FERIENKURS ANALYSIS 2 FÜR PHYSIKER

JOHANNES R. KAGER UND JULIAN SIEBER

Lösungsvorschlag zum Aufgabenblatt 1

Aufgabe 1 ($\star$)**.** Sei $d : X \times X \to \mathbb{R}$ eine Funktion, welche

(i) $d(x, y) = 0$ genau dann, wenn $x = y$,
(ii) $d(x, y) = d(y, x)$ für alle $x, y \in X$,
(iii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ für alle $x, y, z \in X$

erfüllt. Zeigen Sie, dass d eine Metrik auf X definiert.

Lösung. Wir müssen zeigen, dass d ausschließlich nicht–negative Werte annimmt. Das folgt jedoch unmittelbar aus

$$0 \overset{\text{(i)}}{=} d(x, x) \overset{\text{(iii)}}{\leq} d(x, y) + d(y, x) \overset{\text{(ii)}}{=} 2d(x, y).$$

///

Aufgabe 2 ($\star\star$)**.** Welche der nachfolgenden metrischen Räume X sind vollständig? Bitte geben Sie eine kurze Begründung.

a) $X = [0, 1]$ mit der Standardmetrik in $\mathbb{R}$.
b) $X = \mathbb{Q}$ mit der Standardmetrik in $\mathbb{R}$.
c) Die Teilmenge

$$\{(0, 0)\} \cup \{(x, \sin(1/x)) | x > 0\} \subset \mathbb{R}^2$$

mit der Standardmetrik in $\mathbb{R}^2$.
d) $X = \mathbb{R}$ mit der Metrik $d(x, y) = |\arctan x - \arctan y|$ (zeigen Sie, dass in der Tat eine solche vorliegt).

Lösung. a): Abgeschlossene Teilmengen $A \subset X$ vollständiger metrischer Räume sind vollständig. Das kann man sich kurz wie folgt überlegen: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ eine Cauchy Folge. Diese hat dank der Vollständigkeit von X einen Grenzwert a. Der Grenzwert einer konvergenten Folge in einer abgeschlossenen Mengen liegt gemäß Zentralübungsaufgabe 2 auf Blatt 3 stets in dieser. Das zeigt die Vollständigkeit. Auf die Aufgabe angewandt betrachten wir also das Intervall $[0, 1]$ als abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}$.

b): $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ ist natürlich nicht vollständig wie man aus der Analysis 1 weiß. Konkret kann man beispielsweise die Folge $a_n = (1 + 1/n)^n$ wählen, welche bekanntermaßen gegen die irrationale Zahl e konvergiert.

c): Auch diese Menge ist nicht vollständig. Um dies einzusehen, betrachten wir die Folge

$$a_n = \begin{pmatrix} \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)^{-1} \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right). \end{pmatrix}$$

Man prüft leicht nach, dass $\lim_{n\to\infty} a_n = (0,1)$ gilt, was jedoch kein Element der Menge ist. Die Folge $(a_n)_{n\to\mathbb{N}}$ ist selbstverständlich eine Cauchy Folge, da sie konvergiert. Es ist trotzdem keine schlechte Übung dies explizit nachzuweisen. Als Tipp möchten wir Ihnen dazu die Verwendung der 1–Norm $\|x\|_1 = |x_1| + |x_2|$ für $x = (x_1, x_2)$ empfehlen. Dieses Vorgehen ist legitim, da auf endlich–dimensionalen Räumen alle Normen äquivalent sind.

d): Zunächst überzeugen wir uns davon, dass die d eine Metrik ist. Ist $d(x,y) = 0$, so folgt aus der Injektivität der Arkustangens $x = y$. Die Symmetrie folgt aus

$$d(x,y) = |\arctan x - \arctan y| = |\arctan y - \arctan x| = d(y,x).$$

Die Dreiecksungleichung beweist man mit der Dreiecksungleichung des Betrags:

$$\begin{aligned} d(x,z) &= |\arctan x - \arctan z| \\ &= |\arctan x - \arctan y + \arctan y - \arctan z| \\ &\le |\arctan x - \arctan y| + |\arctan y - \arctan z| \\ &= d(x,y) + d(y,z). \end{aligned}$$

Der metrische Raum (X,d) ist **nicht** vollständig. Um dies zu beweisen betrachten wir die Folge $a_n = n$ und zeigen, dass sie die Cauchy Eigenschaft besitzt. Sei dazu ein $\varepsilon > 0$ vorgelegt und sei $N \in \mathbb{N}$ mit $N \ge \tan(\pi/2 - \varepsilon)$. Dann gilt für $m,n \ge N$

$$d(x_m, x_n) = |\arctan m - \arctan n| \le \left|\frac{\pi}{2} - \arctan N\right| \le \varepsilon,$$

da der Arkustangens monoton wachsend ist und $0 \le \arctan x \le \pi/2$ für alle $x \in [0,\infty)$. Folglich ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy Folge, welche aber in $\mathbb{R}$ nicht konvergiert. Um dies einzusehen, nehmen wir an, dass $a_n \to a \in \mathbb{R}$. Es gibt ein $N \in \mathbb{N}$ und ein $\varepsilon > 0$, sodass $\arctan n \ge \arctan a + \varepsilon$ für alle $n \ge N$. Damit folgt $d(a_n, a) = |\arctan n - \arctan a| \ge \varepsilon$. Dies widerspricht der behaupteten Konvergenz. ///

Aufgabe 3 ($\star$)**.** Sei (M,d) ein metrischer Raum und $X, Y \subset M$ nicht–leer. Zeigen Sie, dass

$$X, Y \text{ offen} \quad \Longleftrightarrow \quad X \times Y \text{ offen}.$$

Lösung. "$\Longrightarrow$": Es sei $(x,y) \in X \times Y$. Dann gibt es ein $\varepsilon_x > 0$, sodass $B_{\varepsilon_x}(x) \subset X$ sowie ein $\varepsilon_y > 0$, sodass $B_{\varepsilon_y}(y) \subset Y$ um y. Sei nun $\varepsilon = \min\{\varepsilon_x, \varepsilon_y\}$, dann gilt $B_\varepsilon(x,y) \subset X \times Y$.
"$\Longleftarrow$": Sei $(x,y) \in X \times Y$ und $\varepsilon > 0$, sodass $B_\varepsilon(x,y) \subset X \times Y$ und damit gilt $B_\varepsilon(x) \subset X$ und $B_\varepsilon(y) \subset Y$. ///

Aufgabe 4 ($\star\star$)**.** Zeigen Sie, dass eine Cauchy Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ im metrischen Raum (X,d) genau dann konvergiert, wenn sie eine konvergente Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ besitzt.

Lösung. Der Beweis läuft analog zur Analysis 1.
"$\Longrightarrow$": Sei $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ die konvergente Teilfolge mit Grenzwert a. Wähle nun ein $\varepsilon > 0$. Gemäß Cauchy Eigenschaft gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, sodass $d(a_n, a_m) \le \varepsilon/2$ für alle $m,n \ge N$. Ferner impliziert die Konvergenz der Teilfolge, dass es ein $K \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $d(a_{n_k} - a) \le \varepsilon/2$ für alle $k \ge K$. Damit gilt nun für alle $n \ge N$ und $k \ge \max\{N, K\}$, dass

$$d(a_n, a) \le d(a_n, a_{n_k}) + d(a_{n_k}, a) \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

wobei wir $n_k \ge k \ge N$ benutzt haben.
"$\Longleftarrow$": trivial. ///

Aufgabe 5 ($\star\star$)**.** Untersuchen Sie, ob die folgenden Funktionen $f_{1,2} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig im Nullpunkt fortgesetzt werden können und geben sie gegebenenfalls diese Fortsetzung an:

$$\text{a } f_1(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, \qquad \text{b) } f_2(x, y) = \frac{2x^2y^2}{x^2 + y^2}.$$

Lösung. a) Es ist $f_1(x, 0) = 1$ und $f_2(0, y) = -1$ für alle $x, y \neq 0$. Damit kann f nicht stetig in 0 sein.
b) Mit der beliebten Abschätzung $|x|, |y| \leq |(x, y)|$ erhalten für $(x, y) \neq (0, 0)$

$$|f_2(x, y)| \leq \frac{|(x, y)|^4}{2|(x, y)|^2} = \frac{1}{2}|(x, y)|$$

und damit $f_2(x_n, y_n) \to 0$ für alle Nullfolgen $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Die stetige Fortsetzung lautet

$$\tilde{f}_2(x, y) = \begin{cases} \frac{2x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

///

Aufgabe 6 ($\star$)**.** Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{y^3}{x^2}\right) & \text{für } x \neq 0, \\ 1 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

eingeschränkt auf eine beliebige Gerade durch den Nullpunkt stetig ist, jedoch die Funktion selbst unstetig ist.

Lösung. Geraden durch den Nullpunkt sind von der Form $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (t, ct)$, $c \in \mathbb{R}$. Damit folgt für $t \neq 0$

$$f(\gamma(t)) = \exp\left(-\frac{c^3t^3}{t^2}\right) = e^{-c^3t} \xrightarrow{t \to 0} 1$$

und damit die Stetigkeit von f eingeschränkt auf jede Ursprungsgerade.

Für den Unstetigkeitsbeweis betrachten wir die Kurve $\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\xi(t) = (t^3, t^2)$, für welche wir für $t \neq 0$

$$f(\xi(t)) = \exp\left(-\frac{t^6}{t^6}\right) = e \overset{t \to 0}{\not\longrightarrow} 1.$$

Dies genügt um die Unstetigkeit zu zeigen. Die genaue Argumentation geht wie folgt: Wäre f stetig, so gelte selbiges für $f \circ \xi$ als Komposition stetiger Funktionen. Da ξ stetig ist, muss f die Unstetigkeit verursachen.

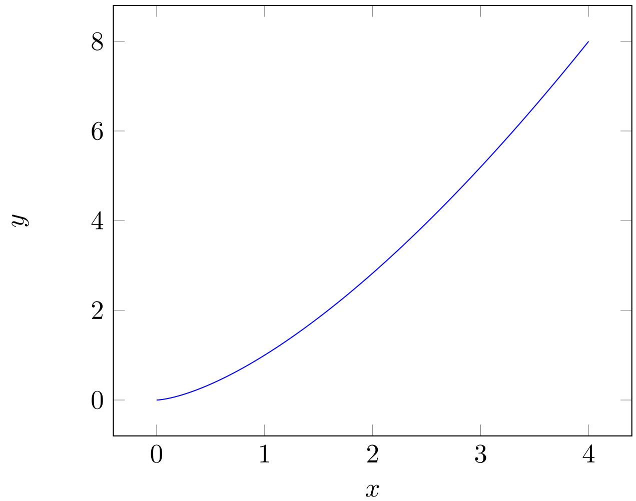

Abbildung 1. Skizze der Kurve, welche die Unstetigkeit von f zeigt.

///

Aufgabe 7 ($\star$)**.** Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen:

a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = y + 2x$
b) $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = (x^2 + y^2)^{-1/2}$
c) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = xy$
d) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 + 4y^2$

Lösung. (i): $\nabla f(x, y) = (2, 1)$
(ii): $\nabla f(x, y) = \big(x(x^2 + y^2)^{-3/2}, y(x^2 + y^2)^{-3/2}\big)$
(iii): $\nabla f(x, y) = (y, x)$
(iv): $\nabla f(x, y) = (2x, 8y)$ ///

Aufgabe 8 ($\star$)**.** Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $f(tx) = t^k f(x)$ für alle $t > 0$ und $x \in \mathbb{R}^n$.
Zeigen Sie, dass $\langle \nabla f(x), x\rangle = kf(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

Lösung. Nach Kettenregel gilt

$$\frac{d}{dt} f(tx) = \nabla f(tx)x$$

sowie mit $f(tx) = t^k f(x)$

$$kt^{k-1} f(x).$$

Wertet man nun beide Gleichungen bei $t = 1$ aus, so folgt die Behauptung. ///

Aufgabe 9 ($\star\star$)**.**

a) Seien $g_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$, $1 \leq j \leq n$, Funktionen und definiere $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ durch

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} g_j(x_j).$$

Zeigen Sie, dass f bei $x \in \mathbb{R}^n$ genau dann differenzierbar ist, wenn jedes g_j in x_j differenzierbar ist.

b) Bestimmen Sie die Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, in denen die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = |x|^{3/2} + |y|^{1/2}$$

differenzierbar ist.

Lösung. a): Nehmen wir zunächst an, dass f differenzierbar ist. Damit existieren die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_n) = \left(\frac{d}{dx_j} g_j(x_j)\right)_i, \qquad i = 1, \dots, m,\ j = 1, \dots, n.$$

Da demnach alle Komponenten von g_j differenzierbar sind, gilt selbiges für g_j selbst.

Seien nun umgekehrt alle $g_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$, $1 \leq j \leq n$ differenzierbar. Wir definieren die Funktionen $\tilde{g}_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $1 \leq j \leq n$, durch

$$\tilde{g}_j(x_1, \dots, x_n) = g_j(x_j).$$

Diese Funktionen $\tilde{g}_j$ sind differenzierbar, da für $x \in \mathbb{R}^n$ und

$$J_{\tilde{g}_j}(x) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} & & & j\text{-te Spalte} & & & \\ & & & \downarrow & & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \left(\frac{d}{dx_j} g(x_j)\right)_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \left(\frac{d}{dx_j} g(x_j)\right)_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \left(\frac{d}{dx_j} g(x_j)\right)_n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

gilt, dass

$$\lim_{y \to 0} \big(\tilde{g}_j(x + y) - \tilde{g}_j(x) - J_{\tilde{g}_j}(x) y\big) = \lim_{y \to 0} g_j(x_j + y_j) - g(x_j) - \frac{d}{dx_j} g(x_j) y_j = 0$$

Damit ist

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} \tilde{g}_j(x_1, \dots, x_n)$$

als Summe differenzierbarer Funktionen selbst differenzierbar.

b): Wir wenden Teil a) auf die gegebene Funktion an. Aus der Analysis 1 ist bekannt, dass die Funktion $\mathbb{R} \ni x \mapsto |x|^{1/2}$ bei 0 nicht reell differenzierbar ist, $\mathbb{R} \ni y \mapsto |y|^{3/2}$ jedoch sehr wohl (vgl. Abbildung 2). Es folgt mit dem vorhergegangen Aufgabenteil, dass f auf der offenen Menge

$$\mathbb{R} \setminus \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} \middle| \ y \in \mathbb{R} \right\}$$

differenzierbar ist.

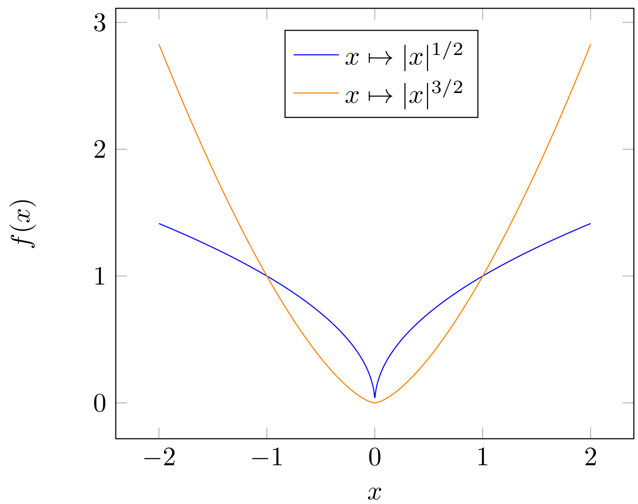

ABBILDUNG 2. Plot der beiden Funktionen aus Aufgabe 9. Man erkennt bei der blauen Kurve deutlich den Knick bei 0.

///

Aufgabe 10 ($\star$)**.** Es sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

vorgelegt.

a) Zeigen Sie, dass f partiell differenzierbar ist. Berechnen Sie die partiellen Ableitungen.
b) Zeigen Sie, dass f in $(0,0)$ nicht total differenzierbar ist.

Lösung. (i): Für $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ erhalten wir

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{2x^2y}{(x^2+y^2)^2} + \frac{y}{x^2+y^2} = \frac{y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{2xy^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}.$$

Im Nullpunkt gilt

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h^2} = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h^2} = 0$$

(ii): Es gilt $f(1/n, 1/n) = 1/2 \not\to 0$ für $n \to \infty$. Folglich ist f in 0 nicht stetig, also auch nicht total differenzierbar.

Es ist instruktiv sich Folgen zu überlegen, welche zeigen, dass die partiellen Ableitungen im Nullpunkt ebenfalls unstetig sind. ///

Aufgabe 11 ($\star\star$)**.** Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

auf ganz $\mathbb{R}^2$ differenzierbar ist und berechnen Sie die Ableitung.

Lösung. Für $(x,y) \neq (0,0)$ erhalten wir

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{3x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x^4}{(x^2+y^2)^{3/2}} \\ -\frac{x^3y}{(x^2+y^2)^{3/2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{(x^2+y^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} 2x^4 + 3x^2y^2 \\ -x^3y \end{pmatrix}.$$

Mit der mittlerweile bekannten Abschätzung $|x|, |y| \leq |(x,y)|$ folgt

$$\left| \frac{3x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| \leq 3|x|$$

$$\left| -\frac{x^4}{(x^2+y^2)^{3/2}} \right| \leq |x|$$

$$\left| -\frac{x^3y}{(x^2+y^2)^{3/2}} \right| \leq |x|$$

und damit die Stetigkeit der partiellen Ableitungen auf ganz $\mathbb{R}^2$. Folglich ist f total differenzierbar. ///

Aufgabe 12 ($\star\star$)**.** Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differenzierbar und definiere $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x, c-x)$, für $c \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die Ableitung von g in Termen der partiellen Ableitungen von f.
Zeigen Sie, dass im Falle $\partial_x f(x,y) = \partial_y f(x,y)$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ eine Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gibt, sodass

$$f(x,y) = h(x,y).$$

Lösung. Diese Aufgabe ist ähnlich zur Klausur, daher machen wir es ausführlich. Definiere $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$,

$$h(x) = \begin{pmatrix} x \\ c-x \end{pmatrix}$$

und damit ist $g(x) = (f \circ h)(x)$. Mit der Kettenregel folgt

$$\frac{d}{dx} g(x) = (\nabla f(h(x)))^T \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial x}(x, c-x) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, c-x). \tag{1}$$

Sei nun $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ beliebig. Wir wählen nun $c = x + y$. Aus Gleichung (1) folgt nun, dass $g'(x) = 0$ und somit $g(x) = const$. Somit ist $g(x) = g(x+y)$, also

$$f(x,y) = f(x+y, 0) =: h(x+y).$$

///

Aufgabe 13 ($\star$)**.** Eine Funktion $f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, heißt harmonisch, falls

$$\triangle f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \partial_i^2 f(x_1, \ldots, x_n) = 0$$

für alle $(x_1, \dots, x_n) \in U$.
Zeigen Sie, dass die nachfolgenden Funktionen harmonisch sind:

a) $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, $f(x,y) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$
b) $g : (0,\infty) \times \mathbb{R}$, $g(x,y) = \arctan(y/x)$.

Bestimmen Sie die Jacobi Matrix von $h : (0,\infty)\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$,

$$h(x,y) = \begin{pmatrix} f(x,y) \\ g(x,y) \end{pmatrix}.$$

Lösung. Einfach nachrechnen. Zur Kontrolle:
(i):

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

(ii):

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2}, \qquad \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y) = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$$
$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}, \qquad \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y) = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

Damit ist

$$Dh(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{x}{x^2+y^2} & \frac{y}{x^2+y^2} \\ -\frac{y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}.$$

///

Aufgabe 14 ($\star\star$)**.** Bestimmen Sie mit Beweis die Stellen, an denen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+2y^4}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

total differenzierbar ist.

Lösung. Wir berechnen zunächst die partiellen Ableitungen für $(x,y) \neq (0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{3x^2}{x^2+y^2} - \frac{2x(x^3+2y^4)}{(x^2+y^2)^2}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{8y^3}{x^2+y^2} - \frac{2y(x^3+2y^4)}{(x^2+y^2)^2}$$

Aus deren Stetigkeit folgt die total Differenzierbarkeit abseits des Ursprungs. Im Ursprung haben wir

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^3}{h^3} = 1$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2h^4}{h^3} = 0.$$

Betrachten wir nun die Richtungsableitung in Richtung $v = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$, so folgt

$$D_v f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h/\sqrt{2}, h/\sqrt{2}) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^3/2^{3/2} + h^4/2}{h^2} = 0$$

im Widerspruch zu $\langle \nabla f(0,0), v\rangle = 1/\sqrt{2}$. ///

Aufgabe 15 ($\star\star$)**.** Für $n \in \mathbb{N}$ sei die Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$,

$$f(x) = \exp(|x|)x$$

gegeben. Begründen Sie kurz, dass f auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ differenzierbar ist und bestimmen Sie die Jacobi–Matrix $J_f(x)$.

Lösung. Für $i \neq j$ gilt

$$\frac{\partial f_i}{x_j}(x) = \exp\left(\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}\right) \frac{x_i x_j}{\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}} = \frac{x_i x_j \exp(|x|)}{|x|}$$

und für $i = j$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_i}{x_i}(x) &= \exp\left(\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}\right) \frac{x_i^2}{\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}} + \exp\left(\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}\right) \\ &= \frac{\exp(|x|)x_i^2}{|x|} + \exp(|x|)\end{aligned}$$

Da die partiellen Ableitungen von f auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ stetig sind folgt, dass f dort total differenzierbar ist.

Für die Jacobi–Matrix ergibt sich

$$J_f(x) = \exp(|x|) \begin{pmatrix} \frac{x_1^2}{|x|} + 1 & \frac{x_1 x_2}{|x|} & \frac{x_1 x_3}{|x|} & \cdots & \frac{x_1 x_n}{|x|} \\ \frac{x_1 x_2}{|x|} & \frac{x_2^2}{|x|} + 1 & \frac{x_2 x_3}{|x|} & \cdots & \frac{x_2 x_n}{|x|} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{x_1 x_n}{|x|} & \frac{x_2 x_n}{|x|} & \frac{x_3 x_n}{|x|} & \cdots & \frac{x_n^2}{|x|} + 1 \end{pmatrix}.$$

///

Aufgabe 16 ($\star\star$)**.** Sei $f : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch $f(x,y) = x \times y$ mit dem gewöhnlichen Kreuzprodukt.
Zeigen Sie, dass f differenzierbar ist und bestimmen Sie die Ableitung.

Lösung. Wir schreiben $X = (x_1, x_2, x_3)$ und $y = (y_1, y_2, y_3)$. Berechnen wir zunächst $D_x f(x,y)$. Dazu bemerken wir, dass

$$f(x,y) = x \times y = \begin{pmatrix} 0 & y_3 & -y_2 \\ -y_3 & 0 & y_1 \\ y_2 & -y_1 & 0 \end{pmatrix} x$$

und folglich

$$D_x f(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & y_3 & -y_2 \\ -y_3 & 0 & y_1 \\ y_2 & -y_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Für $D_y f(x,y)$ benutzen wir, dass $x \times y = -y \times x$ und damit $D_y f(x,y) = -D_x f(y,x)$. Insgesamt ergibt sich also die Jacobi Matrix

$$Df(x,y) = \begin{pmatrix} D_x f(x,y) & D_y f(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & y_3 & -y_2 & 0 & -x_3 & x_2 \\ -y_3 & 0 & y_1 & x_3 & 0 & -x_1 \\ y_2 & -y_1 & 0 & -x_2 & x_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir zeigen abschließend, dass dies in der Tat die Ableitung von f ist. Dazu sei zunächst bemerkt, dass für $h = (h_1, \ldots, h_6)$ wir $h_x = (h_1, h_2, h_3)$ sowie $h_y = (h_4, h_5, h_6)$ einführen und mit der Linearität des Kreuzprodukts

$$\begin{aligned} f((x,y)+h) - f(x,y) &= f(x+h_x, y+h_y) - f(x,y) = (x+h_x) \times (y+h_y) - x \times y \\ &= h_x \times y + x \times h_y + h_x \times h_y \end{aligned}$$

erhalten. Andererseits gilt

$$Df(x,y)h = \begin{pmatrix} y_3 h_2 - y_2 h_3 - x_3 h_5 + x_2 h_6 \\ -y_3 h_1 + y_1 h_3 + x_3 h_4 - x_1 h_6 \\ y_2 h_1 - y_1 h_2 - x_2 h_4 + x_1 h_5 \end{pmatrix} = h_x \times y + x \times h_y,$$

sodass $f((x,y)+h) - f(x,y) - Df(x,y)h = h_x \times h_y$. Benutzt man nun den aus der gymnasialen Oberstufe bekannten Zusammenhang zusammen mit der bekannten Abschätzung $|x|, |y| \leq |(x,y)|$, so erhält man

$$|x \times y| = |x||y| \sin\left(\measuredangle(x,y)\right) \leq |x||y| \leq |(x,y)|^2$$

und folglich

$$\lim_{h \to 0} \frac{|f((x,y)+h) - f(x,y) - Df(x,y)h|}{|h|} = \lim_{h \to 0} \frac{|h_x \times h_y|}{|h|} \leq \lim_{h \to 0} |h| = 0.$$

///

Aufgabe 17 ($\star$)**.** Gegeben seien die folgenden Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die Punkte an denen diese differenzierbar sind. Begründen Sie Ihre Antwort.

a) $f(x,y) = xy|x-y|$
b)

$$f(x,y) = \begin{cases} xy \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

Lösung. a): f ist auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}$ als Komposition differenzierbarer Funktionen differenzierbar. Beachten Sie, dass die reelle Betragsfunktion abseits der 0 differenzierbar ist. Für $x = y$ zeigen wir exemplarisch, dass die partielle Ableitung nach x nicht existiert. Das genügt für die Behauptung. Wir rechnen für $x \neq 0$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h,x) - f(x,x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x^2|h|}{h} = x^2 \operatorname{sgn}(h).$$

Damit ist klar, dass für $h_n = 1/n$ und $\tilde{h}_n = -1/n$ der Grenzwert nicht übereinstimmt. Für $x = y = 0$ ist f differenzierbar, da mit $h = (h_1, h_2)$

$$\frac{|f(h) - f(0,0)|}{|h|} = \frac{|h_1||h_2||h_1 - h_2|}{|h|} \leq |h||h_1 - h_2| \xrightarrow{h \to 0} 0.$$

Jedoch ist zu beachten, dass $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \mid x = y\}$ nicht offen ist.

b): Die Funktion f ist auf ganz $\mathbb{R}^2$ differenzierbar. Wieder erfordert nur der Nullpunkt eine gesonderte Betrachtung. Es gilt für $h = (h_1, h_2)$, dass

$$\frac{|f(h_1,h_2) - f(0,0)|}{|h|} = \frac{|h_1||h_2||\sin(1/h_1)|}{|h|} \leq |h| \xrightarrow{h\to 0} 0$$

und damit ist f im Ursprung differenzierbar mit

$$Df(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Diese Funktion ist ein Beispiel dafür, dass die Stetigkeit der partiellen Ableitungen hinreichend, jedoch **nicht notwendig**, für totale Differenzierbarkeit ist. Man überzeugt sich leicht, dass für $(x,y) \neq (0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{y\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{x},$$

welche klarerweise im Ursprung unstetig ist.

Abseits des Nullpunkts ist die Funktion nicht total differenzierbar, da für fixiertes $y \neq 0$ die Funktion $x \mapsto xy\sin(1/x)$ nicht reell differnzierbar ist. Damit existiert die partielle Ableitung in x–Richtung nicht.

Wie unter a) ist die Menge $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|x \neq 0\} \cup \{(0,0)\}$ nicht offen. ///

Aufgabe 18 ($\star$)**.** Wir betrachten die Funktion $f : A \to \mathbb{R}$, $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|y \neq 0\}$,

$$f(x,y) = \frac{e^x}{y}.$$

Bestimmen Sie für $k, \ell \in \mathbb{N}$ die partiellen Ableitungen $\partial_x^k \partial_y^\ell f(x,y)$ und geben Sie das Taylorpolynom zweiter Ordnung im Punkt $(a_1,a_2) \in A$ an.
Hinweis: Multiplizieren Sie nicht aus.

Lösung. Man sieht leicht, dass

$$\partial_x^k \partial_y^\ell f(x,y) = \partial_x^k(e^x)\partial_y^\ell\left(\frac{1}{y}\right) = (-1)^\ell e^x \frac{\ell!}{y^{\ell+1}}.$$

Streng genommen sind die Ableitungsausagen mit vollständiger Induktion zu beweisen. Das ist aber trivial.
Für die Taylorentwicklung ergibt sich

$$\begin{aligned} T_2 f((x,y);a) &= f(a) + \langle \nabla f(a), ((x,y)-a)\rangle + \frac{1}{2}((x,y)-a)^T H_f(a)((x,y)-a) \\ &= \frac{e^{a_1}}{a_2} + \begin{pmatrix} \frac{e^{a_1}}{a_2} & -\frac{e^{a_1}}{a_2^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-a_1 \\ y-a_2 \end{pmatrix} \\ &+ \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x-a_1 & y-a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{e^{a_1}}{a_2} & -\frac{e^{a_1}}{a_2^2} \\ -\frac{e^{a_1}}{a_2^2} & \frac{2e^{a_1}}{a_2^3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-a_1 \\ y-a_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

///

Aufgabe 19 ($\star$)**.** Bestimmen Sie das Taylorpolynom zweiter Ordnung der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \cos(x+y)\cos(x-y)$$

im Entwicklungspunkt $(0,0)$.

Lösung. Es ist $\cos(x) = 1 - x^2/2 + \mathcal{O}(x^4)$ und damit

$$\cos(x+y)\cos(x-y) = \left(1 - \frac{(x+y)^2}{2} + \cdots\right)\left(1 - \frac{(x-y)^2}{2} + \cdots\right).$$

Ausmultiplizieren und vernachlässigen Terme von Ordnung 3 und höher liefert

$$T_2 f((x,y);(0,0)) = 1 - x^2 - y^2.$$

///