Aufgabe 1.1

Montag, 21. März 2016 14:03

a) Homogen geladenes Hohlrohr

(i) $$\rho(\vec{r}) = \frac{Q}{(R_a^2 - R_i^2)\pi h}\,\Theta\left(\frac{h}{2}-|z|\right)\Theta(\rho-R_i)\Theta(R_a-\rho)$$

(ii) $$q_{ges} = \underbrace{\int_0^\infty \rho\, d\rho\ \Theta(\rho-R_i)\Theta(R_a-\rho)}_{=\frac{R_a^2}{2}-\frac{R_i^2}{2}}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dz\ \Theta\left(\frac{h}{2}-|z|\right)}_{=h}\underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{=2\pi}\frac{Q}{(R_a^2-R_i^2)\pi h}$$

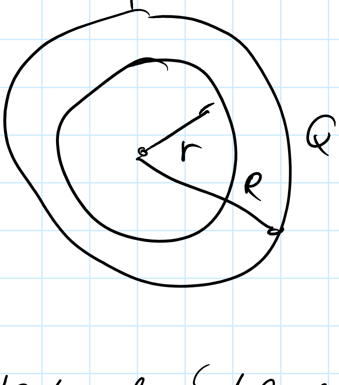
$$= Q \quad \checkmark$$

b) Homogen geladene Kugel

(i) $$\rho(\vec{r}) = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}\Theta(R-r) = \frac{3Q}{4\pi R^3}\Theta(R-r)$$

(ii) $$q_{ges} = \int_0^R r^2 dr \int_0^\pi \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi\ \frac{3Q}{4\pi R^2} = Q \quad \checkmark$$

(iii) Gaußscher Satz $\qquad \vec{E}(\vec{r}) = E(r)\cdot\hat{e}_r \quad$ (Symmetrie)



$$\oiint_{F=\partial V} d\vec{F}\cdot\vec{E}(\vec{r}) = 4\pi\int_0^r r'^2 dr' \int d\Omega\ \frac{3Q}{4\pi R^3}\Theta(R-r')$$

Kugeloberfläche: $d\vec{F} = r^2 d\Omega\cdot\hat{e}_r$

(Integral $\int d\Omega = 4\pi$)

$$\Rightarrow 4\pi r^2 E(r) = 16\pi^2\int_0^r dr'\, r'^2\ \frac{3Q}{4\pi R^3}\Theta(R-r')$$

$$R^3 r^2 \int_0 dr' \, r' \, \Theta(R-r')$$

$\boxed{r>R}$

$$E(r) = \frac{3Q}{R^3 r^2} \underbrace{\int_0^R dr' \cdot r'^2}_{R^3/3} = \frac{Q}{r^2}$$

$\boxed{r>R}$

$$E(r) = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{3Q}{R^3} \overbrace{\int_0^r dr' \cdot r'^2}^{\frac{r^3}{3}} = \frac{1}{r^2} \left(\frac{r}{R}\right)^3$$

$$\Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = \hat{e}_r \begin{cases} r/R^3 & , \; r<R \\ 1/r^2 & , \; r>R \end{cases}$$

c) Homogen geladene Kugeloberfläche

(i) $\rho(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi r^2} \delta(r-R)$

(ii) $q_{ges} = \underbrace{\int_0^\infty r^2 dr \; \delta(r-R) \cdot \frac{1}{r^2}}_{=1} \underbrace{\int d\Omega}_{=4\pi} \frac{Q}{4\pi} = Q \checkmark$

(iii) $\rho(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi r^2} \left[\delta(r-R_a) - \delta(r-R_i)\right]$

Gaußscher Satz

$$4\pi r^2 E(r) = 4\pi \int dV' \rho(\vec{r}') = 4\pi \begin{cases} 0 & , \; r<R_i \\ -Q & , \; R_i<r<R_a \\ 0 & , \; r>R_a \end{cases}$$

Endliches Volumen mit r

$$\Rightarrow E(r) = \frac{Q}{r^2} \Theta(r-R_i)\,\Theta(R_a-r)$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\Phi(\vec{r}) \Rightarrow E(r) = -\frac{\partial \Phi(r)}{\partial r}$$

$$\Rightarrow \Phi(r) = -\int_{\infty}^{r} dr'\, E(r')$$

$$\Phi(R_a) = -\int_{\infty}^{R_a} dr'\, E(r') = 0$$

$$\Phi(R_i) = -\int_{\infty}^{R_i} dr'\, E(r') = -\int_{R_a}^{R_i} \frac{-Q}{r'^2}\, dr' = \frac{-Q}{r}\Big|_{R_a}^{R_i}$$

$$= -Q\left(\frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_a}\right)$$

$$U = \Delta\Phi = \Phi(R_a) - \Phi(R_i) = Q\left(\frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_a}\right)$$

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{R_a R_i}{R_a - R_i}$$

d) Homogen gel. Kreisscheibe

(i) $\rho(\vec{r}) = \frac{Q}{R^2\pi}\,\delta(z)\,\Theta(R-\rho)$

(ii) $q_{ges} = \underbrace{\int_0^\infty \rho\, d\rho\, \Theta(R-\rho)}_{=R^2/2} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dz\, \delta(z)}_{=1} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{2\pi} \frac{Q}{R^2\pi} = Q$ ✓

(iii) $\vec{p} \propto \int d^3r'\, \vec{r}'\rho(\vec{r}')$ $\qquad \vec{r}' = \rho'\hat{e}_{\rho'} + z'\hat{e}_{z'}$

$$= \frac{Q}{R^2\pi}\int_0^\infty \rho'\, d\rho' \int_{-\infty}^{\infty} dz\, \delta(z) \int_0^{2\pi} d\varphi' \left[\rho'\hat{e}_{\rho'} + z'\hat{e}_{z'}\right] = \vec{0}$$

da $\int_0^{2\pi} d\varphi\, \hat{e}_\rho = \int_0^{2\pi} d\varphi' \begin{pmatrix} \cos\varphi' \\ \sin\varphi' \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$

da $\int\limits_0 d\varphi \, e_\rho = d\varphi \begin{pmatrix} \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = 0$

und $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(z) \cdot z = 0$

1.1 Fortsetzung nach 1.4

Aufgabe 1.2

Montag, 21. März 2016 13:18

$$\phi = q \frac{\exp\left(-\frac{2r}{a_0}\right)}{r}\left(1 + \frac{r}{a_0}\right)$$

$$= q\left(\underbrace{\frac{\exp(-2r/a_0)(1+\frac{r}{a_0})-1}{r}}_{\text{regulär}} + \underbrace{\frac{1}{r}}_{\text{singulär}}\right)$$

$$\Delta \frac{1}{r} = -4\pi\,\delta^3(\vec{r})$$

a Poisson-Gl : $\rho(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi}\Delta\phi(\vec{r})$

$$= \frac{q}{4\pi}\left(-4\pi\,\delta^3(\vec{r}) + \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial_r^2}\left(\exp\left(-\frac{2r}{a_0}\right)\left(1+\frac{r}{a_0}\right)-1\right)\right)$$

$$= \ldots = q\left(\underbrace{\delta^3(r)}_{\text{Punktladung}} - \underbrace{\frac{\exp(-2r/a_0)}{\pi a_0^3}}_{\text{Elektronenwolke}}\right)$$

b Gesamtladung

$$Q_{tot} = \int d^3r\,\rho(\vec{r}) = q\left[\int \delta(\vec{r})\,d^3r - \int d\Omega\int_0^\infty \frac{\exp(-\frac{2r}{a_0})}{\pi a_0^3} r^2\,dr\right.$$

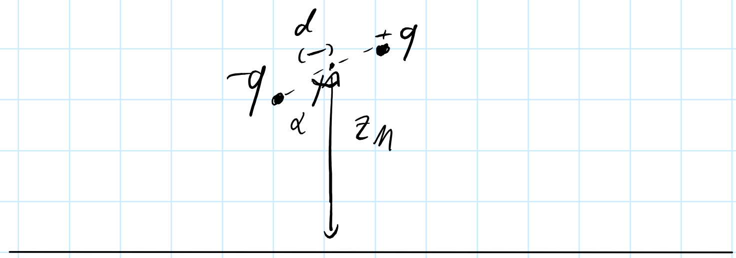
$$= q - \frac{4q}{a_0^3}\int_0^\infty r^2\exp\left(-\frac{2r}{a_0}\right)dr$$

Trick $\int_0^\infty r^2\exp(-\alpha r)\,dr = \int_0^\infty \frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}\exp(-\alpha r) = \frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}\int_0^\infty dr\exp(-\alpha r)$

$$= \frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}\left[-\frac{1}{\alpha}\exp(-\alpha r)\right]_0^\infty = \frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}\left[\frac{1}{\alpha}\right] = \frac{2}{\alpha^3}$$

Hier $\alpha = \frac{2}{a_0} \Rightarrow Q_{tot} = q - \frac{4q}{a_0^3}\cdot 2\cdot\frac{a_0^3}{8} = 0$

Aufgabe 1.3



$$\vec{r}_q = \begin{pmatrix} \frac{d}{2}\sin\alpha \\ 0 \\ z_n + \frac{d}{2}\cos\alpha \end{pmatrix} \qquad \vec{r}_{-q} = \begin{pmatrix} -\frac{d}{2}\sin\alpha \\ 0 \\ -z_n - \frac{d}{2}\cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}\,'_q = \begin{pmatrix} d/2\,\sin\alpha \\ 0 \\ -z_n - \frac{d}{2}\cos\alpha \end{pmatrix} \qquad \vec{r}\,'_{-q} \begin{pmatrix} -d/2\,\sin\alpha \\ 0 \\ -z_n + \frac{d}{2}\cos\alpha \end{pmatrix}$$

a Bedingungen:

$$\Delta\phi(\vec{r}) = \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0} \qquad \rho(\vec{r}) = q\,\delta(\vec{r}-\vec{r}_q) - q\,\delta(\vec{r}-\vec{r}_{-q})$$

Randbedingungen $\quad \frac{\partial\phi}{\partial x}\Big|_{z=0} = \frac{\partial\phi}{\partial y}\Big|_{z=0} = 0$

b Potential: Einfach Potential für 4 Punktladungen

$$\Rightarrow \phi(\vec{r}) = q\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_q|} - \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_{-q}|} - \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_q\,'|} + \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'_{-q}|}\right)$$

$$= q\left(\frac{1}{\left((x-\frac{d}{2}\sin\alpha)^2 + y^2 + (z-z_n-\frac{d}{2}\cos\alpha)^2\right)^{\frac{1}{2}}}\right.$$

$$- \frac{1}{\left((x-\frac{d}{2}\sin\alpha)^2 + y^2 + (z-z_n+\frac{d}{2}\cos\alpha)^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$- \frac{1}{\dots}$$

$$- \frac{1}{\left((x-\frac{d}{2}\sin\alpha)^2+y^2+(z+z_n+\frac{d}{2}\cos\alpha)^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$+ \frac{1}{\left((x+\frac{d}{2}\sin\alpha)^2+y^2+(z+z_n-\frac{d}{2}\cos\alpha)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \Bigg)$$

(Nicht ableiten wir wissen das $\vec{E}$ Feld für 4 Punktladungen)

$$\Rightarrow \vec{E} = -\vec{\nabla}\phi(|\vec{r}|) =$$

$$= q\left(\frac{\vec{r}-\vec{r}_q}{|\vec{r}-\vec{r}_q|^3} - \frac{\vec{r}-\vec{r}_{-q}}{|\vec{r}-\vec{r}_{-q}|^3} - \frac{\vec{r}-\vec{r}\,'_q}{|\vec{r}-\vec{r}\,'_q|^3} + \frac{\vec{r}-\vec{r}\,'_{-q}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'_{-q}|^3}\right)$$

$$= q\Bigg(\frac{(x-\frac{d}{2}\sin\alpha)\vec{e}_x+y\vec{e}_y+(z-z_n-\frac{d}{2}\cos\alpha)\vec{e}_z}{\left[(x-\frac{d}{2}\sin\alpha)^2+y^2+(z-z_n-\frac{d}{2}\cos\alpha)^2\right]^{3/2}}$$

$$- \frac{(x+\frac{d}{2}\sin\alpha)\vec{e}_x+y\vec{e}_y+(z-z_n+\frac{d}{2}\cos\alpha)\vec{e}_z}{\left[(x+\frac{d}{2}\sin\alpha)^2+y^2+(z-z_n+\frac{d}{2}\cos\alpha)^2\right]^{3/2}}$$

$$- \frac{(x-\frac{d}{2}\sin\alpha)\vec{e}_x+y\vec{e}_y+(z+z_n+\frac{d}{2}\cos\alpha)\vec{e}_z}{\left[(x-\frac{d}{2}\sin\alpha)^2+y^2+(z+z_n+\frac{d}{2}\cos\alpha)^2\right]^{3/2}}$$

$$- \frac{(x+\frac{d}{2}\sin\alpha)\vec{e}_x+y\vec{e}_y+(z+z_n-\frac{d}{2}\cos\alpha)\vec{e}_z}{\left[(x+\frac{d}{2}\sin\alpha)^2+y^2+(z+z_n-\frac{d}{2}\cos\alpha)^2\right]^{3/2}}\Bigg)$$

c

$$\sigma = \frac{1}{4\pi}\vec{E}(z=0^+) =$$

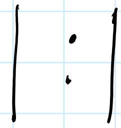
$$= \frac{q}{2\pi}\Bigg(-\frac{z_n+\frac{d}{2}\cos\alpha}{\left[x-\frac{d}{2}\sin\alpha)^2+y^2+(z_n+\frac{d}{2}\cos\alpha)^2\right]^{3/2}}$$

$$+ \frac{z_n-\frac{d}{2}\cos\alpha}{\left[(x+\frac{d}{2}\sin\alpha)^2+y^2+(z_n-\frac{d}{2}\cos\alpha)^2\right]^{3/2}}$$

Das E-Feld wurde hier komplett berechnet, da explizit danach gefragt wurde. Für die influenzierte Flächenladungsdichte reicht es $E(x,y,0) = -\operatorname{grad}\phi|_{z=0}$

zu berechnen.

d ∞ da

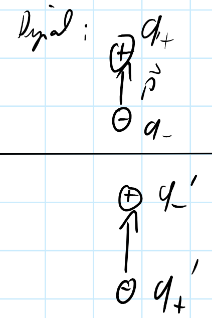


$\in$ unendlich Bildladungen, da jede an der gegenüberliegenden Platte noch einmal gespiegelt wird.

Dieses Problem ergibt eine unendliche Reihe an Bildladungen deren Potential analytisch errechenbar ist

Aufgabe 1.4

Montag, 21. März 2016 13:52



$\Rightarrow$ Spiegeldipol $\vec p' = (0, 0, p)$ an Punkt $\vec a' = -\vec a = (0, 0, -a)$

Daraus folgt mit dem Standardpotential für das Dipol mit dem Superpositionsprinzip

$$\phi(\vec r) = \left\{ \frac{\vec p \cdot (\vec r - \vec a)}{|\vec r - \vec a|^3} + \frac{\vec p\,' (\vec r - \vec a\,')}{|\vec r - \vec a\,'|^3} \right\}$$

$$= p \left\{ \frac{z-a}{[x^2+y^2+(z-a)^2]^{3/2}} + \frac{z+a}{[x^2+y^2+(z+a)^2]^{3/2}} \right\}$$

Überprüfe Bedingung $\phi = 0$ auf Platte.

$$\phi(x,y,0) = p \left\{ \frac{-a}{[x^2+y^2+a^2]^{3/2}} + \frac{a}{[x^2+y^2+a^2]^{3/2}} \right\} = 0 \checkmark$$

b) Influenzierte Flächenladungsdichte auf der Metallplatte

$$\sigma = \frac{1}{4\pi} \vec n \cdot \vec E |_{Fläche} \qquad \vec n = \vec e_z \text{ trivial}$$

$$\Rightarrow \sigma(x,y) = \frac{1}{4\pi} E_z(x,y,0)$$

$$= -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial z} \phi(x,y,z)|_{z=0}$$

Zwischenrechnung:

$$\frac{\partial}{\partial z} \frac{z \pm a}{[x^2+y^2+(z\pm a)^2]^{3/2}} =$$

$$= 1 \qquad - \frac{3}{2} \cdot 2 \cdot (z \pm a)(z \pm a)$$

$$\partial z \quad [x^2+y^2+(z\mp a)^2]$$

$$= \frac{1}{[x^2+y^2+(z\pm a)^2]^{5/2}} + \frac{-\frac{3}{2}\cdot 2\cdot(z\pm a)(z\pm a)}{[x^2+y^2+(z\pm a)^2]^{5/2}}$$

$$= \frac{x^2+y^2-2(z\pm a)^2}{[x^2+y^2+(z\pm a)^2]^{5/2}}$$

Eingesetzt ergibt das für die Flächenladungsdichte

$$\sigma(x,y) = \frac{-p}{4\pi}\,\frac{x^2+y^2-2a^2}{[x^2+y^2+a^2]^{5/2}}\cdot(2)$$

Beide Terme
im Potential
haben selbe Ableitung

c

Zur Lösung dieser Aufgabe existieren 3 Möglichkeiten:

1. Verwende die Dipol-Dipol Wechselwirkung:

$$W_{12} = \left\{\frac{\vec{p}\cdot\vec{p}\,'}{|\vec{r}|^3} - \frac{3(\vec{p}\cdot\vec{r})(\vec{p}\,'\cdot\vec{r})}{|\vec{r}|^5}\right\}$$

$\vec{r}$ ist hier der Abstand zwischen Dipol und Spiegeldipol,

also $\underline{\underline{2}}\,a\cdot\vec{e}_z$ des weiteren $\vec{p}=\vec{p}\,'$

Die Kraft erhält man dann aus der Ableitung nach $\vec{r}$ der WW.

$$\Rightarrow \quad \vec{F} = -\vec{e}_z\,\frac{\partial}{\partial|\vec{r}|}W_{12} = -\vec{e}_z\,\frac{\partial}{\partial(2a)}W_{12} = \vec{e}_z\;2p^2\,\frac{-3}{(2a)^4}$$

$$= -\vec{e}_z\,\frac{3p^2}{8a^4}$$

Man kann die Kraft auch direkt aus den Kräften zu den Ladungen und deren Spiegelladungen:

$$\vec{F} = \vec{e}_z\;q^2\left[\underbrace{\frac{-1}{4a^2}}_{q_+\text{ mit }q_+'} - \underbrace{\frac{1}{4(a+\delta)^2}}_{q_-\text{ mit }q_-'} + \underbrace{\frac{(-1)^2}{(2a+\delta)^2}}_{q_-\text{ mit }q_+'} + \underbrace{\frac{1}{(2a+\delta)^2}}_{q_+\text{ mit }q_-'}\right]$$

wobei δ der Abstand zu den Ladungen des Dipols ist.

Entwickle für kleine δ bis zu $\mathcal{O}(\delta^2)$

$$(1+x)^{-2} = 1 - 2x + 3x^2 + \mathcal{O}(x^3) :$$

$$\vec{F} = \vec{e}_z \frac{q^2}{4a^2}\left[-1 - \left(1+\frac{\delta}{a}\right)^{-2} + 2\left(1+\frac{\delta}{2a}\right)^{-2}\right]$$

$$= \vec{e}_z \frac{q^2}{4a^2}\left[-1 - 1 + 2\frac{\delta}{a} - 3\left(\delta/a\right)^2 + 2 - 4\frac{\delta}{2a} + 6\left(\frac{\delta}{2a}\right)^2 + \dots\right]$$

$$= \vec{e}_z \frac{q^2}{4a^2}\left[\frac{\delta^2}{a^2}\left(\frac{3}{2}-3\right)\right] + \mathcal{O}(\delta^3)]$$

$$\Rightarrow \vec{F} = -\vec{e}_z \frac{3p^2}{8a^4}$$

Ausdruck

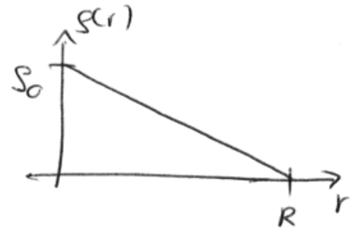
Mittwoch, 12. April 2017 23:24

1.1c

Ansatz für Ladungsdichte

e) (i) $\rho(r) = \rho_0 \left(1 - \frac{r}{R}\right) \Theta(R-r)$

linearer Abfall



Gesamtladung ist Q

$$Q = \int d^3r \; \rho(r) = \underbrace{\int d\Omega}_{4\pi} \int_0^\infty dr \; r^2 \rho_0 \left(1 - \frac{r}{R}\right) \Theta(R-r)$$

$$= 4\pi \rho_0 \int_0^R dr \; r^2 \left(1 - \frac{r}{R}\right) = 4\pi \rho_0 \left(\frac{R^3}{3} - \frac{R^4}{4R}\right)$$

$$= \frac{\pi}{3} \rho_0 R^3 \quad \Rightarrow \quad \rho_0 = \frac{3Q}{\pi R^3}$$

$$\Rightarrow \boxed{\rho(r) = \frac{3Q}{\pi R^4} (R-r) \; \Theta(R-r)}$$

(ii) Sphärische Symmetrie $\Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = E(r) \, \hat{e}_r$

Gauß'sche Kugeloberfläche mit

$d\vec{F} = r^2 d\Omega \; \hat{e}_r$

Gauß'scher Satz

$$\oint_{\partial V} d\vec{F} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = 4\pi \int_V d^3r' \, \rho(\vec{r}')$$

$$\rightarrow \int d\Omega \, r^2 E(r) = 4\pi r^2 E(r) \overset{!}{=} 16\pi^2 \int_0^r dr' \, r'^2 \rho(r')$$

$\boxed{r > R}$ $E(r) = Q \frac{1}{r^2}$

$\boxed{r < R}$ $E(r) = \frac{4}{r^2} \frac{3Q}{R^4} \int_0^r dr' \, r'^2 (R - r')$

$$= \frac{12\,Q}{R^4} \frac{1}{r^2} \left(\frac{Rr^3}{3} - \frac{r^4}{4}\right) = \frac{Q}{R^4} (4Rr - 3r^2)$$

$$= \frac{12 Q}{R^4} \frac{1}{r^2} \left(\frac{Rr^3}{3} - \frac{r^4}{4} \right) = \frac{Q}{R^4} (4Rr - 3r^2)$$

(iii) Energie zum Aufladen $\hat{=}$ Feldenergie

$$W = \int d^3r \; w(\vec{r}) = \frac{1}{2} \int_0^\infty dr \; r^2 \; E(r)^2$$

Bereiche aufteilen

$$\stackrel{\downarrow}{=} \frac{1}{2} Q^2 \left\{ \int_0^R dr \, r^2 \, \frac{(4Rr - 3r^2)^2}{R^8} + \int_R^\infty dr \; r^2 \; \frac{1}{r^4} \right\}$$

Substitution: $r = sR \qquad dr = R\,ds$ (oder Polynome integrieren)

$$\Rightarrow W = \frac{Q^2}{2} \frac{1}{R} \left\{ \underbrace{\int_0^1 ds \; s^2 \, (4s - 3s^2)^2}_{17/35} + \underbrace{\int_1^\infty ds \; \frac{1}{s^2}}_{-\frac{1}{s}\Big|_1^\infty = +1} \right\}$$

$$= \frac{Q^2}{2} \frac{1}{R} \cdot \frac{52}{35} = \underline{\underline{\frac{26 \; Q^2}{35 \; R}}}$$

Ausdruck

Mittwoch, 12. April 2017 23:42

Aufgabe 2.1

a) (i) $\vec{j}(\vec{r}) = \rho \cdot \vec{v} = \rho \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \frac{Q}{R^2\pi} \Theta(R-\rho)\,\delta(z) \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r})$

$\vec{\omega} = \omega \cdot \hat{e}_z$

$\Rightarrow \vec{\omega} \times \vec{r} = \omega \cdot \hat{e}_z \times [\rho \cdot \hat{e}_\rho + z \cdot \hat{e}_z]$

$= \rho \cdot \omega \cdot \hat{e}_\varphi$

$\Rightarrow \boxed{\vec{j}(\vec{r}) = \frac{Q\omega}{R^2\pi}\, \rho\, \Theta(R-\rho)\, \delta(z) \cdot \hat{e}_\varphi}$

$\hat{e}_\rho \times \hat{e}_\varphi = \hat{e}_z$
$\hat{e}_z \times \hat{e}_\rho = \hat{e}_\varphi$
$\hat{e}_\varphi \times \hat{e}_z = \hat{e}_\rho$

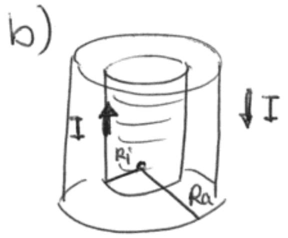
(ii) $\vec{\mu} = \frac{1}{2c} \int d^3r' \; \vec{r}\,' \times \vec{j}(\vec{r}\,')$

$= \frac{1}{2c} \int_0^\infty \rho\, d\rho' \int_{-\infty}^{\infty} dz' \int_0^{2\pi} d\varphi' \; [\rho' \cdot \hat{e}_{\rho'} + z' \hat{e}_{z'}] \times \hat{e}_{\varphi'}$

$\cdot \frac{Q\omega}{R^2\pi} \cdot \rho' \, \Theta(R-\rho')\, \delta(z')$

$= \frac{1}{2c} \underbrace{\int_0^R \rho^3 d\rho'}_{R^4/4} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi'}_{2\pi} \underbrace{[\hat{e}_{\rho'} \times \hat{e}_{\varphi'}]}_{\hat{e}_{z'}} \cdot \frac{Q\omega}{R^2\pi}$

$= \underline{\underline{\frac{Q\omega R^2}{4c} \cdot \hat{e}_z}}$

b) 

(i) $\vec{j}(\vec{r}) = \left[\frac{I}{\pi R_i^2}\,\Theta(R_i-\varrho) - \frac{I}{2\pi R_a}\,\delta(\varrho - R_a)\right]\hat{e}_z$

<u>Kurze Kontrolle</u>

$$\int_{\text{Querschnitt}} d\vec{F}\cdot\vec{j} = \int d\varrho\,\varrho\int d\varphi\;\hat{e}_z\cdot\vec{j}$$

$$= \frac{I}{\pi R_i^2}\,\pi R_i^2 - \frac{I}{2\pi R_a}\cdot 2\pi R_a = 0$$

(ii) <u>Symmetriebetrachtung</u>

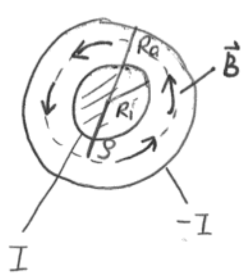
$$\vec{j}(\vec{r}) = j(\varrho)\,\hat{e}_z \implies \vec{A}(\vec{r}) = A(\varrho)\cdot\hat{e}_z$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \vec{\nabla}\times\vec{A}(\vec{r}) = -\frac{\partial A(\varrho)}{\partial\varrho}\,\hat{e}_\varphi = B(\varrho)\cdot\hat{e}_\varphi$$

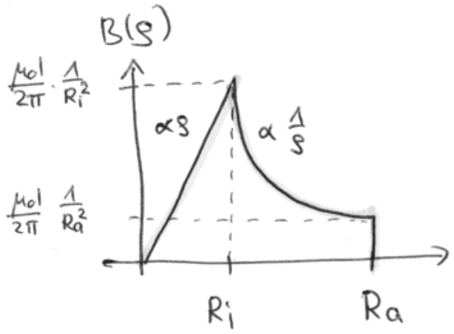
<u>Ampere</u>:

$$\oint_{\partial F} d\vec{r}\cdot\vec{B}(\vec{r}) = 2\pi\varrho\,B(\varrho) = \frac{4\pi}{c}\iint_F d\vec{F}\cdot\vec{j}(\vec{r}) = \frac{4\pi}{c}\,I_{\text{eing}}$$

$$\Rightarrow B(\varrho) = \frac{2}{c\,\varrho}\begin{cases} I\cdot\frac{\pi\varrho^2}{\pi R_i^2}, & \varrho < r \\ I, & R_i < \varrho < R_a \\ 0, & \varrho > R_a \end{cases}$$



$$= \frac{2I}{c}\begin{cases} \varrho/R_i^2, & \varrho < R_i \\ 1/\varrho, & R_i < \varrho < R_a \\ 0, & \varrho > R_a \end{cases}$$



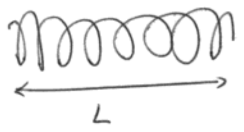
<u>Anmerkung:</u>

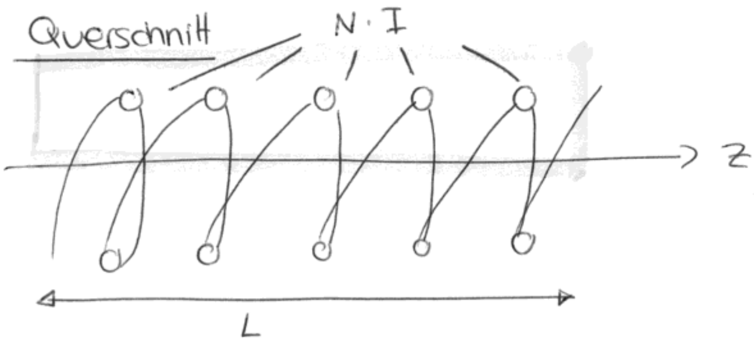
$$A(\varrho) = -\int_0^{\varrho} d\varrho\;B(\varrho) + A_0$$

liefert folgendes Vektorpotential

$$A(\varrho) = -\frac{I}{c}\begin{cases} \varrho^2/R_i^2, & \varrho < R_i \\ 1 + 2\ln(\varrho/R_i), & R_i < \varrho < R_a \\ 1 + 2\ln(R_a/R_i), & \varrho > R_a \end{cases}$$

c)



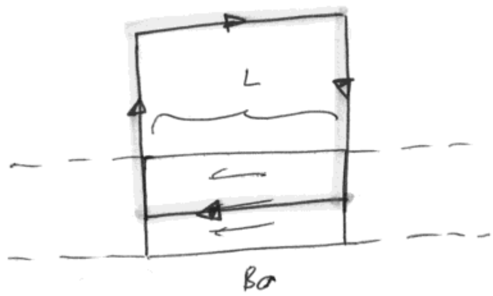


(i) $\vec{j}(\vec{r}) = \frac{N \cdot I}{L} \Theta\left(\frac{L}{2} - |z|\right) \delta(R-\varrho)\, \hat{e}_\varphi$

(ii) Annahme $\quad \vec{B}(\vec{r}) = B_0 \cdot \Theta(R-\varrho) \cdot \hat{e}_z \quad (*)$

Physikalisch gesehen betrachten wir hier eine unendlich lange Spule mit konstantem N/L - Verhältnis. Bei der endlichen Spule ist dies (*) nicht der Fall, da sich die Feldlinien nicht schließen würden.

Betrachten wir das Ampere'sche Gesetz mit dieser Annahme:



$$\oint d\vec{r} \cdot \vec{B}(\vec{r}) = B_0 \cdot L = \frac{4\pi}{c} I_{eing} = \frac{4\pi}{c} N \cdot I$$

$$= \int_{-L/2}^{L/2} d\vec{r} \cdot B_0 \cdot \hat{e}_z\, \Theta(R-\varrho)$$

$$\int_{-L/2}^{L/2} dz\, B_z(z) = \frac{4\pi}{c} \cdot N \cdot I$$

d) 

(i) $\vec{j}(\vec{r}) = \frac{I}{R^2\pi}\,\Theta(R-\rho)\cdot\hat{e}_z$

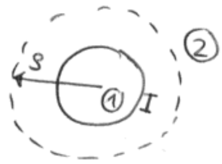
(ii) Symmetriebetrachtung

$\vec{j}(\vec{r}) = j(\rho)\ \hat{e}_z \quad \Rightarrow \quad \vec{A}(\vec{r}) = A(\rho)\cdot\hat{e}_z$

$\vec{B}(\vec{r}) = \vec{\nabla}\times\vec{A}(\vec{r}) = -\frac{\partial A(\rho)}{\partial\rho}\,\hat{e}_\varphi = B(\rho)\cdot\hat{e}_\varphi$

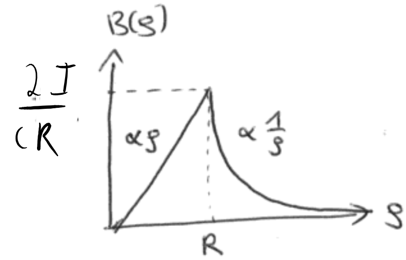
Ampere: $\int d\vec{r}\cdot\vec{B}(\vec{r}) = 2\pi\rho\ B(\rho) = \frac{4\pi}{c}\ I_{eing}$

$B(\rho) = \frac{2}{c}\ \frac{I_{eing}}{\rho} = \frac{2}{c}\frac{I}{\rho}\begin{cases}\rho^2/R^2, & \rho<R\\ 1, & \rho>R\end{cases}$



Bereich ① $\boxed{\rho<R}$

$B^{(1)}(\rho) = \frac{2I}{c}\ \frac{\rho}{R^2}$



Bereich ② $\boxed{\rho>R}$

$B^{(2)}(\rho) = \frac{2I}{c}\ \frac{1}{\rho}$

Vektorpotential $A(\rho) = -\int_0^\rho d\rho'\ B(\rho') + \overset{=0\ \text{(durch Wahl)}}{A_0}$

$A^{(1)}(\rho) = -\int_0^\rho d\rho'\cdot\underbrace{\frac{2I}{c}\frac{\rho'}{R^2}}_{B^{(1)}(\rho)} = -\frac{I}{c}\frac{\rho^2}{R^2}$

$A^{(2)}(\rho) = -\int_0^R d\rho'\ \frac{2I}{c}\frac{\rho'}{R^2} - \int_R^\rho d\rho'\cdot\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ \frac{1}{\rho'}$

$= -\frac{I}{c} - \frac{2I}{c}\ \ln\left(\frac{\rho}{R}\right)$

$\Rightarrow\ \vec{B}(\vec{r}) = \frac{2I}{c}\ \hat{e}_\varphi\begin{cases}\rho/R^2, & \rho<R\\ 1/\rho, & \rho>R\end{cases}$

$\Rightarrow\ \vec{A}(\vec{r}) = -\frac{I}{c}\,\hat{e}_z\begin{cases}\rho^2/R^2, & \rho<R\\ 1+2\ln(\rho/R), & \rho>R\end{cases}$

Alternativ über die Feldgleichung

$$-\frac{4\pi}{c}\vec{j} = \Delta \vec{A} = \frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial \varrho}\left(\varrho\frac{\partial A(\varrho)}{\partial \varrho}\right)\hat{e}_z$$

$$\rightarrow -\frac{4I}{cR^2}\Theta(R-\varrho)\cdot\varrho = \frac{\partial}{\partial \varrho}\left(\varrho\frac{\partial A(\varrho)}{\partial \varrho}\right)$$

1 $\boxed{\varrho<R}$

$$-\frac{4I}{c\pi R^2}\int_0^{\varrho} d\varrho'\,\varrho' = \varrho\frac{\partial A(\varrho)}{\partial \varrho} - C_1$$

$$\Rightarrow -\frac{2I}{c}\frac{\varrho}{R^2} + \underbrace{\frac{C_1}{\varrho}}_{=0 \text{ (wegen Endlichkeit bei 0)}} = \frac{\partial A(\varrho)}{\partial \varrho}$$

$$\Rightarrow A(\varrho) = -\frac{2I}{cR^2}\int_0^{\varrho} d\varrho'\,\varrho' + \underbrace{A_0}_{=0 \text{ (Wahl)}} = -\frac{I}{c}\frac{\varrho^2}{R^2}$$

$\boxed{\varrho>R}$

$$0 = \frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial \varrho}\left(\varrho\frac{\partial A(\varrho)}{\partial \varrho}\right) \Rightarrow C_3 = \varrho\frac{\partial A(\varrho)}{\partial \varrho} \Rightarrow \frac{C_3}{\varrho} = \frac{\partial A(\varrho)}{\partial \varrho}$$

$$C_3\cdot\ln\left(\frac{\varrho}{C_4}\right) + C_5$$

Eingeführt aus Dimensionsgründen.

Stetigkeit:
$$-\frac{I}{c}\frac{\varrho^2}{R^2}\Big|_{\varrho=R} = C_3\ln\left(\frac{\varrho}{C_4}\right) + C_5\Big|_{\varrho=R}$$

$C_4 = R$

$$-\frac{I}{c} = C_5$$

Stetig Diff'bar
$$-\frac{2I}{c}\frac{\varrho}{R^2}\Big|_{\varrho=R} = C_3\cdot\frac{1}{\varrho}\Big|_{\varrho=R}$$

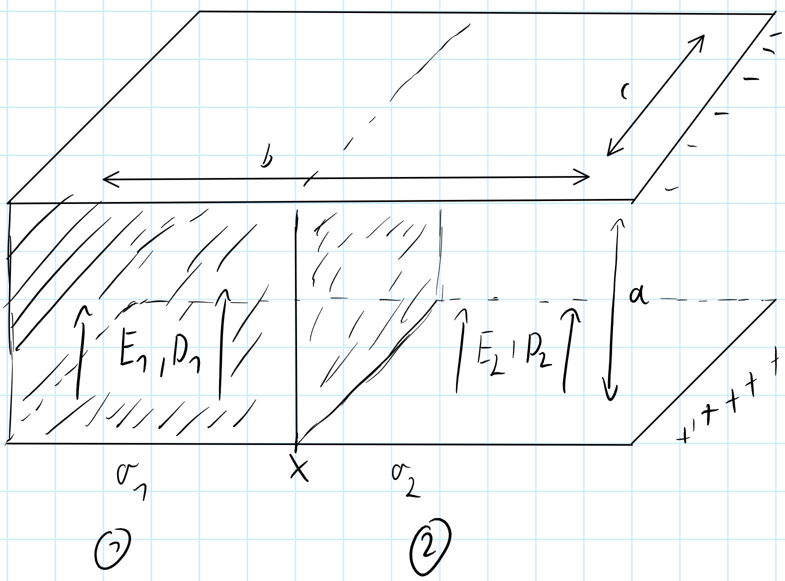
$$-\frac{2I}{c}\cdot\frac{1}{R} = C_3\cdot\frac{1}{R} \Rightarrow C_3 = -\frac{2I}{c}$$

$$\Rightarrow \vec{A}(\vec{r}) = -\frac{I}{c}e_z\begin{cases}\varrho^2/R^2, & \varrho<R\\ 1+2\ln(\varrho/R), & \varrho>R\end{cases}$$

$\longrightarrow$ $\vec{B}$-Feld durch ableiten.

Aufgabe 2.2

Dienstag, 22. März 2016 13:14



Die Tangentialkomponente des $\vec{E}$-Feldes ist stetig (siehe VL).

Da das $\vec{E}$-Feld an der Grenzfläche zu 1 und 2 nur eine Tangentialkomponente $\Rightarrow \vec{E}_1 = \vec{E}_2$

Des weiteren gilt:

$D_1 = \varepsilon_r E_1 \quad D_2 = \varepsilon_r' E_2$ D_2 ist in Vakuum. $\Rightarrow \varepsilon_r' = 1$ $\Rightarrow D_2 = E_2$

Da $E_1 = E_2$ erhalten wir als Zusammenhang zw. $D_1 = \varepsilon D_2$

b,

Aus der Vorlesung wissen wir über die Stetigkeit des $\vec{D}$-Feldes:

$\sigma = \vec{n} \cdot \vec{D} \,|_{Fläche}$

Daraus folgt für die Flächenladungsdichten

$\sigma_1 = D_1 \qquad \sigma_2 = D_2$

c) Gesamtladung der unteren Platte ist Q.

daher muss gelten, dass:

$$Q \overset{!}{=} \int dF \sigma = \sigma_1 \cdot x \cdot c + \sigma_2 \cdot (b-x) \cdot c$$

$$= c(x\varepsilon + b - x) \quad E_1 \quad \left(\text{Erinnerung: } \begin{array}{l} \sigma_1 = D_1 = \varepsilon E_1 \\ \sigma_2 = D_2 = E_2 = E_1 \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow E_{1/2} = \frac{Q/c \; 4\pi}{(x\varepsilon_r + b - x)} = \frac{Q/c \; 4\pi}{(b + (\varepsilon_r - 1)x)}$$

$$\Rightarrow D_1 = \frac{\varepsilon_r \, Q/c \; 4\pi}{b + (\varepsilon_r - 1)x} \qquad D_2 = \frac{Q/c \; 4\pi}{b + (\varepsilon_r - 1)x}$$

d elektrostatische Feldenergie

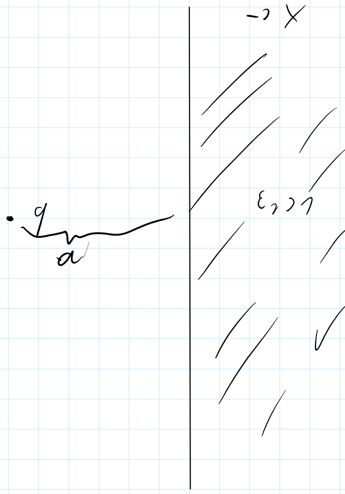
$$W(x) = \frac{1}{8\pi} \int dV \, \vec{D} \cdot \vec{E} = \frac{1}{8\pi} ac \, \frac{Q^2/c^2 \; 16\pi^2}{[b + (\varepsilon_r - 1)x]^2} (\varepsilon_x + b - x)$$

$$\Rightarrow W(x) = \frac{Q^2/a \;\; 2\pi}{c \;\; [b + (\varepsilon - 1)x]}$$ $\Rightarrow$ Feldenergie nimmt für wachsende x bei $\varepsilon_r > 1$ ab.

Achtung x ist gegenüber dem Integral keine Variable

e Kraft mit der das Dielektrikum in den Kondensator gezogen wird. (Kraft ist die Ableitung d. Energie)

$$F = -\frac{dW(x)}{dx} = \frac{Q^2 \; a(\varepsilon - 1) \; 2\pi}{c \quad [b + (\varepsilon - 1)x]^2}$$



1. Spiegelladung setzen mit unbekannter Ladung q'', da keine Metallplatte.
(Spiegelladung $q' = -q$ gilt nur für Metallplatten)

$\Rightarrow$ E-Feld (nur für $x<0$):

$$\vec{E}(\vec{r}) = q\,\frac{\vec{r}+a\vec{e}_x}{|\vec{r}+a\vec{e}_x|^3} + q'\,\frac{\vec{r}-a\vec{e}_x}{|\vec{r}-a\vec{e}_x|^3} \quad (x<0)$$

für den rechten Halbraum müssen wir die Stärke q' d. Originalladung variieren:

für $x>0$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{\varepsilon}\left(q''\,\frac{\vec{r}+a\vec{e}_x}{|\vec{r}+a\vec{e}_x|^3}\right)$$

Nun lassen sich die Ladungen aus den Stetigkeitsbedingungen

keine freien Ladungen $\Rightarrow \sigma_{frei} = 0$
Normalkomponente bei $\vec{r}=0$

$$\Rightarrow D_{x<0}(0) = D_{x>0}(0) \Rightarrow q - q' = q'' \quad (I)$$

$$\vec{n}\times\vec{E}_{x>0} = \vec{n}\times\vec{E}_{x<0} \Rightarrow \vec{n}\times(\vec{r}+a\vec{e}_x)\,q + \vec{n}\times(\vec{r}-a\vec{e}_x)\,q' = \vec{n}\times(\vec{r}+a\vec{e}_x)$$

$$\underbrace{\Rightarrow E_{x<0}(\vec{r}) = E_{x>0}(\vec{r})}_{\text{für } x=0;\ \vec{r}\neq 0} \Rightarrow q+q' = \frac{q''}{\varepsilon_r} \quad (II)$$

Beachte, dass gilt: $\vec{n}\times(\vec{r}\pm a\vec{e}_x)$
$= \vec{n}\times\vec{r} \pm a\,\vec{n}\times\vec{e}_x)$
$= \vec{n}\times\vec{r}$, da $\vec{n}\parallel\vec{e}_x$.

Nun haben wir 2 Gleichungen für 2 Unbekannte, woraus wir q' und q'' berechnen können.

$$(II)^*:\quad q+q' = \frac{q''}{\varepsilon_r} \Rightarrow q'' = \varepsilon_r(q+q')$$

$$(I) = (II)^*\quad (q+q')\varepsilon_r = q - q' \quad \text{auflösen nach } q':$$

$$q' = \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\,q$$

und daraus: $q'' = \frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon}\,q$

Polarisations-Flächenladungsdichte:

$$\sigma_{pol} = -\vec{P}_{x>0}\cdot\vec{e}_x\,|_{x=0} \qquad \vec{P}_{x<0} \overset{!}{=} 0$$

$$\vec{D} = \varepsilon_r\,\vec{E} = \vec{E} + 4\pi P$$

$$\Rightarrow \vec{P} = \frac{\vec{D} - \vec{E}}{4\pi} \overset{!}{=} \frac{\varepsilon - 1}{4\pi} \vec{E}$$

$$\Rightarrow \vec{P}_{x>0} = \frac{(\varepsilon-1)}{\varepsilon} \left(q'' \frac{\vec{r} + a\vec{e}_x}{|\vec{r} + a\vec{e}_x|^3} \right) =$$

$$= \frac{(\varepsilon-1)}{\varepsilon} \left(\frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon} q \frac{\vec{r} + a\vec{e}_x}{|\vec{r} + a\vec{e}_x|^3} \right)$$

$$\Rightarrow \sigma_{ind} = -\vec{P}_{x>0} \cdot \vec{e}_x \Big|_{x=0} = 2\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon+1} q \frac{a}{(y^2+z^2+a^2)^{3/2}}$$

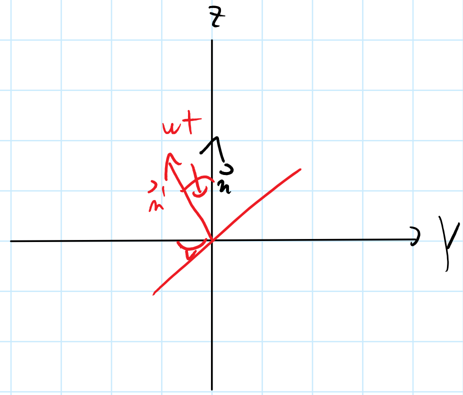
Aufgabe 3.1

Mittwoch, 23. März 2016 15:05

a Flächennormale: rotiert um x Achse. $\vec{n} \perp \vec{v}$

i)

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin(\omega t) \\ \cos(\omega t) \end{pmatrix} \qquad |\vec{n}| = 1 \checkmark$$



ii) $\vec{B} = B_0 \, \vec{e}_z$

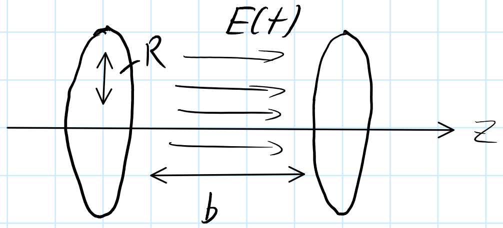
$$U_{ind} = -\frac{1}{c}\frac{d\phi}{dt} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int_F d\vec{F}\cdot\vec{B}$$

$$= -\frac{B_0}{c}\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\int_F d\vec{F}\cdot\vec{e}_z}_{=\text{Kreisfläche mit } \vec{n} \text{ s.o.}} = -\frac{B_0}{c}\frac{\partial}{\partial t} R^2\pi\cos(\omega t)$$

$$= \omega\frac{B_0}{c}R^2\pi\sin(\omega t)$$

Aufgabe 3.2

Mittwoch, 23. März 2016 11:42



$$\vec{E} = E(t)\,\hat{e}_z$$

$$\frac{dE}{dt} = K = \text{const.}$$

a Benutze folgende Maxwellgleichung

$$\text{rot}\,\vec{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{1}{c} K \vec{e}_z$$

Randeffekte dürfen vernachlässigt werden, weshalb folgt:

$$\vec{B}(\vec{r}) = B(\rho)\,\vec{e}_\varphi$$

Nun gibt es 2 Mgl. das B-Feld zu Berechnen:

1. Mgl: Ampere'sches Durchflutungsgesetz

$$\oint_{C=\partial F} d\vec{r}\cdot\vec{B}(\vec{r}) = \iint_F d\vec{F}\cdot\text{rot}\,\vec{B}$$

wähle C : $\vec{r} = \rho\,\vec{e}_\rho \quad d\vec{r} = \rho\,\vec{e}_\varphi \quad \varphi = [0, 2\pi]$

wir verwenden hier Zylinderkoordinaten, d.h. $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$.

Damit:

$$\int_0^{2\pi} d\varphi\,\rho\,B(\rho)\,\underbrace{\vec{e}_\varphi\cdot e_\varphi}_{1} = 2\pi\rho\,B(\rho)$$

$$\overset{\text{Ampere s.o.}}{=} \int^{\rho} d\rho' \int^{2\pi} d\varphi\;\rho'\,\vec{e}_z\cdot\vec{e}_z\,\frac{1}{c}K = \frac{1}{c}K\,2\pi\frac{\rho^2}{2}$$

$$\Rightarrow B(\rho) = \frac{1}{c} K \frac{\rho}{2}$$

Möglichkeit 2:
Benutze die Rotation in Zylinderkoordinaten.

$$\text{rot}\,\vec{B} = \left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial B_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial B_\varphi}{\partial z}\right]\vec{e}_\rho + \left[\frac{\partial B_\rho}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial \rho}\right]\vec{e}_\varphi +$$

$$+ \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho B_\varphi) - \frac{\partial B_\rho}{\partial \varphi}\right]\vec{e}_z$$

da $\vec{B}$ nur von ρ abhängt,
und aus $\text{rot}\,\vec{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial E}{\partial t}$, da keine freien Ströme vorhanden sind.

$$\Rightarrow \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left[\rho\, B(\rho)\right]\vec{e}_z \overset{!}{=} \mu_0 \varepsilon_0 \vec{K} e_z$$

$$\Rightarrow \rho\, B(\rho) = \int d\rho \frac{1}{c} K \rho = \frac{1}{c} K \frac{\rho^2}{2} + C$$

$$\Rightarrow B(\rho) = \frac{1}{c} K \frac{\rho}{2}.$$

C muss 0 sein, dass $B(0)$ endlich ist

b. Berechnung des Poynting-Vektors.

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi}\vec{E}\times\vec{B}$$

$$= \frac{c}{4\pi} E(t) \frac{1}{c} K \frac{\rho}{2} \underbrace{\vec{e}_z \times \vec{e}_\varphi}_{= -e_\rho}$$

beachte Rechtshändigkeit des Kreuzproduktes.

verwende: $E(t) = Kt$

$$\Rightarrow \vec{S} = \frac{1}{8\pi} K^2 \rho t \underbrace{\begin{pmatrix} -\cos\varphi \\ -\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}}$$

$= -\vec{e}_\rho$

C

(i) Berechnung des Energieflusses im Kondensator.

$$J = \iint_{\partial V} d\vec{F} \cdot \vec{S}$$

wobei der Normalenvektor der Mantelfläche $\vec{n} = -\vec{e}_\rho$ ist. Die Deckelflächen tragen nicht bei, da deren Normalenvektor $\vec{n} \propto \vec{e}_z$ ist, und $\vec{e}_z \cdot \vec{e}_\rho = 0$.

$$\Rightarrow J = \frac{1}{8\pi} K^2 R t \underbrace{\iint dF}_{\text{Mantelfläche} := 2\pi R l}$$

$$\Rightarrow J = \frac{1}{4} K^2 R^2 l t$$

(ii) Berechnen sie die im Kondensator gespeicherte Feldenergie

$$\mathcal{E}(t) = \int_{\text{Zylinder}} d^3r \, w_{em} = \int_{\text{Zylinder}} d^3r \left[\frac{1}{8\pi} \vec{E}^2(\vec{r},t) + \frac{1}{8\pi} \vec{B}^2(\vec{r},t) \right]$$

$\vec{B}(\vec{r},t)$ ist zeitlich konstant

$$\Rightarrow \int_0^l dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R d\rho \, \rho \left[\frac{1}{8\pi} K^2 t^2 + \frac{1}{c^2} \frac{K^2 \rho^2}{32\pi} \right]$$

$$= \frac{1}{8\pi} \pi l R^2 K^2 t^2 + \frac{1}{64 c^2} K^2 R^4 l = \frac{1}{8} l R^2 K^2 \left(t^2 + \frac{R^2}{8c^2} \right)$$

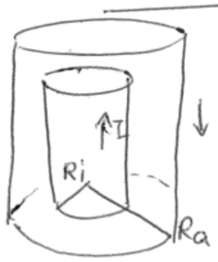
Test ob gilt $\frac{d\mathcal{E}}{dt} = J$

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{1}{4} l R^2 K^2 t = J \checkmark$$

Ausdruck

Donnerstag, 13. April 2017 08:50

b) (i) Hohlrohrleiter



Aus Symmetrie folgt wieder

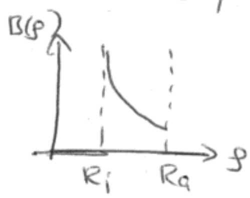
$$\vec{j}(\vec{r}) = \left[\frac{\delta(\rho - R_i)}{2\pi R_i} - \frac{\delta(\rho - R_a)}{2\pi R_a} \right] I \cdot \hat{e}_z$$

$$= j(\rho) \cdot \hat{e}_z \Rightarrow \vec{A}(\vec{r}) = A(\rho) \cdot \hat{e}_z$$

$$\Rightarrow \vec{B}(\vec{r}) = B(\rho)\hat{e}_\varphi = -\frac{dA(\rho)}{d\rho} \cdot \hat{e}_\varphi = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

Ampere: $\oint_{\partial F} d\vec{r} \cdot \vec{B}(\vec{r}) = 2\pi \rho B(\rho) = \frac{4\pi}{c} I_{eing} = \frac{4\pi}{c} \begin{cases} 0 & ; \rho < R_i \\ I & ; R_i < \rho < R_a \\ 0 & ; \rho > R_a \end{cases}$

$$\Rightarrow B(\rho) = \frac{2}{c}\frac{I}{\rho}\, \Theta(\rho - R_i)\, \Theta(R_a - \rho)$$



Selbstinduktivität pro ℓ

$$\frac{L}{\ell} = \frac{1}{I^2} \int_{\text{Querschnitt}} dF \; \vec{j}(\vec{r}_\perp) \cdot \vec{A}(\vec{r}_\perp)$$

Für diese Betrachtung reicht die Kenntnis von $A(\rho)$ für $R_i < \rho < R_a$

$$\rightarrow A(\rho) = -\int_{R_i}^{\rho} d\rho' B(\rho') = -\frac{2I}{c} \ln \rho' \Big|_{R_i}^{\rho} = \frac{2I}{c} \ln\left(\frac{R_i}{\rho}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{L}{\ell} = \frac{1}{I^2} \int_{R_i}^{R_a} d\rho\, \rho \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{2\pi} \cdot \left[\frac{\delta(\rho - R_i)}{2\pi R_i} - \frac{\delta(\rho - R_a)}{2\pi R_a} \right] \cdot I \cdot \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln\left(\frac{R_i}{\rho}\right)$$

$$= \mu_0 \cdot \left[\frac{R_i}{2\pi R_i} \underbrace{\ln\left(\frac{R_i}{R_i}\right)}_{=0} - \frac{R_a}{2\pi R_a} \ln\left(\frac{R_i}{R_a}\right) \right] = \underline{\underline{\frac{2I}{c} \ln\left(\frac{R_a}{R_i}\right)}}$$

Ausdruck

Donnerstag, 13. April 2017 08:53

b) ii) Selbstinduktivität pro Längeneinheit

$$L = \frac{1}{c^2 I^2}\int d^3r\ \vec{j}(\vec{r})\cdot\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\ell}{I^2}\int_{\text{Querschnitt}} dF\ \vec{j}(\vec{r}_\perp)\cdot\vec{A}(\vec{r}_\perp)$$

$$\Rightarrow \frac{L}{\ell} = \frac{1}{I^2}\underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{=2\pi}\int_0^{\infty} d\rho\cdot\rho\ \ \vec{j}(\vec{r}_\perp)\cdot\vec{A}(\vec{r}_\perp)$$

$$= \frac{2\pi}{I^2}\cdot\left(-\frac{I}{c}\right)\int_0^{\infty} d\rho\cdot\rho\left[\frac{I}{R_1^2\pi}\Theta(R_1-\rho)\cdot\frac{\rho^2}{R_1^2} - \frac{I}{2\pi R_2}\delta(\rho-R_2)\left(1+2\ln\frac{R_2}{R_1}\right)\right]$$

$$= -\frac{2}{c}\left\{\underbrace{\int_0^{R_1} d\rho\ \rho^3}_{=R_1^4/4}\cdot\frac{1}{R_1^4} - \underbrace{R_2\cdot\frac{1}{2R_2}}_{\frac{1}{2}}\left(1+2\ln\frac{R_2}{R_1}\right)\right\}$$

$$= \frac{2}{c}\left[\ln\frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{4}\right]$$

$$\vec{j}(\vec{r}_\perp) = \left[\frac{I}{\pi R_1^2}\Theta(R_1-\rho) - \frac{I}{2\pi R_2}\delta(\rho-R_2)\right]\hat{e}_z$$

(Erinnerung)

$$\vec{A}(\vec{r}_\perp) = -\frac{I}{c}\hat{e}_z\begin{cases}\rho^2/R_1^2 & ;\ \rho < R_2\\ 1+2\ln(\rho/R_1) & ;\ R_1<\rho<R_2\\ 1+2\ln(R_2/R_1) & ;\ \rho > R_1\end{cases}$$

Ausdruck

Donnerstag, 13. April 2017 09:03

c) $\vec{j}(\vec{r},t) = \underbrace{I_0\, \delta(\varrho-R)\, \delta(z)\, \cos(\omega t)\, \hat{e}_\varphi}_{\equiv \vec{j}_0(\vec{r})}$

(i) Retardiertes Skalarpotential $\Phi^{ret}(\vec{r},t) = 0$, da $\varrho(\vec{r}) = 0$

Retardiertes Vektorpotential

$$\vec{A}^{ret}(\vec{r},t) = \frac{1}{c}\int d^3r' \frac{\vec{j}(\vec{r},t-\frac{1}{c}|\vec{r}-\vec{r}'|)}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \frac{1}{c}\int d^3r' \frac{\vec{j}_0(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\cos(\omega t - k|\vec{r}-\vec{r}'|)$$

Fernfeld:

Taylor $(1+x)^n \approx 1+nx$, $x \ll 1$

- $\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \approx \frac{1}{r} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right)$ (siehe VL)
- $k|\vec{r}-\vec{r}'| = kr\left(1 - 2\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}'}{r^2} + \mathcal{O}\left(\frac{r'^2}{r^2}\right)\right)^{1/2} = kr\left[1 - \frac{\vec{r}\cdot\vec{r}'}{r^2} + \mathcal{O}\left(\frac{r'^2}{r^2}\right)\right]$
- $\cos(\omega t - k|\vec{r}-\vec{r}'|) = \cos\left(\omega t - kr + k\cdot\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}'}{r} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right)\right)$

$$\approx \cos(\omega t - kr) - k\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}'}{r}\sin(\omega t - kr) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r}\right)$$

wobei $\cos x = \cos x_0 + \frac{d}{dx}\cos x\Big|_{x=x_0}(x-x_0) + \mathcal{O}(x-x_0)^2$

$$= \cos x_0 - \sin(x_0)(x-x_0) + \mathcal{O}(1/r)$$

mit $x = \omega t - kr + k\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}'}{r}$ und $x_0 = \omega t - kr$

$$\Rightarrow \vec{A}(\vec{r},t) \approx \frac{1}{cr}\cos(\omega t - kr)\overbrace{\int d^3r'\, \vec{j}_0(\vec{r}')}^{=0,\ \text{da}\ \vec{j}_0 \propto \hat{e}_\varphi}$$

$$- \frac{1}{c}\frac{k}{r^2}\sin(\omega t - kr)\underbrace{\int d^3r'\, \vec{j}(\vec{r})\cdot(\vec{r}\cdot\vec{r}')}_{\equiv \vec{I}_2}$$

$\vec{I}_2 = \int d^3r'\, (\vec{r}\cdot\vec{r}')\, \vec{j}_0(\vec{r}')$, $x' = R\cos\varphi'$, $y' = R\sin\varphi'$

$\vec{r}\cdot\vec{r}' = xR\cos\varphi' + yR\sin\varphi'$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dz' \int_0^{\infty} d\varrho'\, \varrho' \int_0^{2\pi} d\varphi' \cdot I_0 \cdot \delta(\varrho-R)\,\delta(z)\cdot(xR\cos\varphi' + yR\sin\varphi')\begin{pmatrix}-\sin\varphi' \\ \cos\varphi' \\ 0\end{pmatrix}$$

$$= I_0\cdot R^2\pi\begin{pmatrix}-y \\ x \\ 0\end{pmatrix} = m(-y,x,0)$$

Mit $k = \omega / c$ ~~...~~, $m = I_0 \cdot R^2 \pi$ und $\hat{e}_\varphi = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \vec{A}(\vec{r},t) = \underbrace{-\frac{\omega m}{rc^2} \sin(\omega t - kr) \sin\theta}_{A_\varphi} \cdot \hat{e}_\varphi \qquad = \mathcal{O}\left(\frac{1}{r}\right)$$

ii) $\vec{B}(\vec{r},t) = \vec{\nabla} \times \vec{A}$

$$= \underbrace{\hat{e}_r \underbrace{\frac{1}{r\sin\theta}}_{\mathcal{O}(\frac{1}{r})} \underbrace{\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\varphi \sin\theta)}_{\mathcal{O}(\frac{1}{r})}}_{\mathcal{O}(\frac{1}{r^2})} - \hat{e}_\theta \cdot \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi)$$

$$= -\hat{e}_\theta \left(\underbrace{\frac{1}{r} A_\varphi}_{\mathcal{O}(\frac{1}{r^2})} + \frac{\partial A_\varphi}{\partial r} \right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

$$\Rightarrow \vec{B}(\vec{r},t) = -\hat{e}_\theta \frac{\partial}{\partial r} A_\varphi + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

$$\approx -\frac{\omega^2 m}{rc^3} \cos(kr - \omega t) \sin\theta \, \hat{e}_\theta$$

$$\vec{E}(\vec{r},t) = -\operatorname{grad} \Phi(\vec{r},t) - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$= \frac{\omega^2 m}{rc^2} \cos(kr - \omega t) \sin\theta \, \hat{e}_\varphi$$

$$= \vec{B} \times \hat{e}_r \quad \text{da} \quad \hat{e}_\varphi = -\hat{e}_\theta \times \hat{e}_r = \hat{e}_r \times \hat{e}_\theta$$

Ausdruck

Donnerstag, 13. April 2017 09:06

d) Aus der Wellengleichung

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right)\vec{E}(\vec{r},t) = 0$$

folgt mit $\vec{E}(\vec{r},t) = E(t)\cdot\hat{e}_z$:

$$\Delta\vec{E}(\vec{r},t) = 0 \quad \text{damit:}$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E}(\vec{r},t) = 0 \Rightarrow \vec{E}(\vec{r},t) \propto t$$

<u>Alternativ</u> $\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}(t)\,\hat{e}_z$ ist wirbelfrei

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}, \quad \text{rot } \vec{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \quad (\text{da } \vec{j} = \vec{0})$$

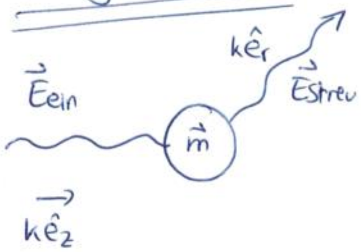
wäre $\vec{E}(t)$ nicht $\propto t$, $\Rightarrow \vec{B}$ zeitabhängig

Damit Widerspruch zu $\vec{\nabla}\times\vec{E}(\vec{r},t) = 0$

Ausdruck

Donnerstag, 13. April 2017 09:07

Aufgabe 3.3



$$\vec{E}_{ein} = \vec{E}_0 e^{i(kz-\omega t)} = E_0 \vec{\mathcal{E}}_0 e^{i(kz-\omega t)}$$

$$\vec{B}_{ein} = \frac{1}{\omega} \vec{k} \times \vec{E}_{ein} = \frac{1}{c} \hat{e}_z \times \vec{E}_{ein} = \vec{B}_0 e^{i(kz-\omega t)}$$

Streufelder:

$$\vec{E}_{streu} = \frac{\omega^2}{rc^2} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} (\vec{m} \times \hat{e}_r)$$

$$\vec{B}_{streu} = \frac{1}{c} \hat{e}_r \times \vec{E}_{streu}$$

$$\vec{m} = \beta \frac{\vec{B}_0 c}{4\pi} = 4\pi\, \beta (\hat{e}_z \times \vec{E}_0) e^{i(kz-\omega t)}$$

a) $$\vec{E}_{streu} = \beta \frac{\omega^2}{4\pi r c^2} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t+kz-\omega t)} (\hat{e}_z \times \vec{E}_0) \times \hat{e}_r$$

$$\left.\frac{d\sigma_{\vec{\varepsilon}}}{d\Omega}\right|_{pol} = \frac{r^2 |\vec{\mathcal{E}}^* \cdot \vec{E}_{streu}|^2}{|\vec{\mathcal{E}}_0^* \cdot \vec{E}_{ein}|^2} = \frac{r^2 |\vec{\mathcal{E}}^* \cdot \vec{E}_{streu}|^2}{E_0^2}$$

$$= \underbrace{\beta^2 \frac{\omega^4}{16\pi^2 c^4}}_{\equiv \alpha} |\vec{\mathcal{E}}^* [(\hat{e}_z \times \vec{\mathcal{E}}_0) \times \hat{e}_r]|^2$$

b) Vektorprodukte auflösen

$$(\hat{e}_z \times \vec{\mathcal{E}}_0) \times \hat{e}_r = \vec{\mathcal{E}}_0 \cdot (\hat{e}_z \cdot \hat{e}_r) - \hat{e}_z (\vec{\mathcal{E}}_0 \cdot \hat{e}_r)$$

$$\Rightarrow \vec{\mathcal{E}}^* \cdot [(\hat{e}_z \times \vec{\mathcal{E}}_0) \times \hat{e}_r] = (\vec{\mathcal{E}}_0^* \cdot \vec{\mathcal{E}}^*) \underbrace{\cos\theta}_{\hat{e}_z \cdot \hat{e}_r} - (\hat{\mathcal{E}}_0 \cdot \hat{e}_r)(\vec{\mathcal{E}}^* \cdot \hat{e}_z)$$

$$= \vec{\mathcal{E}}_0 \cdot \underbrace{[\vec{\mathcal{E}}^* (\hat{e}_z \cdot \hat{e}_r) - \hat{e}_r (\vec{\mathcal{E}}^* \cdot \hat{e}_z)]}_{\equiv \vec{v}}$$

$$\left.\frac{d\sigma_{\vec{\varepsilon}}}{d\Omega}\right|_{unpol} = \frac{1}{2} \sum_{\varepsilon_0 = \hat{e}_x, \hat{e}_y} \left.\frac{d\sigma_{\vec{\varepsilon}}}{d\Omega}\right|_{pol} \overset{\text{siehe VL}}{=} \frac{\alpha}{2} |\vec{v} \times \hat{e}_z|^2$$

$$\cdot\ \vec{v} \times \hat{e}_z = (\vec{\mathcal{E}}^* \times \hat{e}_z) \cos\theta - (\hat{e}_r \times \hat{e}_z) \cdot (\vec{\mathcal{E}}^* \cdot \hat{e}_z)$$

$$\Rightarrow \frac{d\sigma_{\vec{\varepsilon}}}{d\Omega} = \frac{\alpha}{2} |(\vec{\mathcal{E}} \times \hat{e}_z) \cos\theta - (\hat{e}_r \times \hat{e}_z)(\vec{\mathcal{E}}^* \cdot \hat{e}_z)|^2$$

$\perp$ polarisiert am Ende

$$\vec{\epsilon}_\perp = \frac{\hat{e}_r \times \hat{e}_z}{\sin\theta}$$

$$\frac{d\sigma_\perp}{d\Omega} = \frac{\alpha}{2}\left|\left[(\hat{e}_r \times \hat{e}_z)\times \hat{e}_z\right]\frac{\cos\theta}{\sin\theta} - (\hat{e}_r \times \hat{e}_z)\cdot \frac{\overbrace{(\hat{e}_r \times \hat{e}_z)\cdot \hat{e}_z}^{=0,\text{ da } (\hat{e}_r \times \hat{e}_z) \perp e_z}}{\sin\theta}\right|^2$$

$$= \frac{\alpha}{2}\left|\left(\hat{e}_z \overbrace{(\hat{e}_r\cdot\hat{e}_z)}^{\cos\theta} - \hat{e}_r \overbrace{(\hat{e}_z\cdot\hat{e}_z)}^{=1}\right)\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right|^2$$

$$= \frac{\alpha}{2}\left|\begin{pmatrix}-\sin\theta\cos\varphi\\ -\sin\theta\sin\varphi\\ 0\end{pmatrix}\cdot\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right|^2 = \frac{\alpha}{2}\cdot\cos^2\theta$$

$\parallel$ polarisiert am Ende

$$\vec{\epsilon}_\parallel = \frac{\hat{e}_z - \cos\theta\,\hat{e}_r}{\sin\theta}$$

$$\frac{d\sigma_\parallel}{d\Omega} = \frac{\alpha}{2}\Big|\underbrace{(\hat{e}_z\times\hat{e}_z)}_{=\vec{0}}\frac{\cos\theta}{\sin\theta} - (\hat{e}_r\times\hat{e}_z)\cdot\overbrace{(\hat{e}_z\cdot\hat{e}_z)}^{=1}\frac{1}{\sin\theta}$$

$$- (\hat{e}_r\times\hat{e}_z)\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} + (\hat{e}_r\times\hat{e}_z)(\hat{e}_r\cdot\hat{e}_z)\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\Big|^2$$

$$= \frac{\alpha}{2\sin^2\theta}\,|\hat{e}_r\times\hat{e}_z|^2 = \frac{\alpha}{2\sin^2\theta}\left[\underbrace{1}_{|\hat{e}_r|^2\cdot|\hat{e}_z|^2} - \underbrace{\cos^2\theta}_{|\hat{e}_r\cdot\hat{e}_z|^2}\right] = \frac{1}{2}\cdot\alpha$$

Gesamter Wirkungsquerschnitt

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{d\sigma_\perp}{d\Omega} + \frac{d\sigma_\parallel}{d\Omega} = \frac{\alpha}{2}\cdot(\cos^2\theta + 1)$$

$$= \beta^2\frac{\omega^4}{32\pi^2c^4}(1+\cos^2\theta) \qquad \frac{\omega}{k} = c$$

$$= \beta^2\frac{k^4}{32\pi^2}(1+\cos^2\theta)$$

Ausdruck

Freitag, 14. April 2017 17:47

$\boxed{\text{Aufgabe 10}}$

a) (i) $g^{\mu}{}_{\nu} = g^{\mu\alpha} g_{\alpha\nu} = \left[\begin{pmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&-1&0&0 \\ 0&0&-1&0 \\ 0&0&0&-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&-1&0&0 \\ 0&0&-1&0 \\ 0&0&0&-1 \end{pmatrix} \right]^{\mu}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&1&0 \\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}^{\mu}{}_{\nu} = \delta^{\mu}{}_{\nu}$

$g'^{\mu}{}_{\nu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} \Lambda_{\nu}{}^{\beta} g^{\alpha}{}_{\beta} = \Lambda^{\mu}{}_{\alpha} \Lambda_{\nu}{}^{\beta} \delta^{\alpha}{}_{\beta} = \Lambda^{\mu}{}_{\beta} \Lambda_{\nu}{}^{\beta} = \Lambda^{\mu}{}_{\beta} [\Lambda^{-1}]^{\beta}{}_{\nu} = \delta^{\mu}{}_{\nu}$

(invariant - wie erwartet vgl. (6.17) im Skript)

(ii) $g^{\mu}{}_{\mu} = \delta^{\mu}{}_{\mu} = \delta^{0}{}_{0} + \delta^{1}{}_{1} + \delta^{2}{}_{2} + \delta^{3}{}_{3} = 4$

$g'^{\mu}{}_{\mu} = 4$ (Skalar) Summenkonvention!

(iii) $\partial_{\rho} = \frac{\partial}{\partial x^{\rho}} = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} \;\; \vec{\nabla}^{T} \right)_{\rho}$

$\partial'_{\rho} = \Lambda^{\alpha}{}_{\rho}\, \partial_{\alpha}$

Reihenfolge irrelevant — der selbe Ausdruck, da Index-Bezeichnung irrelevant

(iv) $a^{\mu} b_{\mu} c^{\alpha} - a_{\nu} c^{\alpha} b^{\nu} = c^{\alpha}(a^{\mu} b_{\mu} - a_{\nu} b^{\nu}) = 0$ (=0 transformiert)

(v) $\partial_{\mu} x_{\nu} = g_{\nu\alpha} \partial_{\mu} x^{\alpha} = g_{\nu\alpha} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} = g_{\nu\alpha} \delta^{\alpha}_{\mu} = g_{\nu\mu} \overset{\text{symmetrisch in } \nu \leftrightarrow \mu \text{ (Transponieren)}}{=} g_{\mu\nu}$

$= \begin{pmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&-1&0&0 \\ 0&0&-1&0 \\ 0&0&0&-1 \end{pmatrix}_{\mu\nu}$

$\partial'_{\mu} x'_{\nu} = \Lambda_{\mu}{}^{\alpha} \Lambda_{\nu}{}^{\beta} \partial_{\alpha} x_{\beta} = \Lambda_{\mu}{}^{\alpha} \Lambda_{\nu}{}^{\beta} g_{\alpha\beta} = g_{\mu\nu}$

(vi) $j^{\mu} = \begin{pmatrix} \rho c \\ \vec{j} \end{pmatrix}^{\mu}$ $\qquad j'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} j^{\nu}$

(vii) $F^{\mu\nu} = \partial^{\mu} A^{\nu} - \partial^{\nu} A^{\mu} = \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix}^{\mu\nu}$

$F'^{\mu\nu} = \Lambda^{\mu}{}_{\alpha} \Lambda^{\nu}{}_{\beta} F^{\alpha\beta}$

b) (i) Kontinuitätsgleichung

$0 = \partial_{\mu} j^{\mu} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(c\rho) + \overbrace{\partial_1}^{\frac{\partial}{\partial x^1}} j^1 + \partial_2 j^2 + \partial_3 j^3 = \frac{\partial}{\partial t}\rho + \vec{\nabla}\vec{j}$

(ii) Viererpotential

$A^{\mu} = \begin{pmatrix} \Phi \\ \vec{A} \end{pmatrix}^{\mu}$

Eichfreiheit

$\tilde{A}^{\mu} = A^{\mu} - \partial^{\mu}\chi = \begin{pmatrix} \Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \chi}{\partial t} \\ \vec{A} + \vec{\nabla}\chi \end{pmatrix}^{\mu}$ (liefert selbe Physik)

$\tilde{A}'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\alpha} \tilde{A}^{\alpha} = \Lambda^{\mu}{}_{\alpha} A^{\alpha} - \Lambda^{\mu}{}_{\alpha} \partial^{\alpha}\chi$

(iii) Dualer Feldstärke-Tensor

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -B^1 & -B^2 & -B^3 \\ B^1 & 0 & +E^3 & -E^2 \\ B^2 & -E^3 & 0 & E^1 \\ B^3 & E^2 & -E^1 & 0 \end{pmatrix}^{\mu\nu}$$

$$\tilde{F}'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta \tilde{F}^{\alpha\beta}$$

Maxwell-Gleichungen $\boxed{\partial_\nu F^{\nu\mu} = \frac{4\pi}{c} j^\mu}$

$\boxed{\mu=0}$ $\partial_\nu F^{\nu 0} = \frac{4\pi}{c} j^0 = \frac{4\pi}{c} c\rho$

$$\partial_0 F^{00} + \partial_i \underbrace{F^{i0}}_{E^i} = 4\pi\rho \Rightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 4\pi\rho$$

$\boxed{\mu=i}$ $\partial_\nu F^{\nu i} = \frac{4\pi}{c} j^i$ $\qquad \epsilon^{ijk}\epsilon_{klm} = \delta^i_l\delta^j_m - \delta^i_m\delta^j_l$

$$\partial_0 F^{0i} + \partial_k F^{ki} -$$

mit $(\vec{\nabla}\times\vec{B})^i = \epsilon^{ijk}\partial_j B_k = \epsilon^{ijk}\partial_j \big(\overbrace{\tfrac{1}{2}\epsilon_{klm}F^{lm}}^{B_k}\big)$

$F^{lm} = -F^{ml}$

$$= \frac{1}{2}[\delta^i_l\delta^j_m\partial_j F^{lm} + \delta^i_m\delta^j_l\partial_j F^{ml}]$$

$$= \frac{1}{2}[\partial_m F^{im} + \partial_l F^{il}] = \partial_k F^{ik} = -\partial_k F^{ki}$$

$$\Rightarrow \overbrace{\partial_k F^{ki}}^{-(\vec{\nabla}\times\vec{B})^i} = -\partial_0 \overbrace{F^{i0}}^{E^i} - \frac{4\pi}{c}\overbrace{j^i}^{(\vec{j})^i}$$

$$(\vec{\nabla}\times\vec{B}) = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{E} + \frac{4\pi}{c}\vec{j}$$

$\boxed{\partial_\nu \tilde{F}^{\nu\mu} = 0}$ Vollkommen analog, da

vgl.

$\tilde{F}^{\mu\nu}$		$F^{\mu\nu}$
B	$\leftrightarrow$	$-E$
E	$\leftrightarrow$	B
0	$\leftrightarrow$	j

$$\Rightarrow \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$$

c) $\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}$

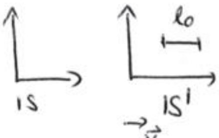
(i) Fordere $c^2t'^2 - x'^2 = c^2t^2 - x^2$

$$c^2t'^2 - x'^2 = [\gamma ct - \beta\gamma x]^2 - [-\beta\gamma ct + \gamma x]^2$$
$$= c^2t^2[\gamma^2 - \beta^2\gamma^2] - 2\gamma ct\beta\gamma x + x^2[\beta^2\gamma^2 - \gamma^2] + 2\beta\gamma ct\gamma x$$
$$= c^2t^2 - x^2 \quad \text{da} \quad \gamma^2 - \beta^2\gamma^2 = \gamma^2[1-\beta^2] = 1$$

(ii) Definiere $l_0 = x'_2 - x'_1 \qquad t'_1 = t'_2 = t$ (im Ruhesystem)

$$l_0 = [-\beta\gamma ct_2 + \gamma x_2] - [-\beta\gamma ct_1 + \gamma x_1] = \gamma(x_2 - x_1) = \gamma \cdot l$$

$$\rightarrow \boxed{l = \frac{l_0'}{\gamma}}$$



(iii) $x_1 = 0 \qquad x_2 = \beta c(t_2 - t_1)$ Bewegte Uhr in IS $\qquad x_2 - x_1 = \beta c\Delta t$

$x'_1 = 0 \qquad x'_2 = 0$ Ruhende Uhr in IS'

$$c\Delta t' = c(t'_2 - t'_1) = (\gamma ct_2 - \beta\gamma x_2) - (\gamma ct_1 - \beta\gamma x_1)$$
$$= c\gamma\Delta t - \beta^2\gamma\Delta t = c\gamma\underbrace{[1-\beta^2]}_{\frac{1}{\gamma^2}}\Delta t = \frac{c\Delta t}{\gamma}$$

$$\rightarrow \boxed{\Delta t = \frac{\Delta t'}{\gamma}}$$

(iv) $$F'^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E'^1 & -E'^2 & -E'^3 \\ E'^1 & 0 & -B'^3 & B'^2 \\ E'^2 & B'^3 & 0 & -B'^1 \\ E'^3 & -B'^2 & B'^1 & 0 \end{pmatrix} = \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma F^{\rho\sigma}$$

In Matrix-Schreibweise: $F' = \Lambda F \Lambda^T$

$$F' = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & E^1 & -\gamma(E^2 - \beta B^3) & -\gamma(E^3 - \beta B^2) \\ & 0 & -\gamma(B^3 - \beta E^2) & \gamma(B^2 + \beta E^2) \\ & & 0 & -B^1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

— oberes Dreieck

Expliziter Vergleich der Komponenten:

$E'^1 = E^1 \qquad B'^1 = B^1$

$E'^2 = \gamma(E^2 - \beta B^3) \qquad B'^2 = \gamma(B^2 + \beta E^3)$

$E'^3 = \gamma(E^3 + \beta B^2) \qquad B'^3 = \gamma(B^3 - \beta E^3)$

Ausdruck

Freitag, 14. April 2017 17:49

Aufgabe 11

$\xrightarrow[m_p]{\vec{p}_p} \quad \overset{\vec{0}}{\circ}_{m_T}$ (Laborsystem) $\qquad \xrightarrow[m_p]{\vec{\tilde{p}}_p} \; \xleftarrow[m_p]{\vec{\tilde{p}}_T}$ (Schwerpunktsystem)

a) Nehme OBdA an, dass $\vec{p}_p \parallel \hat{e}_x$ und benutze Boost aus 10c)

$$\begin{pmatrix} \tilde{E}_p/c \\ \tilde{p}_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_p/c \\ p_p \end{pmatrix} \qquad \vec{p}_p = p_p \cdot \hat{e}_x \quad \vec{\tilde{p}}_p \equiv \tilde{p}_p \cdot \hat{e}_x$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{E}_T/c \\ \tilde{p}_T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_T c \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{\tilde{p}}_T = \tilde{p}_T \cdot \hat{e}_x$$

Invariantes Skalarprodukt: $s \equiv \underbrace{(p_p + p_T)_\mu \, (p_p + p_T)^\mu}_{\text{Viererimpulse}} c^2$

$$= (E_p + m_T c^2)^2 - p_p^2 c^2 = m_T^2 c^4 + 2 m_T c^2 E_p$$
$$= (\tilde{E}_p + \tilde{E}_T)^2$$

(i) Im Schwerpunktsystem: $\tilde{p}_T = -\tilde{p}_p$

$$\tilde{p}_T = -\beta\gamma m_T c = \beta\gamma \frac{E_p}{c} - \gamma p_p = -\tilde{p}_p$$

$$\Rightarrow -\beta m_T c = \beta \frac{E_p}{c} - p_p \Rightarrow \boxed{\beta = \frac{p_p c}{E_p + m_T c^2}} \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\cancel{\text{Alterna}} \; \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{p_p^2 c^2}{(E_p + m_T c^2)^2}}} = \frac{E_p + m_T c^2}{\sqrt{(E_p + m_T c^2)^2 - p_p^2 c^2}} = \frac{E_p + m_T c^2}{\sqrt{s}}$$

(ii) $\beta\gamma = \frac{p_p c}{\sqrt{s}} \Rightarrow -\tilde{p}_p = \tilde{p}_T = -\beta\gamma m_T c = -\frac{p_p c}{\sqrt{s}} \cdot m_T c$

b) $\underset{m_1}{\xleftarrow{\vec{p}_1}} \overset{p=\vec{0}}{(M)} \underset{m_2}{\xrightarrow{\vec{p}_2}}$ Wähle OBdA $\vec{p}_1, \vec{p}_2 \parallel \hat{e}_x$

Im Schwerpunktsystem: $\begin{pmatrix} Mc^2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_1 \\ p_1 c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} E_2 \\ p_2 c \end{pmatrix} \qquad p_1 = -p_2 \equiv p$

$$E_i = \sqrt{m_i^2 c^4 + p_i^2 c^2} \qquad (p_1)_\mu (p_1)^\mu c^2 = E_1^2 - p^2 c^2 = m_1 c^4$$

Invariante Skalarprodukte: $(p_2)_\mu (p_2)^\mu c^2 = E_2^2 - p^2 c^2 = m_2 c^4$

$$\Rightarrow \underset{(E_1+E_2)(E_1-E_2) = Mc^2(E_1-E_2)}{E_1^2 - E_2^2} = (m_1^2 c^4 - m_2^2 c^4) \Rightarrow E_1 - E_2 = \frac{m_1^2 - m_2^2}{M} c^2$$

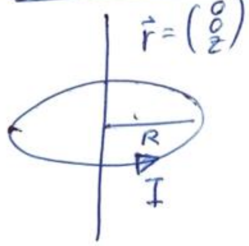
$$\Rightarrow \frac{1}{2c^2}\left[(E_1+E_2) + (E_1-E_2)\right] = \frac{E_1}{c^2} = \frac{M^2 + m_1^2 - m_2^2}{2M}$$

$$\frac{1}{2c^2}\left[(E_1+E_2) - (E_1-E_2)\right] = \frac{E_2}{c^2} = \frac{M^2 + m_2^2 - m_1^2}{2M}$$

Ausdruck

Donnerstag, 13. April 2017 09:12

Aufgabe 1



a) Biot-Savart

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int d^3r' \, \vec{j}(\vec{r}') \times \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$$

$\vec{j}\, d^3r' = I\, d\vec{r}'$

$$= \frac{I}{c} \oint d\vec{r} \times \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \quad ; \ \vec{r} = z \cdot \hat{e}_z$$

Parametrisierung d. Schleife

$$\vec{r}' = \begin{pmatrix} R\cos\varphi' \\ R\sin\varphi' \\ 0 \end{pmatrix} \qquad d\vec{r}' = \begin{pmatrix} -R\sin\varphi' \\ R\cos\varphi' \\ 0 \end{pmatrix} d\varphi' = R\,\hat{e}_{\varphi'}\, d\varphi'$$

$$\vec{r}-\vec{r}' = z\cdot\hat{e}_z - R\cdot\hat{e}_{\rho'} \quad ; \quad |\vec{r}-\vec{r}'| = \sqrt{R^2+z^2}$$

$$d\vec{r}' \times (\vec{r}-\vec{r}') = (R\cdot z\cdot\hat{e}_{\rho'} + R^2\hat{e}_{z'})\,d\varphi' = \begin{pmatrix} Rz\cos\varphi' \\ Rz\sin\varphi' \\ R^2 \end{pmatrix} d\varphi$$

$$B(\vec{r} = z\cdot\hat{e}_z) = \frac{I}{c} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi'}_{2\pi} \frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}^3} [\underbrace{R\cdot z\cdot\hat{e}_{\rho'}}_{\text{verschwindet bei } \int_0^{2\pi} d\varphi} + R^2\hat{e}_z]$$

$$= \frac{4\pi I R^2}{c\,2\sqrt{R^2+z^2}^3} \cdot \hat{e}_z$$

Alternativ

$\vec{j}(\vec{r}') = I\,\delta(\rho'-R)\,\delta(z)\,\hat{e}_{\varphi'}$

$\vec{r}' = \rho'\hat{e}_\rho + z'\hat{e}_{z'}$

b) Magnetisches Moment

$$\vec{m} = \frac{1}{2c} \int d^3r' \, \vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}') = \frac{I}{2c} \oint \vec{r}' \times d\vec{r}' = \frac{I}{c} \underbrace{F}_{R^2\pi} \cdot \underbrace{\vec{n}}_{\hat{e}_z}$$

(Rechte Hand-Regel)

$$= \frac{I}{c} \cdot \pi R^2 \hat{e}_z$$

$$\vec{B}_{Dipol} = \left(\frac{3\vec{r}\cdot(\vec{m}\cdot\vec{r})}{|\vec{r}|^5} - \frac{\vec{m}}{|\vec{r}|^3} \right) \quad \text{mit } \vec{r} = z\cdot\hat{e}_z$$

$$= \frac{I\pi R^2}{c}\hat{e}_z \left(\frac{3z^2}{|z|^5} - \frac{1}{|z|^3} \right) = \frac{4\pi\, I R^2}{c\,2|z|^3} \cdot \hat{e}_z = \frac{4\pi\, I R^2}{c\,2\sqrt{z^2}^3} \hat{e}_z$$

Für große Entfernungen: $\sqrt{R^2+z^2}^3 \approx \sqrt{z^2}^3$

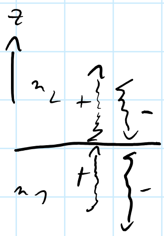
$$\Rightarrow \cancel{\vec{B}(\vec{r})} = \underbrace{\frac{4\pi I R^2}{c\, 2\sqrt{z^2}^{3/2}}}_{\text{Dipolfeld}} \hat{e}_z + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|z|^5}\right)$$

$\vec{B}(z=\hat{e}_z)$

c) Für sehr große Abstände kann das Magnetfeld der lokalisierten Stromverteilung durch das Dipolfeld angegeben werden mit $\vec{r} = (x,y,0)$
Das in der Formel

$$\vec{B}(\vec{r}) = \left(\frac{3\,\vec{r}\,(\vec{m}\cdot\vec{r})}{|\vec{r}|^5} - \frac{\vec{m}}{|\vec{r}|^3}\right) \quad ; \quad \vec{r}\cdot\vec{m} = 0,\ \text{da } \hat{e}_{x,y} \perp \hat{e}_z$$

$$= - \frac{\vec{m}}{\sqrt{x^2+y^2}^3} = - \frac{\pi \cdot I \cdot R^2}{c\,\sqrt{x^2+y^2}^3}\,\hat{e}_z$$



a) $\vec E_2(z,t) = E_2^+ \vec e_x \, e^{i(k_2 z - \omega t)} + E_2^- \vec e_x \, e^{i(-k_2 z - \omega t)}$

$\vec E_1(z,t) = E_1^+ \vec e_x \, e^{i(k_1 z - \omega t)} + E_1^- \vec e_x \, e^{i(-k_1 z - \omega t)}$

Dispersionsrelation:

$\frac{k_2}{\omega} = \frac{n_2}{c}$ $\quad n_2 = \sqrt{\varepsilon_2}$, durch annahme $\mu_2 = 1$

Alle Wellen treffen senkrecht auf, und es gilt je einen einlaufenden und einen auslaufenden Anteil (− für neg. z-Richtung + für pos. z-Richtung) $\vec E$ sowie $\vec H = \vec B$ sind tangential zur Grenzfläche.

aus der Stetigkeit der Tangentialkomponente des $\vec E$-Feldes $(\vec n \times (\vec E_2 - \vec E_1) = \vec 0)$ folgt (an der stelle $z=0$)

$E_1^+ + E_1^- = E_2^+ + E_2^- \quad \mathrm{I}$

des weiteren gilt

$H_2 = \vec B_2 = {}_{\omega} \vec k_2 \times \vec E_2 = \pm \, n_2 \, \vec e_z \times \vec E_2$

Betrachte Stetigkeit der Tangentialkomponente von $\vec H$ an $z=0$

$(\vec n \times (\vec H_2 - \vec H_1) = \vec 0)$.

$\Rightarrow n_1 E_1^+ - n_1 E_1^- = n_2 E_2^+ - n_2 E_2^- \quad \mathrm{II}$

Auflösen d. Gleichungen nach E_1^+ und E_1^-

$\mathrm{I} \cdot n_1 + \mathrm{II}: \; 2 n_1 E_1^+ = E_2^+ (n_1 + n_2) + E_2^- (n_1 - n_2)$

$\mathrm{I} \cdot n_1 - \mathrm{II}: \; 2 n_1 E_1^- = E_1^+ (n_1 - n_2) + E_1^- (n_1 + n_2)$

$$\Rightarrow E_1^+ = \underbrace{\frac{n_1+n_2}{2n_1}}_{:=\alpha_{12}} E_2^+ + \underbrace{\frac{n_1-n_2}{2n_1}}_{:=\beta_{12}^*} E_2^-$$

$$E_1^- = \underbrace{\frac{n_1-n_2}{2n_1}}_{\beta_{12}} E_2^+ + \underbrace{\frac{n_1+n_2}{2n_1}}_{\alpha_{12}^*} E_2^-$$

Damit erhält man,

$$\begin{pmatrix} E_1^+ \\ E_1^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{12} & \beta_{12}^* \\ \beta_{12} & \alpha_{12}^* \end{pmatrix} \begin{matrix} E_2^+ \\ E_2^- \end{matrix}$$

Teil II a: $E_2^- = 0$ $\Rightarrow E_1^- = \beta_{12} E_2^+$ $\quad E_1^- = \alpha_{12} E_2^+$

Poynting-Vektor. Aus Angabe: $\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{8\pi\mu} |\vec{B}_0|^2 \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \hat{k}$

$n = \sqrt{\mu\varepsilon}$ $\qquad c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$

$$\Rightarrow \langle S_2 \rangle = |\langle \vec{S}_2 \rangle| = \underbrace{\frac{\varepsilon}{8\pi} |E_2|^2 \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}}_{\text{siehe VL}}$$

Man erhält:

$$\frac{\text{reflektiert}}{\text{einfallend}} := \frac{E_1^-}{E_1^+} = \frac{\beta_{12}}{\alpha_{12}} = \frac{n_1-n_2}{n_1+n_2}$$

$$\frac{\text{transmittiert}}{\text{einfallend}} := \frac{E_2^+}{E_1^+} = \frac{1}{\alpha_{12}} = \frac{2n_1}{n_1+n_2}$$

Reflexionsvermögen:

$$R = \frac{\langle S_1^- \rangle}{\langle S_1^+ \rangle} = \frac{|E_1^-|^2 n_1}{|E_1^+|^2 n_1} = \frac{\beta_{12}^2}{\alpha_{12}^2} = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\right)^2$$

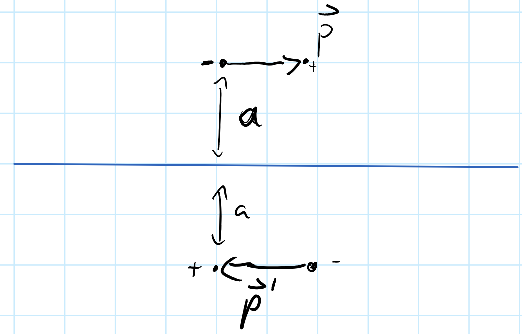
$$T = \frac{\langle S_2^+ \rangle}{\langle S_1^+ \rangle} = \frac{|E_2^+|^2 n_2}{|E_1^+|^2 n_1} = \frac{n_2}{n_1 |\alpha_{12}|^2} = \frac{n_2 4 n_1^2}{n_1 (n_1 + n_2)^2}$$

$$R + T = \frac{(n_1 - n_2)^2 + 4 n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2} = \frac{(n_1 + n_2)^2}{(n_1 + n_2)^2} = 1$$

Aufgabe3

Mittwoch, 23. März 2016 22:22

Spiegeldipol:



$$\vec{p}\,' = -\vec{p}$$
$$\vec{a}\,' = -\vec{a}$$

$$\phi(\vec{r}) = \left(\frac{\vec{p}\,(\vec{r}-\vec{a})}{|\vec{r}-\vec{a}|^3} - \frac{\vec{p}\,(\vec{r}+\vec{a})}{|\vec{r}+\vec{a}|^3} \right)$$

$$= \left(\frac{px}{\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}^{\,3}} - \frac{px}{\sqrt{x^2+y^2+(z+a)^2}^{\,3}} \right)$$

Test d. Randbedingung:

$$\phi(\vec{r})\Big|_{z=0} = \left(\frac{px}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^{\,3}} - \frac{px}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^{\,3}} \right) = 0 \ \checkmark$$

l, Berechnung d. Influenzierten Flächenladungsdichte.

$$\sigma(x,y) = \frac{1}{4\pi}\,\vec{n}\cdot\vec{E}\Big|_{z=0} = \frac{1}{4\pi}\,\vec{e}_z\,\vec{\nabla}\phi\Big|_{z=0} = \frac{1}{4\pi}\,\frac{\partial\phi}{\partial z}\Big|_{z=0}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial z} = \left(\frac{-3px\,(x^2+y^2+(z-a)^2)\,\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}}\cdot 2(z-a)}{\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}^{\,6}} + \frac{3px\,(x^2+y^2+(z+a)^2)\,\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2+(z+a)^2}}\cdot 2(z+a)}{\sqrt{x^2+z^2+(z+a)^2}^{\,6}} \right)$$

$$= 3px \left(\frac{z-a}{\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}^{\,5}} + \frac{z+a}{\sqrt{x^2+y^2+(z+a)^2}^{\,5}} \right)$$

$$\sigma(x,y) = \frac{3pxa}{2\pi\sqrt{x^2+y^2+a^2}}$$

c Dipol - Dipol - Wechselwirkung zur Kraftberechnung

$$W_{12} = \left(\frac{\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} - 3 \frac{(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \cdot \vec{p}_1 \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_1) \cdot \vec{p}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^5} \right)$$

$$= \left(\frac{-p^2}{8a^3} \right) \qquad \text{da } \vec{p}_1 = -\vec{p}_2 = \begin{pmatrix} p \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}_1 = -\vec{r}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}$$

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} W_{12} \qquad \vec{F} \propto \vec{e}_z$$

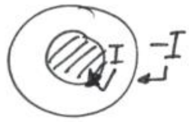
$$\vec{F} = -\frac{d}{d(2a)} W_{12} \, \vec{e}_z = -\frac{3p^2}{(2a)^4} \, \vec{e}_z$$

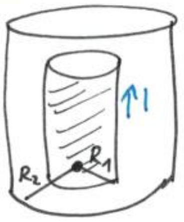
Abgeleitet wird nach dem Abstand der Dipole, der hier 2a beträgt!!

Ausdruck

Donnerstag, 13. April 2017 09:17

Aufgabe 4 Koaxialkabel





a) Stromdichte

$$\vec{j}(\vec{r}) = \left[\frac{I}{\pi R_1^2}\,\Theta(R_1-\varrho) - \frac{I}{2\pi R_2}\,\delta(\varrho-R_2)\right]\hat{e}_z$$

Kontrolle

$$\int_{\text{Querschnitt}} d\vec{F}\cdot\vec{j} = \int \varrho\, d\varrho \int d\varphi\, \vec{j} = \frac{I}{\pi R_1^2}\cdot 2\pi\cdot\frac{R_1^2}{2} - \frac{I}{2\pi R}\cdot 2\pi R = 0$$

b) Vektorpotential

Symmetriebetrachtung: $\vec{j}(\vec{r}) = j(\varrho)\,\hat{e}_z \Rightarrow \vec{A}(\vec{r}) = A(\varrho)\hat{e}_z$

$$\Rightarrow \vec{B} = \text{rot}\,\vec{A} = -\frac{\partial A}{\partial \varrho}\,\hat{e}_\varphi = B(\varrho)\,\hat{e}_\varphi$$

$$\Delta\vec{A} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j} \quad \text{(Feldgleichung)}$$

$$\rightsquigarrow -\frac{4\pi}{c} j(\varrho) = \frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial\varrho}\left(\varrho\cdot\frac{\partial A(\varrho)}{\partial\varrho}\right) \quad \text{(für diese Symmetrie)}$$

Region ② $\boxed{R_1<\varrho<R_2}$ und ③ $\boxed{\varrho>R_2}$: $j(\varrho)=0$

$$\Rightarrow 0 = d\left(\varrho\,\frac{\partial A(\varrho)}{\partial\varrho}\right) \Rightarrow \overset{\text{const}}{\overset{=}{a}} = \varrho\cdot\frac{dA}{d\varrho} \Rightarrow dA = \frac{a}{\varrho}\,d\varrho$$

$$\rightsquigarrow A(\varrho) = a\cdot\ln\varrho + \overset{\text{const.}}{\overset{=}{b}} = a\,\ln\left(\frac{\varrho}{C_{11}}\right) + C_2$$

Region ① $\boxed{\varrho<R_1}$

$$\frac{1}{\varrho}\frac{d}{d\varrho}\left(\varrho\,\frac{dA}{d\varrho}\right) = -\frac{4\,I}{R_1^2\,c} \Rightarrow d\left(\varrho\,\frac{dA}{d\varrho}\right) = -\frac{4\,I}{R_1^2\,c}\,d\varrho\cdot\varrho$$

$$\varrho\,\frac{dA}{d\varrho} = C_3 - \frac{2\,I}{c\,R_1^2}\,\varrho^2 \Rightarrow dA = \left[\frac{C_3}{\varrho} - \frac{2\,I}{c\cdot R_1^2}\,\varrho\right]d\varrho$$

$$\Rightarrow A(\varrho) = C_3\cdot\ln\left(\frac{\varrho}{C_4}\right) + C_5 - \frac{I}{c\cdot R_1^2}\,\varrho^2$$

$$A(\varrho) = \begin{cases} C_3 \ln\left(\frac{\varrho}{C_4}\right) + C_5 - \frac{I}{cR_1^2}\varrho^2 & , \varrho < R_1 \\ a_2 \ln\left(\frac{\varrho}{C_{21}}\right) + C_{22} & , R_1 < \varrho < R_2 \\ a_3 \ln\left(\frac{\varrho}{\cancel{C_4}C_{31}}\right) + C_{32} & , \varrho > R_2 \end{cases}$$

Konstanten bestimmen:

$C_3 = 0$, da $A(0)$ endlich, $C_5 = 0$ (Wahl)

Stetigkeit von $A(\varrho)$: bzw. stetige Differenzierbarkeit ($\varrho \neq R_2$)

$\boxed{\varrho = R_1}$
$$-\frac{I}{cR_1^2} \cdot R_1^2 = -\frac{I}{c} = a_2 \cdot \ln\left(\frac{R_1}{C_{21}}\right) + C_{22}$$

$$-\frac{2I}{cR_1} \cdot R_1 = \frac{a_2}{R_1} \Rightarrow a_2 = -\frac{2I}{c}$$

Damit $-\frac{I}{c} = -\frac{2I}{c} \ln\left(\frac{R_1}{C_{21}}\right) + C_{22}$

$$\Rightarrow C_{21} = R_1 \quad , \quad C_{22} = -\frac{I}{c}$$

$\boxed{\varrho = R_2}$
$$-\frac{2I}{c} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) - \frac{I}{c} = a_3 \ln\left(\frac{R_2}{C_{31}}\right) + C_{32}$$

$$\Rightarrow C_{32} = -\frac{2I}{c} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) - \frac{I}{c}$$

$a_3 = 0$

Begründung: Da bei $\varrho > R_2$ $I_{\text{eing}} = 0 \xRightarrow{\text{Ampere}} B(\varrho) = 0$

$\Rightarrow A(\varrho) = 0$ für $\varrho > R_2 \Rightarrow a_3 = 0$

$$\Rightarrow A(\varrho) = -\frac{I}{c} \begin{cases} \varrho^2/R_1^2 & , \varrho < R_2 \\ 1 + 2\ln(\varrho/R_1) & , R_1 < \varrho < R_2 \\ 1 + 2\ln(R_2/R_1) & , \varrho > R_1 \end{cases}$$

ALTERNATIV Ampere'sches Gesetz

$$\oint_{\partial F} d\vec{r} \cdot \vec{B}(\vec{r}) = 2\pi\varrho\, B(\varrho) = \frac{4\pi}{c} \cdot I_{enc} = \frac{4\pi}{c} I \begin{cases} \pi\varrho^2/\pi R_1^2 & , \varrho < R_1 \\ 1 & , R_1 < \varrho < R_2 \\ 0 & , \varrho > R_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow B(\varrho) = \frac{2I}{c} \begin{cases} \varrho/R_1^2 & , \varrho < R_1 \\ 1/\varrho & , R_1 < \varrho < R_2 \\ 0 & , \varrho > R_2 \end{cases}$$

$$-\frac{dA(\varrho)}{d\varrho} = B(\varrho) \Rightarrow -B(\varrho)d\varrho = dA(\varrho) \quad \Big| \int \ldots$$

$$A(\varrho) = \underset{0\,(\text{Wahl})}{\underset{\shortparallel}{A_0}} - \int_0^\varrho d\varrho'\, B(\varrho') = -\int$$

$\boxed{\varrho > R_2}$

$$A(\varrho) = -\frac{2I}{c}\left\{ \int_0^{R_1} d\varrho' \frac{\varrho'}{R_1^2} + \int_{R_1}^{R_2} d\varrho' \frac{1}{\varrho} \right\}$$

$$= -\frac{2I}{c}\left[1 + 2\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)\right]$$

$\boxed{R_1 < \varrho < R_2}$

$$A(\varrho) = -\frac{2I}{c}\left\{ \int_0^{R_1} d\varrho' \frac{\varrho'}{R_1^2} + \int_{R_1}^{\varrho} d\varrho' \frac{1}{\varrho} \right\}$$

$$= -\frac{I}{c}\left[1 + 2\ln(\varrho/R_1)\right]$$

$\boxed{\varrho < R_1}$

$$A(\varrho) = -\frac{2I}{c}\left\{ \int_0^\varrho d\varrho' \frac{\varrho'}{R_1^2} \right\} = -\frac{2I}{c} \frac{\varrho^2}{R_1^2}$$

Tipp: In dieser Reihenfolge ausrechnen.

$$\Rightarrow \vec{A}(\vec{r}) = \hat{e}_z \left(-\frac{I}{c}\right) \begin{cases} \varrho^2/R_1^2 & ; \varrho < R_1 \\ 1 + 2\ln(\varrho/R_1) & ; R_1 < \varrho < R_2 \\ 1 + 2\ln(R_2/R_1) & ; \varrho > R_2 \end{cases}$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \hat{e}_\varphi \cdot \frac{2I}{c} \begin{cases} \varrho/R_1^2 & , \varrho < R_1 \\ 1/\varrho & , R_1 < \varrho < R_2 \\ 0 & , \varrho > R_2 \end{cases}$$

c) Selbstinduktivität pro Längeneinheit

$$L = \frac{1}{4 I^2} \int d^3r \; \vec{j}(\vec{r}) \cdot \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\ell}{I^2} \int\limits_{\text{Querschnitt}} dF \; \vec{j}(\vec{r}_\perp) \cdot \vec{A}(\vec{r}_\perp)$$

$$\Rightarrow \frac{L}{\ell} = \frac{1}{I^2} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{=2\pi} \int_0^\infty d\rho \cdot \rho \quad \vec{j}(\vec{r}_\perp) \cdot \vec{A}(\vec{r}_\perp)$$

$$= \frac{2\pi}{I^2} \cdot \left(-\frac{I}{c}\right) \int_0^\infty d\rho \cdot \rho \left[\frac{I}{R_1^2 \pi} \Theta(R_1 - \rho) \cdot \frac{\rho^2}{R_1^2} - \frac{I}{2\pi R_2} \delta(\rho - R_2) \left(1 + 2 \ln \frac{R_2}{R_1}\right) \right]$$

$$= -\frac{2}{c} \left\{ \underbrace{\int_0^{R_1} d\rho \; \rho^3}_{= R_1^4/4} \cdot \frac{1}{R_1^4} - \underbrace{R_2 \cdot \frac{1}{2R_2}}_{\frac{1}{2}} \left(1 + 2 \ln \frac{R_2}{R_1}\right) \right\}$$

$$= \frac{2}{c} \left[\ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{4} \right]$$

$$\vec{j}(\vec{r}_\perp) = \left[\frac{I}{\pi R_1^2} \Theta(R_1 - \rho) - \frac{I}{2\pi R_2} \delta(\rho - R_2) \right] \hat{e}_z$$

(Erinnerung)

$$\vec{A}(\vec{r}_\perp) = -\frac{I}{c} \hat{e}_z \begin{cases} \rho^2 / R_1^2 & ; \; \rho < R_2 \\ 1 + 2 \ln (\rho / R_1) & ; \; R_1 < \rho < R_2 \\ 1 + 2 \ln (R_2 / R_1) & ; \; \rho > R_1 \end{cases}$$