Ferienkurs zur Theoretischen Physik II

03. April, 07. April, 13. April 2017

Philipp Landgraf, Franz Zimma

Übungsaufgaben

Letzte Änderung: 8. April 2017, 13:42

Aufgabe 1: Gemischte Elektrostatik

Wir betrachten im Folgenden geladene Objekte mit Zentrum (bzw. Schwerpunkt) bei $\vec{0}$. Wir interessieren uns für verschiedene physikalische Größen im gesamten Raum. Wählen Sie für jedes Problem ein geeignetes Koordinatensystem und nutzen Sie Symmetrien. Alle angegebenen Größen sind zeitlich konstant.

(a) Ein Hohlrohr mit Höhe h, Innenradius R_i und Außenradius R_a ist homogen geladen mit Q.
   i. Geben Sie die Ladungsdichte $\rho(\vec{r})$ an.
   ii. Überprüfen Sie den Betrag der Gesamtladung.

(b) Eine (Voll-)Kugel mit Radius R ist homogen geladen mit Q.
   i. Geben Sie die Ladungsdichte $\rho(\vec{r})$ an.
   ii. Überprüfen Sie den Betrag der Gesamtladung.
   iii. Berechnen Sie das $\vec{E}$-Feld dieser Konfiguration.

(c) Eine (unendlich dünne) Kugeloberfläche mit Radius R_a ist homogen geladen mit Q.
   i. Geben Sie die Ladungsdichte $\rho(\vec{r})$ an.
   ii. Überprüfen Sie den Betrag der Gesamtladung.
   iii. Konzentrisch zu dieser Oberfläche wird nun eine weitere Kugeloberfläche mit $R_i < R_a$ und $-Q$ eingebracht. Berechnen Sie die Kapazität $C = Q/U$ dieses „Kugelkondensators“, wobei U die Potentialdifferenz zwischen den Schalen ist.

(d) Eine (unendlich dünne) Kreisscheibe mit Radius R ist homogen geladen mit Q.
   i. Geben Sie die Ladungsdichte $\rho(\vec{r})$ an.
   ii. Überprüfen Sie den Betrag der Gesamtladung.
   iii. Berechnen Sie das Dipolmoment $\vec{p}$ dieser Konfiguration.

(e) Innerhalb einer Kugel vom Radius R fällt die Ladungsdichte $\rho(r)$ vom Mittelpunkt bis zm Kugelrand hin linear auf den Wert Null ab. Die Gesamtladung in der Kugel beträgt Q.
   i. Geben Sie die radialsymmetrische Ladungsdichte $\rho(\vec{r})$ ausgedrückt durch Q und R und stellen Sie sicher, dass der Betrag der Gesamtladung Q ist.
   ii. Berechnen Sie für das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\hat{e}_r$ die r-abhängige Feldstärke $E(r)$.
   iii. Welche Arbeit W musste aufgewendet werden, um die Kugel mit der vorgebenen Ladungsverteilung aufzuladen?
   Hinweis: Substituieren Sie $r = sR$ im Integral über die Energiedichte $w = \frac{1}{8\pi}\vec{E}^2$.

Aufgabe 2: Wasserstoffatom

Das elektrostatische Potential eines Wasserstoffatoms ist

$$\Phi(\vec{r}) = q\frac{\exp\left(-\frac{2r}{a_0}\right)}{r}\left(1 + \frac{r}{a_0}\right),$$

wobei q der Betrag der Elektronenladung und a_0 der Bohrsche Radius ist.

(a) Bestimmen Sie die zugehörige Ladungsdichte $\rho(\vec{r})$.

(b) Verifizieren Sie, dass die Gesamtladung wirklich 0 ist.

Hinweis: Spalten Sie den singulären Term $\frac{q}{r}$ ab.

Aufgabe 3: Doppelkopf ....

In den Übungen wurden bereits das Potential Φ und das $\vec{E}$-Feld einer Punktladung vor einer Metallplatte berechnet. Diese Aufgabe ist wesentlich komplizierter.
Berechnen Sie das Potential und das elektrische Feld im Bereich $z > 0$ von 2 Ladungen vor einer Metallplatte bei $z = 0$. Die beiden Ladungen sind starr im Abstand d verbunden und tragen die Ladungen q und $-q$. Der Mittelpunkt befindet sich im Abstand $z_M > \frac{d}{2}$ zur Plattenoberfläche. Die Verbindungsachse der Punktladungen steht im Winkel α zur Oberflächennormale.

(a) Geben Sie alle Bedingungen an, die das elektrostatische Potential $\Phi(\vec{r})$ im Bereich $z > 0$ erfüllen muss.

(b) Berechnen Sie das Potential und das elektrische Feld für $z > 0$ mit Hilfe der Bildladungsmethode.

(c) Berechnen sie die induzierte Oberflächenladungsdichte σ.

(d) Noch komplizierter: Geben sie die Anzahl an Bildladungen an die benötigt werden, wenn man die zwei Ladungen zwischen zwei parallele Platten legt.

Aufgabe 4: Spiegeldipol I ....

Ein elektrischer Dipol $\vec{p} = (0, 0, p)$ befindet sich am Punkt $\vec{a} = (0, 0, a)$ (mit $a > 0$) über einer in der xy-Ebene liegenden, geerdeten Platte.

(a) Bestimmen Sie unter Verwendung der Spiegelladungsmethode das Potential $\Phi(\vec{r})$ im oberen Halbraum $z > 0$ zur Randbedingung, dass es auf der Metallplatte $z = 0$ verschwindet. Überprüfen Sie diese Randbedingung explizit.
Hinweis: Das Potential eines elektrischen Dipols $\vec{p}$ am Ursprung lautet:

$$\Phi_{\text{dip}}(\vec{r}) = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{|\vec{r}|^3}.$$

(b) Berechnen Sie die auf der Metallplatte influenzierte Flächenladungsdichte $\sigma(x, y)$.

(c) Berechnen Sie die Kraft $\sim \hat{e}_z$, die auf den Dipol wirkt. Stellen Sie hierzu den Dipol durch zwei entgegengesetzte Punktladungen $\pm q$ mit sehr kleinem Abstand δ dar, so dass $p = q\delta$ ist.
Hinweis: Verwenden Sie die Taylorentwicklung

$$(1 + x)^{-2} = 1 - 2x + 3x^2 + \mathcal{O}(x^3).$$

Aufgabe 5: Gemischte Magnetostatik ....

(a) Ausgehend vom differentiellen Kraftzusammenhang in der Magnetostatik

$$\mathrm{d}\vec{F}\,(\vec{x}) = \frac{I}{c}\mathrm{d}\vec{\ell} \times \vec{B}(\vec{x})$$

zeigen Sie, dass die Kraft, die auf eine Testladung q (welche sich mit Geschwindigkeit $\vec{v}$ im Magnetfeld $\vec{B}$ bewegt) wirkt,

$$\vec{F} = q\left(\frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}\right)$$

ist.

Wir betrachten im Folgenden stromerzeugende (bzw. stromdurchflossene) Objekte mit Zentrum (bzw. Schwerpunkt) bei $\vec{0}$. Wir interessieren uns für verschiedene physikalische Größen im gesamten Raum. Wählen Sie für jedes Problem ein geeignetes Koordinatensystem. Alle angegebenen Größen sind zeitlich konstant.

(b) Eine homogen mit Q geladene (unendlich dünne) Kreisscheibe mit Radius R rotiert mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega} = \omega\hat{e}_z$.

i. Geben Sie die Stromdichte $\vec{j}(\vec{r})$ an.

ii. Berechnen Sie das zugehörige magnetische Dipolmoment $\vec{\mu}$.

Hinweis: Für die Geschwindigkeit bei starrer Rotation gilt $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$.

(c) Ein unendlich langer Vollzylinder mit Radius R_i ist in z-Richtung orientiert. Konzentrisch dazu liegt ein (unendlich dünner) Zylindermantel mit Radius $R_a > R_i$. Ein konstanter Strom I fließt über den Vollzylinder (in z-Richtung) und über den Zylindermantel wieder zurück.

i. Geben Sie die Stromdichte $\vec{j}(\vec{r})$ an.

ii. Berechnen Sie das $\vec{B}$-Feld dieser Anordnung im gesamten Raum.

(d) Eine gerade (sehr dicht gewickelte) Spule kreisförmigen Querschnitts (Radius R) der Länge L mit N Windungen ist in z-Richtung entlang ihrer Symmetrieachse orientiert und wird von einem Strom I durchflossen. Die Drahtdicke ist vernachlässigbar.

i. Geben Sie die Stromdichte $\vec{j}(\vec{r})$ an.

ii. Nun geht $L \to \infty$, während wir das Verhältnis $\frac{N}{L}$ konstant halten.
Welchen Wert erwarten Sie für das Wegintegral $\int_{-L/2}^{L/2} \mathrm{d}z\, B_z(z)$? Geben Sie einen Rechenweg und eine Erklärung.

Hinweis: Gehen Sie davon aus, dass das Magnetfeld (mit zunehmendem L) im Außenraum der Spule verschwindet und ansonsten konstant ist.

(e) Ein stromdurchflossener, zylindrischer Draht mit Radius R und unendlicher Länge ist entlang seiner Symmetrieachse (in z-Richtung) orientiert.

i. Geben Sie die Stromdichte $\vec{j}(\vec{r})$ an.

ii. Berechnen Sie anschließend das (stetige) Vektorpotential $\vec{A}$ und das $\vec{B}$-Feld dieser Anordnung im gesamten Raum.

Hinweis: Da die Funktion $A(\rho)$ nur vom Radius ρ abhängt, gilt für den Laplaceoperator in Zylinderkoordinaten:

$$\triangle A(\rho) = A''(\rho) + \frac{1}{\rho}A'(\rho) = \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left[\rho A'(\rho)\right]$$

Aufgabe 6: Plattenkondensator mit eingeschobenem Dielektrikum ....

In einem rechteckigen Plattenkondensator (Plattenabstand a und Fläche $b \cdot c$) ist um eine Strecke x (mit $0 < x < b$) ein Dielektrikum der relativen Dielektrizitätskonstante $\varepsilon > 1$ eingeschoben. Der restliche Raum zwischen den Platten ist leer. Die Ladungen auf der unteren und oberen Platte sind Q und $-Q$. Alle Felder zwischen den Platten können als (stückweise) homogen angenommen werden.

(a) Welche Beziehung gilt zwischen den elektrischen Feldern E_1 und E_2? Welche Beziehung gilt zwischen den dielektrischen Verschiebungen D_1 und D_2. Begründen Sie ihre Aussagen.

(b) Welcher Zusammenhang besteht zwischen D_1, D_2 und den Flächenladungsdichten σ_1, σ_2? Begründen Sie ihre Aussagen.

(c) Berechnen Sie in Abhängigkeit von Q und x das elektrische Feld $\vec{E}$ und die dielektrische Verschiebung $\vec{D}$ im gesamten Raum zwischen den Platten.

(d) Berechnen Sie in Abhängigkeit von Q und x die elektrostatische Feldenergie

$$W(x) = \frac{1}{8\pi} \int \mathrm{d}V \, \vec{E} \cdot \vec{D}.$$

(e) Mit welcher Kraft $\vec{F} \sim \hat{e}_x$ wird das Dielektrikum in den Kondensator hineingezogen?

Aufgabe 7: Punktladung vor Dielektrikum ....

Sei der rechte Halbraum ($x > 0$) von einem Dielektrikum mit einem dielektrischen Medium mit $\varepsilon_r > 1$ gefüllt. Im linken Halbraum ($x < 0$) befinde sich eine Punktladung der Ladung q an der Stelle $-a\hat{e}_x$.

(a) Berechnen sie das Elektrische Feld im ganzen Raum.

(b) Berechnen Sie die auf der Grenzfläche influenzierte Polarisationsflächenladungsdichte.

Aufgabe 8: Gemischte Elektrodynamik . . . .

(a) Ein leitender Kreisring ($x^2 + y^2 = R^2, z = 0$) rotiert mit konstanter Winkelgeschwindigkeit um die x-Achse. Es wirkt das homogene Magnetfeld $\vec{B} = B_0 \hat{e}_z$.

i. Geben Sie die (rotierende) Flächennormale $\vec{n}(t)$ an.

ii. Berechnen Sie die Spannung U_{ind}, die im Ring induziert wird.

(b) Berechnen Sie die Selbstinduktivität pro Längeneinheit $\frac{L}{\ell}$ von folgenden (unendlich langen und zylindersymmetrischen) Objekten.

i. Ein Hohlrohrleiter bestehend aus zwei (unendlich dünnen) Zylindermänteln mit Innenradius R_i und Außenradius $R_a > R_i$, bei dem der Strom I auf dem inneren Mantel hin- und auf dem äußeren Mantel zurückfließt.

ii. Ein Koaxialkabel, bestehend aus einem inneren, leitenden Vollzylinder vom Radius R_i und konzentrisch dazu einem leitendem Zylindermantel mit Radius R_a, bei dem der Strom I auf dem Vollzylinder hin- und auf dem Mantel zurückfließt.

(c) Eine kreisförmigen Leiterschleife (Radius R) befinde sich in der xy-Ebene. Ein hochfrequenter Wechselstrom $\vec{j}(\vec{r}, t) = \vec{j}_0 \cos(\omega t)$ mit $\vec{j}_0 = I_0 \delta(\rho - R)\delta(z)\hat{e}_\varphi$ erzeugt M1-Strahlung. Die Ladungsdichte kann als verschwindend angenommen werden.

i. Berechnen Sie das retardierte Skalarpotential $\Phi(\vec{r}, t)$ sowie Vektorpotential $\vec{A}(\vec{r}, t)$ in Fernfeldnäherung.
Zur Kontrolle:
$$\vec{A}(\vec{r}, t) = -\frac{k\mu}{r} \sin(\omega t - kr) \sin\theta \hat{e}_\varphi,$$
wobei $\mu = |\vec{\mu}|$ das (statische) magnetische Dipolmoment der Leiterschleife ist.

ii. Berechnen Sie hieraus $\vec{E}(\vec{r}, t)$ und $\vec{B}(\vec{r}, t)$ in Fernfeldnäherung.
Hinweis: Sie können die Rotation in Zylinderkoordinaten verwenden:
$$\text{rot } \vec{A}(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\varphi \sin\theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right]\hat{e}_r + \left[\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi)\right]\hat{e}_\theta + \\ + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right]\hat{e}_\varphi\,.$$

Aufgabe 9: Aufladen eines Plattenkondensators . . . .

Ein Plattenkondensator bestehend aus zwei parallelen kreisförmigen Platten vom Radius R wird beginnend bei $t = 0$ aufgeladen. Das zeitabhängige elektrische Feld zwischen den Platten hat die Form $\vec{E}(\vec{r}, t) = E(t)\hat{e}_z$ mit $E(t) = Kt$ für $t \geq 0$.

(a) Berechnen Sie das durch den Verschiebungsstrom induzierte Magnetfeld $\vec{B}(\vec{r})$ im Kondensator als Funktion des Abstandes ρ von der Symmetrieachse. Gehen Sie davon aus, dass das Magnetfeld (wie bei einem stromdurchflossen Leiter) nur eine azimuthale Komponente hat: $\vec{B}(\vec{r}) = B(\rho)\hat{e}_\varphi$.

(b) Berechnen Sie den Poynting Vektor
$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi}\left(\vec{E} \times \vec{B}\right).$$

(c) Berechnen Sie den gesamten Energiefluss J in den Kondensator hinein sowie die im Kondensator gespeicherte Feldenergie
$$\mathcal{E}_{\text{em}}(t) = \frac{1}{8\pi}\int \mathrm{d}V \left(\vec{E}^{\,2} + \vec{B}^{\,2}\right).$$
Zeigen Sie, dass
$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_{\text{em}}(t)}{\mathrm{d}t} = J$$
gilt.

(d) Zeigen Sie, dass die lineare Zeitabhängigkeit $E(t) = Kt$ für ein Aufladefeld der Form $\vec{E}(\vec{r}, t) = E(t)\hat{e}_z$ als einzige mit den gekoppelten Maxwellgleichungen konsistent ist.
Hinweis: Betrachten Sie die Wellengleichung für $\vec{E}$.

Aufgabe 10: Gemischte Spezielle Relativitätstheorie

(a) Geben Sie explizite Darstellungen für die folgenden Ausdrücke. Gehen Sie drauf ein, wie die Tensoren unter Lorentz-Transformationen Λ transformieren.
Beispiel:

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu = \begin{pmatrix} x^0 & -x^1 & -x^2 & -x^3 \end{pmatrix}_\mu \qquad {x'}_\mu = \Lambda_\mu{}^\nu x_\nu, \quad \text{wobei } x^\mu \equiv \begin{pmatrix} ct \\ \vec{x} \end{pmatrix}^\mu$$

i. $g^\mu{}_\nu$
ii. $g^\mu{}_\mu$
iii. ∂_ρ
iv. $a^\mu b_\mu c^\alpha - a_\nu c^\alpha b^\nu$, mit beliebigen Orts-Vierervektoren a, b, c.
v. $\partial_\mu x_\nu$
vi. j^μ
vii. $F^{\mu\nu}$

(b) Geben Sie folgende Zusammenhänge und Gleichungen in kovarianter Formulierung an. Gehen Sie darauf ein, wie die verwendeten Größen (z.B. $j^\mu, F^{\mu\nu}, \ldots$) definiert sind und wie sie unter Lorentz-Transformationen Λ transformieren (sofern nicht bereits in (a) gefragt).

i. Die Kontinuitätsgleichung.
ii. Definition des Viererpotentials und dessen Eichfreiheit.
iii. Die Maxwell-Gleichungen.
Überprüfen Sie explizit, dass dies in vektorieller Schreibweise mit den in der Vorlesung hergeleiteten Maxwell-Gleichungen übereinstimmt.
Hinweis: Elektrisches und Magnetisches Feld sind in folgender Weise im Feldstärke-Tensor $F^{\mu\nu}$ enthalten:

$$E^i = F^{i0} \qquad B_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk} F^{kj}.$$

(c) Betrachten Sie einen Boost in x-Richtung, gegeben durch

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} \qquad y' = y \qquad z' = z$$

mit

$$\beta \equiv \frac{v}{c} \qquad \gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

i. Zeigen, dass diese Transformation mit der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit c vereinbar ist.
ii. Ein sich in x-Richtung gleichförmig bewegender Stab habe in seinem Ruhesystem die Länge ℓ_0. Leiten Sie her, welche Länge dieser Stab im Laborsystem hat.
iii. Eine Uhr bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit in x-Richtung. In ihrem Ruhesystem misst sie eine Zeiteinheit t. Leiten Sie her, welche Zeit im Laborsystem vergeht.
iv. Wie transformieren die Komponenten des $\vec{E}$- und $\vec{B}$-Feldes unter dieser Transformation?

Aufgabe 11: Relativistische Kinematik

(a) Bei einem Stoßprozess trifft ein relativistisches Teilchen mit Impuls $\vec{p}_{\mathrm{P}}$ und Masse m_{P} auf ein ruhendes Teilchen mit Masse m_{T}.

i. Bestimmen Sie die Lorentz-Faktoren β und γ für den Boost in das Schwerpunktsystem.
ii. Welche Impulse $\vec{\tilde{p}}_{\mathrm{P}}, \vec{\tilde{p}}_{\mathrm{T}}$ haben die Teilchen im Schwerpunktsystem?

(b) Ein Teilchen der Masse M zerfalle in zwei Tochterteilchen der Massen m_1 und m_2, wobei $M > m_1 + m_2$ gilt. Zeigen Sie, dass sich im Schwerpunktsystem die verfügbare (relativistische) Energie auf die beiden Zerfallsprodukte folgendermaßen verteilt:

$$\frac{E_1}{c^2} = \frac{M^2 + m_1^2 - m_2^2}{2M} \qquad \frac{E_2}{c^2} = \frac{M^2 + m_2^2 - m_1^2}{2M}.$$

Aufgabe 12: Magnetfeld einer stromdurchflossene Leiterschleife ....

In der xy-Ebene liegt um den Ursprung zentriert eine kreisförmige Leiterschleife mit dem Radius R. Durch diese fließt im Gegenuhrzeigersinn der konstante Strom I.

(a) (4 Punkte) Berechnen Sie (**ohne** Verwendung von Symmetrieargumenten) das Magnetfeld $\vec{B}(\vec{r})$ auf der z-Achse, d.h. für die Punkte $\vec{r} = (0, 0, z)$.
Hinweis: Für eine gegebene Stromdichte $\vec{j}(\vec{r})$ ergibt das Biot-Savart-Gesetz folgendes Magnetfeld:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int \mathrm{d}^3 r' \, \vec{j}(\vec{r}\,') \times \frac{\vec{r} - \vec{r}\,'}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3}.$$

(b) (4 Punkte) Bestimmen Sie das magnetische Dipolmoment $\vec{\mu}$ und das zugehörige Dipolfeld auf der z-Achse. Verifizieren Sie für große Entfernungen auf der z-Achse die Übereinstimmung mit dem Ergebnis aus (a).
Hinweis: Das magnetische Feld $\vec{B}$ eines magnetischen Dipols am Ursprung hat die Form:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \left(\frac{3\vec{r} \cdot (\vec{\mu} \cdot \vec{r})}{|\vec{r}|^5} - \frac{\vec{\mu}}{|\vec{r}|^3} \right)$$

(c) (2 Punkte) Welchen Wert hat das Magnetfeld $\vec{B}(\vec{r})$ an den Punkten $\vec{r} = (x, y, 0)$ in der xy-Ebene mit sehr großem Abstand vom Ursprung?

Aufgabe 13: Reflexion und Brechung ....

Gegeben sei die Grenzfläche $z = 0$ zwischen zwei dielektrischen Medien ($j = 1, 2$) mit den Brechungsindizes $n_j = \sqrt{\varepsilon_j}$. In beiden Medien gibt es ebene elektromagnetische Wellen

$$\vec{E}_j(z, t) = \left(E_j^+ \mathrm{e}^{i(k_j z - \omega t)} + E_j^- \mathrm{e}^{i(-k_j z - \omega t)} \right) \hat{e}_x$$

mit vorwärts und rückwärts laufenden Komponenten, die senkrecht auf die Grenzfläche treffen.

(a) (6 Punkte) Zeigen Sie, dass die Stetigkeitsbedingungen für die transversalen Felder auf folgenden linearen Zusammenhang zwischen den komplexen Feldamplituden führen

$$\begin{pmatrix} E_1^+ \\ E_1^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_2^+ \\ E_2^- \end{pmatrix}$$

und berechnen Sie die Koeffizienten α und β in Abhängigkeit der Brechungsindizes n_1, n_2.

Betrachten Sie nun die Brechung und Reflexion einer in Medium 1 in positive z-Richtung laufenden, auf die Grenzfläche treffenden Welle (es gilt somit $E_2^- = 0$).

(a) (2 Punkte) Drücken Sie den zeitlichen Mittelwert $\langle S_j^{\pm} \rangle$ der Energiestromdichte (in Richtung $\pm\hat{e}_z$) durch die elektrische Feldamplitude $E_j^{\pm}$ aus.
Hinweis: Der gemittelte Poynting Vektor $\langle \vec{S} \rangle$ kann mit der Feldenergiedichte $w_{\mathrm{em}} = \frac{1}{8\pi\mu}|\vec{B}_0|^2$ verknüpft werden via:

$$\langle \vec{S} \rangle = \langle w_{\mathrm{em}} \rangle \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \frac{\vec{k}}{|k|}$$

(b) (3 Punkte) Berechnen Sie das Reflexionsvermögen $R = \langle S_1^- \rangle / \langle S_1^+ \rangle$ und das Transmissionsvermögen $T = \langle S_2^+ \rangle / \langle S_1^+ \rangle$ jeweils als Funktion von n_1, n_2 und zeigen Sie, dass $R + T = 1$ gilt.

Aufgabe 14: Spiegeldipol II ....

Ein in x-Richtung zeigender, elektrischer Dipol $\vec{p} = (p, 0, 0)$ befindet sich am Punkt $\vec{a} = (0, 0, a)$ (mit $a > 0$) über einer in der xy-Ebene liegenden, geerdeten (unendlich ausgedehnten) Metallplatte.

(a) (5 Punkte) Bestimmen Sie unter Verwendung der Methode der Spiegelladungen das Potential $\Phi(\vec{r})$ im oberen Halbraum $z > 0$ zu der Randbedingung, dass es auf der Metallplatte ($z = 0$) verschwindet. Überprüfen Sie diese Randbedingung explizit.
Hinweis: Das Potential eines elektrischen Dipols $\vec{p}$ am Ursprung lautet:

$$\Phi_{\text{Dipol}}(\vec{r}) = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{|\vec{r}|^3}.$$

(b) (3 Punkte) Berechnen Sie die auf der Metallplatte influenzierte Flächenladungsdichte $\sigma(x, y)$.

(c) (3 Punkte) Bestimmen Sie ausgehend vom Dipol-Dipol-Wechselwirkungspotential die Kraft $\vec{F} \sim \vec{e}_z$, die der Spiegeldipol $\vec{p}$ am Spiegelpunkt $\vec{a}\,'$ auf den Dipol $\vec{p}$ am Punkt $\vec{a}$ ausübt.
Hinweis: Das Wechselwirkungspotential zweier elektrischer Dipole $\vec{p}_1$ und $\vec{p}_2$ in der Relativposition $\vec{r}$ hat folgende Form:

$$W_{12} = \left(\frac{\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2}{|\vec{r}|^3} - \frac{3(\vec{p}_1 \cdot \vec{r})(\vec{p}_2 \cdot \vec{r})}{|\vec{r}|^5} \right)$$

Aufgabe 15: Koaxialkabel ....

Ein (sehr langes) gerades Koaxialkabel besteht aus einem inneren, leitenden Vollzylinder mit Radius R_1 und konzentrisch dazu einem leitenden Zylindermantel mit Radius $R_2 > R_1$ und vernachlässigbarer Dicke, welcher als Rückleitung dient. Die Zylinderachse liegt auf der z-Achse.

(a) (3 Punkte) Geben Sie die Stromdichte $\vec{j}(\vec{r}) \sim \vec{e}_z$ im Koaxialkabel an, wenn der hin- und rückfließende Strom I jeweils gleichmäßig über den Leiterquerschnitt verteilt ist.

(b) (6 Punkte) Berechnen Sie das zugehörige (stetige) Vektorpotential $\vec{A}(\vec{r}) = A(\rho)\vec{e}_z$ im ganzen Raum.
Hinweis: Da die Funktion $A(\rho)$ nur vom Radius ρ abhängt, gilt für den Laplaceoperator in Zylinderkoordinaten:

$$\triangle A(\rho) = A''(\rho) + \frac{1}{\rho} A'(\rho) = \frac{1}{\rho} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho} \left[\rho A'(\rho) \right]$$

(c) (3 Punkte) Berechnen Sie die Selbstinduktivität pro Längeneinheit L/ℓ des Koaxialkabels.
Hinweis: Die Definition der Selbstinduktivität ist:

$$L = \frac{1}{I^2} \int \mathrm{d}^3 r \, \vec{j}(\vec{r}) \cdot \vec{A}(\vec{r}).$$