# FERIENKURS ANALYSIS 2 FÜR PHYSIKER

JOHANNES R. KAGER UND JULIAN SIEBER

*Aufgabenblatt 1*

**Aufgabe 1** ($\star$)**.** Sei $d : X \times X \to \mathbb{R}$ eine Funktion, welche

(i) $d(x, y) = 0$ genau dann, wenn $x = y$,
(ii) $d(x, y) = d(y, x)$ für alle $x, y \in X$,
(iii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ für alle $x, y, z \in X$

erfüllt. Zeigen Sie, dass $d$ eine Metrik auf $X$ definiert.

**Aufgabe 2** ($\star\star$)**.** Welche der nachfolgenden metrischen Räume $X$ sind vollständig? Bitte geben Sie eine kurze Begründung.

(i) $X = [0, 1]$ mit der Standardmetrik in $\mathbb{R}$.
(ii) $X = \mathbb{Q}$ mit der Standardmetrik in $\mathbb{R}$.
(iii) Die Teilmenge
$$\{(0, 0)\} \cup \{(x, \sin(1/x))|x > 0\} \subset \mathbb{R}^2$$
mit der Standardmetrik in $\mathbb{R}^2$.
(iv) $X = \mathbb{R}$ mit der Metrik $d(x, y) = |\arctan x - \arctan y|$ (zeigen Sie, dass in der Tat eine solche vorliegt).

**Aufgabe 3** ($\star$)**.** Sei $(M, d)$ ein metrischer Raum und $X, Y \subset M$ nicht–leer. Zeigen Sie, dass
$$X, Y \text{ offen} \quad \Longleftrightarrow \quad X \times Y \text{ offen}.$$

**Aufgabe 4** ($\star\star$)**.** Zeigen Sie, dass eine Cauchy Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ im metrischen Raum $(X, d)$ genau dann konvergiert, wenn sie eine konvergente Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ besitzt.

**Aufgabe 5** ($\star\star$)**.** Untersuchen Sie, ob die folgenden Funktionen $f_{1,2} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig im Nullpunkt fortgesetzt werden können und geben sie gegebenenfalls diese Fortsetzung an:
$$\text{(a) } f_1(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, \qquad \text{(b) } f_2(x, y) = \frac{2x^2y^2}{x^2 + y^2}.$$

**Aufgabe 6** ($\star$)**.** Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,
$$f(x, y) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{y^3}{x^2}\right) & \text{für } x \neq 0, \\ 1 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$
eingeschränkt auf eine beliebige Gerade durch den Nullpunkt stetig ist, jedoch die Funktion selbst unstetig ist.

**Aufgabe 7** ($\star$)**.** Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen:

(i) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = y + 2x$
(ii) $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = (x^2 + y^2)^{-1/2}$

(iii) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = xy$
(iv) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 + 4y^2$

**Aufgabe 8** ($\star$)**.** Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $f(tx) = t^k f(x)$ für alle $t > 0$ und $x \in \mathbb{R}^n$.
Zeigen Sie, dass $\langle \nabla f(x), x\rangle = kf(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

**Aufgabe 9** ($\star\star$)**.**

(i) Seien $g_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$, $1 \leq j \leq n$, Funktionen und definiere $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ durch

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} g_j(x_j).$$

Zeigen Sie, dass $f$ bei $x \in \mathbb{R}^n$ genau dann differenzierbar ist, wenn jedes $g_j$ in $x_j$ differenzierbar ist.

(ii) Bestimmen Sie die Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, in denen die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = |x|^{3/2} + |y|^{1/2}$$

differenzierbar ist.

**Aufgabe 10** ($\star$)**.** Es sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

vorgelegt.

(i) Zeigen Sie, dass $f$ partiell differenzierbar ist. Berechnen Sie die partiellen Ableitungen.
(ii) Zeigen Sie, dass $f$ in $(0, 0)$ nicht total differenzierbar ist.

**Aufgabe 11** ($\star\star$)**.** Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

auf ganz $\mathbb{R}^2$ differenzierbar ist und berechnen Sie die Ableitung.

**Aufgabe 12** ($\star\star$)**.** Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differenzierbar und definiere $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x, c - x)$, für $c \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die Ableitung von $g$ in Termen der partiellen Ableitungen von $f$.
Zeigen Sie, dass im Falle $\partial_x f(x, y) = \partial_y f(x, y)$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ eine Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gibt, sodass

$$f(x, y) = h(x, y).$$

**Aufgabe 13** ($\star$)**.** Eine Funktion $f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, heißt harmonisch, falls

$$\triangle f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \partial_i^2 f(x_1, \dots, x_n) = 0$$

für alle $(x_1, \dots, x_n) \in U$.
Zeigen Sie, dass die nachfolgenden Funktionen harmonisch sind:

(i) $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, $f(x, y) = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2)$

(ii) $g : (0,\infty) \times \mathbb{R}$, $g(x,y) = \arctan(y/x)$.

Bestimmen Sie die Jacobi Matrix von $h : (0,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$,

$$h(x,y) = \begin{pmatrix} f(x,y) \\ g(x,y) \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 14** (⋆⋆)**.** Bestimmen Sie mit Beweis die Stellen, an denen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+2y^4}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

total differenzierbar ist.

**Aufgabe 15** (⋆⋆)**.** Für $n \in \mathbb{N}$ sei die Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$,

$$f(x) = \exp(|x|)x$$

gegeben. Begründen Sie kurz, dass $f$ auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ differenzierbar ist und bestimmen Sie die Jacobi–Matrix $J_f(x)$.

**Aufgabe 16** (⋆⋆)**.** Sei $f : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch $f(x,y) = x \times y$ mit dem gewöhnlichen Kreuzprodukt.

Zeigen Sie, dass $f$ differenzierbar ist und bestimmen Sie die Ableitung.

**Aufgabe 17** (⋆)**.** Gegeben seien die folgenden Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die Punkte an denen diese differenzierbar sind. Begründen Sie Ihre Antwort.

(i) $f(x,y) = xy|x-y|$

(ii)

$$f(x,y) = \begin{cases} xy \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

**Aufgabe 18** (⋆)**.** Wir betrachten die Funktion $f : A \to \mathbb{R}$, $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|y \neq 0\}$,

$$f(x,y) = \frac{e^x}{y}.$$

Bestimmen Sie für $k, \ell \in \mathbb{N}$ die partiellen Ableitungen $\partial_x^k \partial_y^\ell f(x,y)$ und geben Sie das Taylorpolynom zweiter Ordnung im Punkt $(a_1,a_2) \in A$ an.

*Hinweis:* Multiplizieren Sie nicht aus.

**Aufgabe 19** (⋆)**.** Bestimmen Sie das Taylorpolynom zweiter Ordnung der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \cos(x+y)\cos(x-y)$$

im Entwicklungspunkt $(0,0)$.