleicht man die Funktionswerte an den gefundenen Punkten und wählt den größten bzw. kleinsten als Maximum und Minimum. ///

Aufgabe 2 ($\star\star$)**.** Bestimmen Sie die globalen Extrema der folgenden Funktionen. Finden Sie dazu jeweils die kritischen Punkte und klassifizieren Sie diese anhand der Hesse Matrix.

(a) $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - x$
(b) $f(x,y) = \sin(x) + xy^2$

Lösung.

(a) $\nabla f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 2x_0 - 1 \\ 4y_0 \end{pmatrix} \overset{!}{=} 0 \iff 2x_0 - 1 \overset{!}{=} 0 \wedge 4y_0 \overset{!}{=} 0 \Rightarrow x_0 = \frac{1}{2} \wedge y_0 = 0,$
d.h. $(x_0, y_0) = (\frac{1}{2}, 0)$ ist ein kritischer Punkt, hier könnte ein Extremum vorliegen. Dazu betrachten wir die Hesse Matrix

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Die Eigenwerte einer Diagonalmatrix entsprechen den Einträgen auf der Diagonale, d.h. H_f hat nur strikt positive Eigenwerte und ist somit positiv definit. An Punkt $(\frac{1}{2}, 0)$ nimmt f somit zumindest ein isoliertes lokales Minimum an. Da $\lim_{|(x,y)| \to \infty} f(x, y) = \infty$ gilt, folgt, dass $(\frac{1}{2}, 0)$ das globale Minimum ist und es kein globales Maximum gibt.

(b) $\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} \cos x + y^2 \\ 2xy \end{pmatrix} \overset{!}{=} 0$. Die untere Zeile $2xy \overset{!}{=} 0$ erfordert eine Fallunterscheidung:

$x = 0:$ Dann gilt $\cos x + y^2 = 1 + y^2 \overset{!}{=} 0$, was zu keiner reelen Lösung führt.

$y = 0:$ Dann gilt $\cos x + y^2 = \cos x \overset{!}{=} 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. Wir betrachten nun die Hesse Matrix:

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} -\sin x & 2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix} \overset{(y=0)}{=} \begin{pmatrix} -\sin x & 0 \\ 0 & 2x \end{pmatrix}$$

Mit der Menge an möglichen Werte, die x annehmen kann $\left\{x = \frac{\pi}{2} + k\pi | k \in \mathbb{Z}\right\}$, kann H_f immer noch pos. definit, neg. definit oder indefinit sein. Es gilt dann nämlich $-\sin x \equiv (-1)^{k+1}$. Wir brauchen eine weitere Fallunterscheidung:

$x > 0:$ $2x$ ist strikt positiv, $-\sin x$ ist nur für ungerade k positiv. Also H_f positiv definit, falls k ungerade; H_f indefinit, falls k gerade.
- isoliertes lokales Minimum bei $x = \frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi,\ k \in \mathbb{N}_0$
- Sattelpunkt bei $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{N}_0$

$x < 0:$ $2x$ ist strikt negativ, $-\sin x$ ist nur für gerade k negativ. Also H_f negativ definit, falls k gerade; H_f indefinit, falls k ungerade.
- isoliertes lokales Maximum bei $x = -\frac{\pi}{2} - 2k\pi,\ k \in \mathbb{N}_0$
- Sattelpunkt bei $x = -\frac{\pi}{2} - (2k+1)\pi,\ k \in \mathbb{N}_0$

///

Aufgabe 3 ($\star\star$)**.**

(a) Wo besitzt die Funktion $f : [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x_1, x_2) := 3x_1^2 - 2(x_2 + 1)x_1 + 3x_2 - 1$$

globale Extremstellen? (Tipp: denken Sie auch an den Rand der Definitionsmenge!)

(b) Wo besitzt die Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$g(x_1, x_2) := x_1^3 e^{x_1 - x_2}$$

globale bzw. lokale Extremstellen?

Geben Sie jeweils an, ob es sich bei den Extremstellen um Maxima, Minima oder Sattelpunkte handelt.

Lösung.

(a) Für Punkte innerhalb des Quadrates $[0,1]\times[0,1]$, also auf der offenen Menge $(0,1)\times(0,1)$, können wir die Methode aus der Vorlesung verwenden:

$$\nabla f(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} 6x_1 - 2x_2 - 2 \\ -2x_1 + 3 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \nabla f(x_1,x_2) = 0 \iff x_1 = \frac{3}{2}, x_2 = \frac{2}{7}.$$

Da nun der Punkt $(\frac{3}{2},\frac{2}{7}) \notin (0,1)\times(0,1)$, die Menge $[0,1]\times[0,1]$ jedoch kompakt ist, müssen Minimum und Maximum am Rand liegen. Wir betrachten also folgende 4 Fälle:

(a) $f(0,x_2) = 3x_2 - 1$: Also $\partial_2 f(0,x_2) = 3 > 0$, daher liegt der maximale Wert auf der Menge $\{(0,x_2)|x_2 \in [0,1]\}$ bei $f(0,1) = 2$ und der minimale Wert bei $f(0,0) = -1$.

(b) $f(1,x_2) = x_2$: Also $\partial_2 f(1,x_2) = 1 > 0$, daher liegt der maximale Wert auf der Menge $\{(1,x_2)|x_2 \in [0,1]\}$ bei $f(1,1) = 1$ und der minimale Wert bei $f(1,0) = 0$.

(c) $f(x_1,0) = 3x_1^2 - 2x_1 - 1$: Also $\partial_1 f(x_1,0) = 6x_1 - 2 = 0 \iff x_1 = \frac{1}{3}$ und $\partial 1^2 f(x_1,0) = 6 > 0$, daher liegt der minimale Wert auf der Menge $\{(x_1,0)|x_1 \in [0,1]\}$ bei $f(\frac{1}{3},0) = -\frac{4}{3}$ und der maximale Wert bei $f(1,0) = 2$ (da $f(0,0) = -1$).

(d) $f(x_1,1) = 3x_1^2 - 4x_1 + 2$: Daher $\partial_1 f(x_1,1) = 6x_1 - 4 \overset{!}{=} 0 \iff x_1 = \frac{2}{3}$ und $\partial 1^2 f(x_1,1) = 6 > 0$, daher liegt der minimale Wert auf der Menge $\{(x_1,1)|x_1 \in [0,1]\}$ bei $f(\frac{2}{3},0) = -\frac{4}{3}$ und der maximale Wert bei $f(0,1) = 2$ (da $f(1,1) = 1$).

Vergleicht man nun alle minimalen und maximalen Werte dieser Teilbereiche miteinander, schließt man, dass ein globales Maximum von f an der Stelle $(0,1)$ mit $f(0,1) = 2$ und ein globales Minimum an der Stelle $(\frac{1}{3},0)$ mit $f(\frac{1}{3},0) = -\frac{4}{3}$ vorliegen.

b) Wegen $\lim\limits_{x_1\to\infty} g(x_1,0) = \infty$ sowie $\lim\limits_{x_2\to\infty} g(-1,x_2) = -\infty$ existieren weder ein globales Minimum, noch ein globales Maximum. Für lokale Extremstellen betrachten wir

$$\nabla g(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} x_1^3 + 3x_1^2 \\ -x_1^3 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{x_1 - x_2}$$
$$\text{und} \quad \nabla g(x_1,x_2) = 0 \iff x_1 = 0, x_2 \in \mathbb{R}.$$

Das heißt die Menge der kritischen Punkte ist durch $\{(0,x_2) : x_2 \in \mathbb{R}\}$ gegeben. Betrachte die Hessematrix:

$$H_g(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} x_1^3 + 6x_1^2 + 6x_1 & -x_1^3 - 3x_1^2 \\ -x_1^- 3x_1^2 & x_1^3 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{x_1 - x_2}$$
$$\text{und} \quad H_g(0,x_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Diese ist in jedem kritischen Punkt semidfefinit, daher bekommen wir über die Sätze aus der Vorlesung keine Informationen über lokale Extremstellen. Wir müssen also anders vorgehen:

Angenommen es existiert ein lokales Maximum $(0,\tilde{x}_2)$, dann existiert ein $r > 0$, sodass für alle Punkte $x' \in B_r(0,\tilde{x}_2)$ gilt, dass $g(x_1',x_2') \leq g(0,\tilde{x}_2) = 0$. Betrachte jedoch den Punkt $(\frac{r}{2},\tilde{x}_2) \in B_r(0,\tilde{x}_2)$. Für diesen gilt $g(\frac{r}{2},\tilde{x}_2) = \left(\frac{r}{2}\right)^3 \mathrm{e}^{\frac{r}{2} - \tilde{x}_2} > 0$, was einen Widerspruch zur Annahme der Existenz eines lokalen Maximums darstellt.

Angenommen es existiert ein lokales Maximum $(0, \tilde{x}_2)$, dann erhält man den Widerspruch analog zu oben mit dem Punkt $(-\frac{r}{2}, \tilde{x}_2)$.

Wir schließen, dass die Funktion weder lokale noch globale Minima oder Maxima besitzt und die Menge $\{(0, x_2) | x_2 \in \mathbb{R}\}$ aus Sattelpunkten besteht.

Anstatt des Widerspruchbeweises kann auch einfach $f(x_1, x_2 + x_1)$ betrachtet werden. Dann haben wir $f(x_1, x_2 + x_1) = x_1^3 \mathrm{e}^{-x_2}$. Wählt man nun ein fixiertes x_2 bleibt eine Funktion der Art ax_1^3 übrig, welche in $x_1 = 0$ einen Sattelpunkt besitzt, somit sind f an den Punkten $(0, x_2)$ lauter Sattelpunkte besitzt.

///

Aufgabe 4 ($\star\star$)**.** Finden Sie jene Punkte auf der Kreislinie um den Punkt $(2, 0)$ mit Radius $\frac{\sqrt{5}}{2}$, welche den weitesten und kürzesten euklidischen Abstand zum Punkt $(1, 2)$ haben. Verwenden Sie dafür die Methode der Lagrangschen Multiplikatoren.

Lösung. Die Aufgabe kann folgendermaßen ausgedrückt werden: Finde Extrema der Funktion $f(x, y) = |(x, y) - (1, 2)|^2 = (x - 1)^2 + (y - 2)^2$ (euklidischer Abstand zum Punkt $(1, 2)$) unter der Nebenbedingung $g(x) = (x - 2)^2 + y^2 - \frac{5}{4} = 0$ (was den Kreis mit Radius $\sqrt{\frac{5}{4}}$ um den Punkt $(2, 0)$ beschreibt).

Die Methode der Lagrangemultiplikatoren fordert uns nun auf, die Gleichung $\nabla f = -\lambda \nabla g$ zu lösen. Es ist

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 2(x-1) \\ 2(y-2) \end{pmatrix} = -\lambda \begin{pmatrix} 2(x-1) \\ 2y \end{pmatrix} = -\lambda \nabla g$$

Zusammen mit $g(x, y) = 0$ führt dies auf das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2(x-1) + 2\lambda(x-1) &= 0 \\ 2(y-2) + 2\lambda y &= 0 \\ \left(x^2 - 2\right)^2 + y^2 - \frac{5}{4} &= 0. \end{aligned}$$

Die ersten beiden Gleichungen implizieren

$$x = \frac{2\lambda + 1}{\lambda + 1}, \quad y = \frac{2}{\lambda + 1}$$

und wir bemerken, dass $\lambda \neq 1$ ist. Einsetzen dieser Gleichungen in die dritte Gleichung führt zu

$$\left(\frac{-1}{\lambda + 1}\right)^2 + \left(\frac{2}{\lambda + 1}\right)^2 = \frac{5}{4},$$

was die beiden Lösungen $\lambda = -3$ und $\lambda = 1$ hat (durchrechnen!). Wir erhalten somit als mögliche (aber noch nicht bestätigte) Extremalstellen

$$(x^{(1)}, y^{(1)}) = (\frac{5}{2}, -1) \quad \text{und} \quad (x^{(2)}, y^{(2)}) = (\frac{3}{2}, 1)$$

Diese Punkte müssen aber die Extremwerte sein, denn wir wissen, dass die stetige Funktion auf der kompakten Menge, welche durch die Nebenbedingung beschrieben wird (also die Kreislinie), ein Maximum und ein Minimum annehmen muss. Da nun $f(x^{(1)}, y^{(1)}) = \frac{45}{4}$ und $f(x^{(2)}, y^{(2)}) = \frac{5}{4}$ gilt, hat f bei $x^{(1)}, y^{(1)}$ ein Maximum und bei $x^{(2)}, y^{(2)}$ ein Minimum unter dem Zwang g. ///

Aufgabe 5 ($\star\star\star$)**.** Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische Matrix, d.h. $A^T = A$. Bestimmen Sie das Maximum und das Minimum der Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := x^T \cdot Ax$ auf der Kugeloberfläche $\{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| = 1\}$.

Lösung. Wir suchen offensichtlich ein Extrema der Funktion $f(x)$ unter der Nebenbedingung $g(x) = 0$ mit $g(x) := 1 - |x|^2 = 1 - \sum_{i=1}^n x_i^2$. (Das Quadrat der Norm nur, damit die zum Ableiten lästige Wurzelfunktion wegfällt). Wir verwenden daher die Methode der Lagrange Multiplikatoren und stellen folgende Gleichung auf: $\nabla f(x) + \lambda \nabla g(x) = 0$. Es gilt

$$\nabla g(x) = -\begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \\ \vdots \\ 2x_n \end{pmatrix} = -2x.$$

Für die partielle Ableitung von $f(x)$ nach x_k gilt wegen der Symmetrie der Matrix A (also $a_{ij} = a_{ji}$) folgendes:

$$\partial_k f(x) = \partial_k (x^T \cdot Ax) = \partial_k \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j \right) = \sum_{i=1}^n (a_{ik} x_i + a_{ki} x_i) = 2 \sum_{i=1}^n a_{ik} x_i = 2(Ax)_k$$

Somit gilt:

$$2(Ax)_k - \lambda 2x_k = 2((A - \lambda \mathbb{1})x)_k \overset{!}{=} 0, \quad k = 1, \ldots, n$$

Wir sehen also, dass als kritische Punkte nur normierte Eigenvektoren auftreten können, da $(A - \lambda)x = 0$ und $|x| = 1$ gelten muss.
Da die Kugeloberfläche kompakt ist, existieren Minima und Maxima. Außerdem erhalten wir für $x \in \mathbb{R}^n$ mit $|x| = 1$

$$\lambda_{\min} \le x^T Ax \le \lambda_{\max}$$

wobei $\lambda_{\min}$ bzw. $\lambda_{\max}$ für den kleinsten bzw. größten Eigenwert von A steht. Das bedeutet, dass das Minimum von jedem normierten Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_{\min}$ und das Maximum von jedem Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_{\max}$ angenommen wird. ///

Aufgabe 6 ($\star$)**.** Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x) := \begin{pmatrix} x_1 + e^{x_2} \\ x_2 + e^{x_3} \\ x_3 + e^{x_1} \end{pmatrix}$.

(a) Für welche $x \in \mathbb{R}^3$ ist $D_f(x)$ invertierbar?
(b) Ist f injektiv?

Lösung.

(a) Die Jacobi-Matrix von f lautet

$$\begin{pmatrix} 1 & e^{x_2} & 0 \\ 0 & 1 & e^{x_2} \\ e^{x_1} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ihre Determinante hat den Wert $1 + e^{x_1} e^{x_2} e^{x_3}$, ist also stets positiv und insbesondere $\neq 0$. Daher ist $D_f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^3$ invertierbar.

(b) Seien $x, y \in \mathbb{R}^3$ mit $f(x) = f(y)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} x_1 + e^{x_2} &= y_1 + e^{y_2} \\ x_2 + e^{x_3} &= y_2 + e^{y_3} \\ x_3 + e^{x_1} &= y_3 + e^{y_1}. \end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned} x_1 - y_1 &= e^{y_2} - e^{x_2} \\ x_2 - y_2 &= e^{y_3} - e^{x_3} \\ x_3 - y_3 &= e^{y_1} - e^{x_1}. \end{aligned}$$

Nehmen wir einmal an, es sei $x_1 > y_1$. Dann folgt aus der dritten Gleichung $x_3 < y_3$; daraus folt mit der zweiten Gleichung nun $x_2 > y_2$ und, wenn wir nun die erste Gleichung heranziehen folgt $x_1 < y_1$ im Widerspruch zur Annahme.
Mit der selben Argumentation — jeweils auch für das umgekhrte Vorzeichen — für alle drei Komponenten belibt schließlich nur $x_1 = y_1, x_2 = y_2$ und auch $x_2 = y_3$. Folglich ist f injektiv.

///

Aufgabe 7 ($\star\star$)**.** Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) := x^2(1-x^2)-y^2$. Wir betrachten die Menge

$$M := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | f(x, y) = 0\right\}$$

der Nullstellen von f.

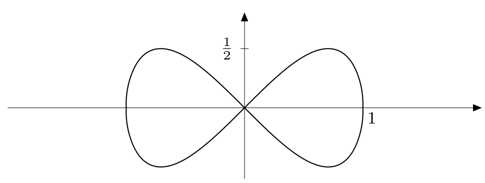


ABBILDUNG 2. Menge M

(a) Bestimmen Sie grad f. An welchen $(x, y) \in M$ gilt grad $f = 0$?
(b) Es sei $a := (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{4})$. Geben Sie eine offene Umgebung U von a und eine stetig differenzierbare Funktion $g : I \to \mathbb{R}$ mit geeignetem $I \subseteq \mathbb{R}$ an derart, dass gilt:
$$M \cap U = \{(x, g(x)) | x \in I\}.$$
(c) Nun sei $b := (1, 0)$. Geben Sie eine offene Umgebung V von b und eine stetig differenzierbare Funktion $h : J \to \mathbb{R}$ mit geeignetem $J \subseteq \mathbb{R}$ an derart, dass gilt:
$$M \cap V = \{(h(y), y) | y \in J\}.$$
(d) Skizzieren Sie M, U, V sowie die Graphen von g und h. Sie können dazu obige Abbildung als Vorlage nutzen.

Lösung.

(a) Es ist grad $f = (-4x^3 + 2x, -2y)$, der Gradient verschwindet also für $(x, y) = (0, 0)$ und $(x, y) = (\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$. Allerdings liegt nur ersteres auch in M, was durch einfaches Einsetzen in f überprüfbar ist.

(b) In einer Umgebung des Punktes a können wir die Gleichung $f(x, y) = 0$ nach y auflösen. Es gilt

$$x^2(1-x^2) - y^2 = 0 \iff y^2 = x^2(1-x^2) \iff y = \sqrt{x^2(1-x^2)}$$

dort, wo y nicht negativ ist. Die Funktion $t \mapsto \sqrt{t}$ ist für $t \in \,]0, \infty[$ stetig differenzierbar. Eine gesuchte Funktion g erhalten wir also durch

$$g : (0, 1) \to \mathbb{R}, \ \ g(x) := \sqrt{x^2(1-x^2)}.$$

Dann gilt etwa mit der offenen Menge $U := (0, \infty) \times (0, \infty)$

$$M \cap U = \{(x, y) | y = g(x)\}$$

wie gewünscht.

(c) In einer Umgebung von $b := (1, 0)$ können wir nach x auflösen. Wenn wir etwa die Umgebung $V := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x > \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$ betrachten, so ist in $M \cap V$ jedem Wert von x eindeutig ein Wert von y zugeordnet. Dort gilt

$$x^2(1-x^2) - y^2 = 0 \iff x = \sqrt{\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{1-4y^2}}.$$

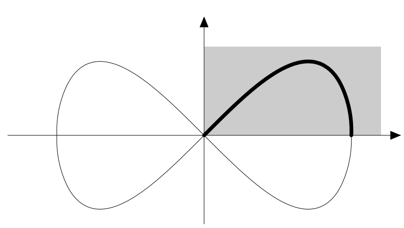
Eine gesuchte Funktion h erhalten wir durch

$$h : \left(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right), \ \ h(y) := \sqrt{\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{1-4y^2}}.$$

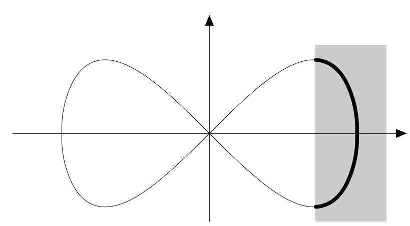
Diese ist stetig differenzierbar und es gilt

$$M \cap V = \{(x, y) | x = h(y)\}$$

(d)



In U kann man die Gleichung $f(x, y) = 0$ nach y auflösen.



In V kann man die Gleichung $f(x, y) = 0$ nach x auflösen.

///

Aufgabe 8 ($\star\star\star$)**.** Die Abbildung $E : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sei gegeben durch

$$E(x, y) := \begin{pmatrix} e^x \cos y \\ e^x \sin y \end{pmatrix}.$$

(a) Skizzieren Sie die Bilder der achsenparallelen Geraden unter E und bestimmen Sie die Bildmenge $E(\mathbb{R}^2)$.

(b) Zeigen Sie, dass $D_E(x,y)$ invertierbar ist für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, aber E nicht injektiv ist. Sind damit die Bedingungen des Satzes über die Umkehrfunktion erfüllt?

(c) Nun seien $a := (0, \frac{\pi}{3})$ und $b := E(a)$. Bestimmen Sie die stetige Umkehrabbildung von E, die eine offene Umgebung von b auf eine offene Umgebung von a abbildet.

Lösung.

(a) Für festes $y_0 \in \mathbb{R}$ gilt $E(x, y_0) = \mathrm{e}^x \begin{pmatrix} \cos y_0 \\ \sin y_0 \end{pmatrix}$.

Die Bildmenge der reellen Exponentialfunktion sind genau die positiven reellen Zahlen. Das Bild einer zur x-Achse parallelen Geraden mit $y = y_0$ ist also eine "Halbgerade" ausgehend vom Nullpunkt (der Nullpunkt selbst gehört aber nicht dazu!), deren Richtung durch

$$\begin{pmatrix} \cos y_0 \\ \sin y_0 \end{pmatrix}$$

vorgegeben ist.

Für festes $x_0 \in \mathbb{R}$ haben wir $E(x_0, y) = \mathrm{e}^{x_0} \begin{pmatrix} \cos y \\ \sin y \end{pmatrix}$. Das Bild von $y \to \begin{pmatrix} \cos y \\ \sin y \end{pmatrix}$ ist die Einheitskreislinie. Das Bild einer zur y-Achse parallelen Geraden mit $x = x_0$ ist demnach ein Kreis um den Nullpunkt mit Radius e^{x_0}.

Anhand der Bilder der Geraden können wir erkennen, dass $E(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ gilt.

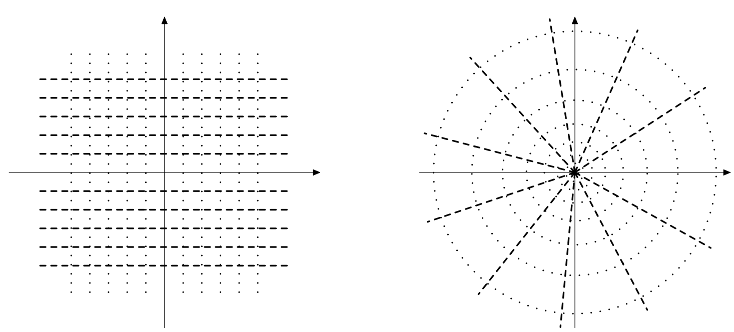


ABBILDUNG 4. Aufgabe 8 a)

(b) Es gilt $D_E(x,y) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^x \cos y & -\mathrm{e}^x \sin y \\ \mathrm{e}^x \sin y & \mathrm{e}^x \cos y \end{pmatrix}$.

Die Jacobi-Matrix ist für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ invertierbar, denn ihre Determinante hat den Wert $(\mathrm{e}^x \cos y)^2 - (-\mathrm{e}^x \sin y)\,\mathrm{e}^x \sin y = \mathrm{e}^{2x}(\cos^2 y + \sin^2 y) = \mathrm{e}^{2x} \neq 0$.

Weiter gilt $E(x, y + 2\pi) = E(x,y)$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, daher ist E nicht injektiv.

Aufgrund der mangelnden Injektivität ist der Satz über die Umkehrfunktion nicht direkt anwendbar (siehe nächsten Punkt).

(c) Da E nicht injektiv ist, existiert zwar keine *globale* Umkehrabbildung, aber wie wir mit Hilfe der Bilder der Geraden sehen können, bildet E etwa die Menge $\mathbb{R} \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ bijektiv auf $(0, \infty) \times \mathbb{R}$ ab. Hier können wir eine *lokale* Umkehrabbildung leicht angeben. Aus

$$\begin{pmatrix} \mathrm{e}^x \cos y \\ e^x \sin y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

folgt einerseits $\mathrm{e}^x = \sqrt{\mathrm{e}^{2x}(\cos^2 y + \sin^2 y)} = \left| \begin{pmatrix} \mathrm{e}^x \cos y \\ \mathrm{e}^x \sin y \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right| = \sqrt{u^2 + v^2}$, also $x = \frac{1}{2} \ln\left(u^2 + v^2\right)$ und andererseits

$$\frac{u}{v} = \frac{\sin y}{\cos y} = \tan y$$

(man beachte, dass in unserer Bildmenge stets $u \neq 0$ gilt). Um y zu bestimmen, sollten wir nicht all zu voreilig sein; es gibt viele $y \in \mathbb{R}$ mit $\tan y = \frac{v}{u}$; allerdings liegt nur eines davon im Intervall $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ nämlich $y = \arctan \frac{u}{v}$.

Wie Sie sicherlich schon gemerkt haben, handelt es sich bei E, wenn man $\mathbb{R}^2$ mit $\mathbb{C}$ identifiziert, um nichts anderes als die komplexe Exponentialfunktion. Diese ist nicht injektiv; sie besitzt deshalb keine eindeutig bestimmte Umkehrfunktion ("Logarithmus"). Schränkt man sie aber auf geeignete Mengen ein, so ist sie dort sogar ein Diffeomorphismus. Eine hier gesuchte Umkehrabbildung ist

$$F : (0, \infty) \times \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \quad F(u, v) := \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \ln\left(u^2 + v^2\right) \\ \arctan \frac{u}{v} \end{pmatrix}.$$

///