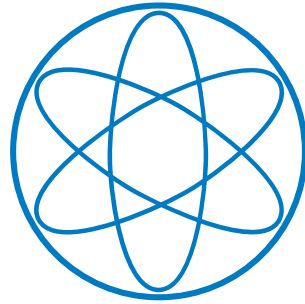


FERIENKURS ZUR THEORETISCHEN PHYSIK II
03. APRIL, 07. APRIL, 13. APRIL 2017
PHILIPP LANDGRAF, FRANZ ZIMMA



VORLESUNGSSKRIPT

LETZTE ÄNDERUNG: 17. APRIL 2017, 20:05 ES FEHLTE EIN 4π BEI DEN
STETIGKEITSBEDINGUNGEN

Inhaltsverzeichnis

0 Grundlagen	1
0.1 Koordinatensysteme	1
0.2 Tensorfelder und Summenkonvention	3
0.3 Vektoranalysis	4
0.4 Heaviside-Funktion und Delta-Distribution	7
1 Elektrostatik im Vakuum	9
1.1 Coulombgesetz und Feldgleichungen	9
1.2 Multipolentwicklung	11
1.3 Randwertprobleme	12
1.4 Energie und Arbeit im elektrischen Feld	13
2 Magnetostatik im Vakuum	14
2.1 Stromdichte	14
2.2 Feldgleichungen	15
2.3 Magnetischer Dipol	17
3 Felder in polarisierbarer Materie	18
3.1 Dielektrische Verschiebung und Magnetische Erregung	18
3.2 Elektrostatische Energie	19
4 Elektrodynamik	20
4.1 Faraday'sches Induktionsgesetz	20
4.2 Lösung der Maxwellgleichungen	21
4.3 Retardierte Potentiale	22
5 Elektromagnetische Wellen	23
5.1 Einführung	23



5.2	Elektrische und Magnetische Dipolstrahlung	24
5.3	Ebene Wellen	26
6	Spezielle Relativitätstheorie	29
6.1	Einführung	29
6.2	Kovariante Formulierung	30
6.3	Kovariante Formulierung der Elektrodynamik	32

0 Grundlagen

0.1 Koordinatensysteme

Abhängig von der Geometrie des vorliegenden Problems ist es meist sehr nützlich anstatt der kartesischen Koordinaten (x, y, z) ein anderes Koordinatensystem zu benutzen.

0.1.1 Zylinderkoordinaten

Der Übergang von kartesischen Koordinaten (x, y, z) in Zylinderkoordinaten (ρ, φ, z) erfolgt mit folgender Transformation:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \cos \varphi \\ \rho \sin \varphi \\ z \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} 0 \leq \rho < \infty \\ 0 \leq \varphi < 2\pi \\ -\infty < z < \infty \end{array} \quad (0.1)$$

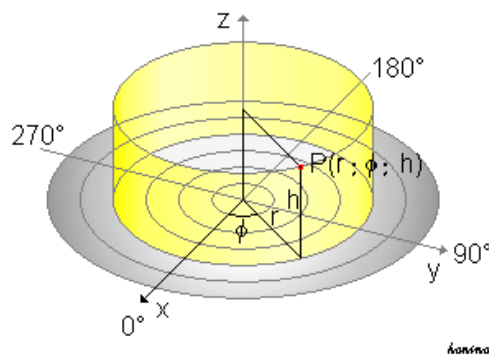


Abbildung 1: Parametrisierung in Zylinderkoordinaten. Die Grafik stammt von <https://de.wikipedia.org/wiki/Polarkoordinaten>.

Die Einheitsvektoren

$$\hat{e}_\rho = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\rho} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \quad \hat{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ +\cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\rho} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \quad \hat{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (0.2)$$

bilden ein rechtshändigen System in folgender Weise

$$\vec{e}_\rho \times \vec{e}_\varphi = \vec{e}_z \quad \vec{e}_z \times \vec{e}_\rho = \vec{e}_\varphi \quad \vec{e}_\varphi \times \vec{e}_z = \vec{e}_\rho. \quad (0.3)$$

In Zylinderkoordinaten ändert sich das Volumenelement zu

$$dV = dx dy dz = \rho d\rho d\varphi dz. \quad (0.4)$$

0.1.2 Kugelkoordinaten

Der Übergang von kartesischen Koordinaten (x, y, z) in Kugelkoordinaten (r, φ, θ) erfolgt mit folgender Transformation:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \sin \theta \cos \varphi \\ r \sin \theta \sin \varphi \\ r \cos \theta \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} 0 \leq r < \infty \\ 0 \leq \varphi < 2\pi \\ 0 \leq \theta < \pi \end{array} \quad (0.5)$$

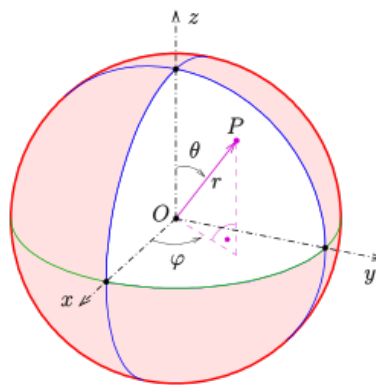


Abbildung 2: Parametrisierung in Kugelkoordinaten. Die Grafik stammt von <https://de.wikipedia.org/wiki/Kugelkoordinaten>.

Die Einheitsvektoren

$$\hat{e}_r = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \end{pmatrix} \quad \hat{e}_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \varphi \\ \cos \theta \sin \varphi \\ -\sin \theta \end{pmatrix} \quad \hat{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ +\cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad (0.6)$$

bilden wieder ein Rechtshändiges System in folgender Weise

$$\vec{e}_r \times \vec{e}_\theta = \vec{e}_\varphi \quad \vec{e}_\varphi \times \vec{e}_r = \vec{e}_\theta \quad \vec{e}_\theta \times \vec{e}_\varphi = \vec{e}_r. \quad (0.7)$$

In Kugelkoordinaten ändert sich das Volumenelement zu

$$dV = dx dy dz = r^2 \sin \theta d\varphi d\theta dr \quad (0.8)$$

und das Flächenelement der Kugeloberfläche ist

$$dA = r^2 \sin \theta d\varphi d\theta \quad d\vec{A} = dA \cdot \hat{e}_r. \quad (0.9)$$

0.2 Tensorfelder und Summenkonvention

0.2.1 Summenkonvention

Es ist oft von Vorteil, Rechnungen mit Matrizen und Vektoren (bzw. allgemeiner mit Tensoren) indexweise zu schreiben. Es hat sich eingebürgert hierfür die folgende **Summenkonvention** zu verwenden:

- Über doppelt vorkommende Indizes wird summiert.
- Die Summenzeichen werden dabei unterdrückt, da sie aus dem Kontext klar sind.

* Beispiel: Rotation eines Vektors

$$\vec{x}' = R\vec{x} \quad \Leftrightarrow \quad x'_i = \sum_{j=1}^3 R_{ij}x_j \equiv R_{ij}x_j \quad x_i = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_i \quad (0.10)$$

Wir werden in Kapitel 6.2.1 eine Erweiterung dieser Konvention kennenlernen.

0.2.2 Nützliche Tensoren: Kronecker-Delta und Levi-Civita-Symbol

Das **Kronecker-Symbol**

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (0.11)$$

ist ein invarianter¹ Tensor 2. Stufe.

Das **Levi-Civita-Symbol** ist ein total antisymmetrischer Tensor in allen Indizes

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & (ijk) \text{ ist gerade Permutation von } (123) \\ -1 & (ijk) \text{ ist ungerade Permutation von } (123) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (0.12)$$

Aus dieser Definition folgen folgende wichtige Identitäten

$$\epsilon_{ijk} = \epsilon_{jki} = \epsilon_{kij} = -\epsilon_{ikj} = -\epsilon_{jik} = -\epsilon_{kji} \quad (0.13)$$

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{imn} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km} \quad \epsilon_{ijk}\epsilon_{ijn} = 2\delta_{kn} \quad \epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk} = 6. \quad (0.14)$$

0.2.3 Vektoridentitäten

Mit Kronecker-Delta und Levi-Civita-Symbol können Skalar- und Kreuzprodukt dargestellt werden als

$$(\vec{a} \cdot \vec{b}) = a_i b_j \delta_{ij} = a_i b_i \quad (0.15)$$

$$(\vec{a} \times \vec{b})_i = \epsilon_{ijk} a_j b_k \quad (\vec{a} \times \vec{b}) = (\vec{a} \times \vec{b})_i \hat{e}_i. \quad (0.16)$$

¹Ein invarianter Tensor transformiert in sich selbst. Unter Rotation: $\delta'_{ij} = R_{ik}R_{jl}\delta_{kl} = \delta_{ij}$.

Weitere nützliche Vektoridentitäten:

$$\begin{aligned}
 (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} &= \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b} && \text{(Spatprodukt)} \\
 (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{a} &= (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{b} = 0 \\
 (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) &= (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{b} \cdot \vec{c})(\vec{a} \cdot \vec{d}) && \text{(Lagrange-Identität)} \\
 (\vec{a} \times \vec{b})^2 &= a^2 b^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 \\
 \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) &= \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}) && \text{ („baccab“-Formel)} \\
 (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} &= \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{c})
 \end{aligned}$$

0.3 Vektoranalysis

0.3.1 Nabla-Operator

Der Nabla-Operator in \mathbb{R}^3 ist definiert als folgender Vektoroperator:

$$\vec{\nabla} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right) \quad \nabla_i \equiv \partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}. \quad (0.17)$$

0.3.2 Gradient

Der Gradient wirkt auf Skalarfelder $\Phi(\vec{r}) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ und gibt einen Vektor aus:

$$\text{grad } \Phi(\vec{r}) \equiv \vec{\nabla} \Phi(x_1, x_2, x_3) = \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \hat{e}_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \hat{e}_2 + \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} \hat{e}_3 = (\partial_i \Phi) \hat{e}_i. \quad (0.18)$$

Dieser Vektor steht senkrecht auf Äquipotentialflächen und zeigt in Richtung der stärksten Änderung einer Funktion.

In Zylinder- und Kugelsymmetrie ist es nützlich den Gradienten in den Koordinaten der zugrundeliegenden Symmetrie zu verwenden:

Gradient in Zylinderkoordinaten

$$\text{grad } \Phi(\rho, \varphi, z) = \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \hat{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \hat{e}_\varphi + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \hat{e}_z \quad (0.19)$$

Gradient in Kugelkoordinaten

$$\text{grad } \Phi(r, \vartheta, \varphi) = \frac{\partial \Phi}{\partial r} \hat{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} \hat{e}_\vartheta + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \hat{e}_\varphi \quad (0.20)$$

Weitere **Eigenschaften**:

$$\vec{\nabla}(F + G) = \vec{\nabla}F + \vec{\nabla}G \quad (0.21)$$

$$\vec{\nabla}(F \cdot G) = \vec{\nabla}F \cdot G + F \cdot \vec{\nabla}G \quad (0.22)$$

$$\vec{\nabla}(F(G)) = \frac{\partial F(G)}{\partial G} \cdot \vec{\nabla}G \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla}F(r) = \frac{\partial F}{\partial r} \cdot \vec{\nabla}r = \frac{\partial F}{\partial r} \hat{e}_r \quad (0.23)$$

0.3.3 Divergenz

Die Divergenz (oder Quelledichte) wirkt auf Vektorfelder $\vec{E}(\vec{r}) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ und gibt ein Skalarfeld aus, das an jedem Punkt angibt, wie sehr die Vektoren in einer kleinen Umgebung des Punktes auseinanderstreben:

$$\operatorname{div} \vec{E}(x, y, z) \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \partial_i E_i \quad (0.24)$$

Divergenz in Zylinderkoordinaten

$$\operatorname{div} \vec{E}(\rho, \varphi, z) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho E_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial E_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \quad (0.25)$$

Divergenz in Kugelkoordinaten

$$\operatorname{div} \vec{E}(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 E_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (E_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial E_\varphi}{\partial \varphi} \quad (0.26)$$

Weitere **Eigenschaften**:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{A} + \vec{B}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \vec{\nabla} \cdot \vec{B} \quad (0.27)$$

$$\vec{\nabla} \cdot (F \vec{A}) = \vec{\nabla} F \cdot \vec{A} + F \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) \quad (0.28)$$

0.3.4 Rotation

Die Rotation (oder Wirbeldichte) wirkt auf Vektorfelder $\vec{A}(\vec{r}) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ und gibt einen Vektor aus:

$$\operatorname{rot} \vec{A}(x, y, z) \equiv \vec{\nabla} \times \vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \hat{e}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \hat{e}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \hat{e}_z$$

$$(\vec{\nabla} \times \vec{A})_i = \epsilon_{ijk} \partial_j A_k \quad (0.29)$$

Rotation in Zylinderkoordinaten

$$\operatorname{rot} \vec{A}(\rho, \varphi, z) = \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right] \hat{e}_\rho + \left[\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right] \hat{e}_\varphi + \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho \cdot A_\varphi) - \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} \right] \hat{e}_z \quad (0.30)$$

Rotation in Kugelkoordinaten

$$\operatorname{rot} \vec{A}(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (A_\varphi \sin \theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right] \hat{e}_r + \left[\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) \right] \hat{e}_\theta + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \hat{e}_\varphi \quad (0.31)$$

Weitere **Eigenschaften**:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{A} + \vec{B}) = \vec{\nabla} \times \vec{A} + \vec{\nabla} \times \vec{B} \quad (0.32)$$

$$\vec{\nabla} \times (F \cdot \vec{A}) = \vec{\nabla} F \times \vec{A} + F \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \quad (0.33)$$

0.3.5 Helmholtz'scher Satz

Aus den Definitionen folgt:

Gradientenfelder sind wirbelfrei:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \Phi = 0 \quad (0.34)$$

Wirbelfelder sind quellenfrei:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0 \quad (0.35)$$

Helmholtz-Satz:

Jedes hinreichend schnell abfallende Vektorfeld kann eindeutig in einen wirbelfreien und einen quellenfreien Anteil zerlegt werden.

$$\vec{A} = \vec{\nabla} \Phi + \vec{\nabla} \times \vec{V} \quad (0.36)$$

0.3.6 Laplace-Operator

Der Laplace-Operator

$$\Delta \equiv \vec{\nabla}^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \quad \Delta = \partial_i \partial_i \quad (0.37)$$

kann sowohl für Skalarfelder, als auch für Vektorfelder definiert werden:

$$\Delta \Phi(x, y, z) \equiv \vec{\nabla}^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \quad (0.38)$$

$$\Delta \vec{E}(x, y, z) \equiv \vec{\nabla}^2 \vec{E} = \sum_{i=x,y,z} \left(\frac{\partial^2 E_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_i}{\partial z^2} \right) \hat{e}_i \quad (0.39)$$

Der Laplace-Operator kann auch als Kombination der zuvor eingeführten Differentialoperatoren dargestellt werden:

$$\Delta \Phi = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \Phi) \quad (0.40)$$

$$\Delta \vec{E} = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \quad (0.41)$$

Laplace Operator in Zylinderkoordinaten

$$\Delta \Phi(\rho, \phi, z) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \quad (0.42)$$

Laplace Operator in Kugelkoordinaten

$$\Delta \Phi(r, \vartheta, \phi) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} \quad (0.43)$$

Weitere **Eigenschaften:**

$$\Delta (FG) = (\Delta F) G + 2 (\vec{\nabla} F) \cdot (\vec{\nabla} G) + F (\Delta G) \quad (0.44)$$

0.4 Heaviside-Funktion und Delta-Distribution

0.4.1 Heaviside-Funktion

Die Heaviside-Funktion (Sprungfunktion) ist definiert als²

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad (0.45)$$

Diese Funktion ist sehr geeignet um Fallunterscheidungen oder Begrenzungen zu beschreiben.

★ Beispiel: Ladungsdichte einer Vollkugel

Die Gesamtladung Q verteilt sich gleichmäßig auf das Kugelvolumen $\frac{4}{3}\pi R^3$ und ist lokalisiert auf $\Theta(R-r)$:

$$\rho(\vec{r}) = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \Theta(R-r) = \frac{3Q}{4\pi R^3} \cdot \begin{cases} 1 & r < R \\ 0 & r > R \end{cases}$$

Überprüfen der Gesamtladung:

$$\int d^3x \rho(\vec{r}) = \frac{3Q}{4\pi R^3} \cdot \int_0^\infty r^2 dr \Theta(R-r) \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{3Q}{4\pi R^3} \cdot \int_0^R r^2 dr \int d\Omega = Q$$

0.4.2 Delta-Distribution

Eine sehr einfache (wenn auch mathematisch höchst unsaubere) Definition der Delta Distribution ist

$$\delta(x-a) = \begin{cases} \infty & x = a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{mit} \quad \int_{a-\epsilon}^{a+\epsilon} \delta(x-a) dx \equiv 1 \quad \epsilon > 0 \quad (0.46)$$

Wir finden also eine Singularität bei der Nullstelle ihres Arguments, während sie sonst 0 ergibt. Integrieren wir $\delta(x-a)\psi(x)$ über ein Intervall, das die Singularitätsstelle a enthält „filtert $\delta(x-a)$ “ den Funktionswert an der Stelle a heraus:

$$\int_{a-\epsilon}^{a+\epsilon} dx \delta(x-a)\psi(x) = \psi(a). \quad (0.47)$$

Weitere nützliche Eigenschaften:

- Mit dem Gauß'schen Satz (1.9) kann allgemein gezeigt werden, dass gilt

$$\Delta \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = -4\pi \delta^3(\vec{r} - \vec{r}'). \quad (0.48)$$

- Die Heaviside-Funktion ergibt sich als Stammfunktion der Delta-Distribution

$$\Theta(x-a) = \int_{-\infty}^x dx' \delta(x' - a). \quad (0.49)$$

²Das Verhalten an der Stelle $x = 0$ ist konventionsabhängig, allerdings für unsere Fälle irrelevant.



- Ableitung der Delta-Distribution (man beachte, das Vorzeichen):

$$\int_{a-\epsilon}^{a+\epsilon} dx \delta'(x-a)\psi(x) = -\psi'(a). \quad (0.50)$$

- Für Funktionen $g(x)$ im Argument muss über die Nullstellen x_n von $g(x)$ in folgender Weise summiert werden

$$\delta(g(x)) = \sum_n \frac{\delta(x-x_n)}{|g'(x_n)|}. \quad (0.51)$$

Einen wichtigen Sonderfall stellt hierbei

$$\delta(a \cdot x) = \frac{1}{|a|} \delta(x) \quad (0.52)$$

dar.

Aufgrund ihrer Eigenschaften eignet sich die Delta-Distribution ausgezeichnet um „unendlich hohe Dichten“ an bestimmten „Orten“ zu beschreiben.

★ **Beispiel: Ladungsdichte einer Punktladung am Ort** $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$

Die Ladung q ist „unendlich hoch konzentriert“ auf den Punkt \vec{a} :

$$\rho(\vec{r}) = q \delta^3(\vec{x} - \vec{a}) = q \delta(x - a_1) \delta(y - a_2) \delta(z - a_3)$$

Wir überprüfen die Gesamtladung

$$\int d^3x \rho(\vec{r}) = q \int d^3x \delta^3(\vec{x} - \vec{a}) = q \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - a_1) dx \int_{-\infty}^{\infty} \delta(y - a_2) dy \int_{-\infty}^{\infty} \delta(z - a_3) dz = q$$

★ **Beispiel: Ladungsdichte eines (unendlich dünnen) Zylindermantels**

Die Gesamtladung Q ist homogen verteilt auf die Mantelfläche $2\pi R h$, begrenzt auf $-\frac{h}{2} < z < \frac{h}{2}$ und „unendlich hoch konzentriert“ auf den „Mantelort“ $\rho = R$:

$$\rho(\vec{r}) = \frac{Q}{2\pi R h} \Theta\left(\frac{h}{2} - |z|\right) \delta(R - \rho)$$

Wir überprüfen erneut die Gesamtladung

$$\int d^3x \rho(\vec{r}) = \frac{Q}{2\pi R h} \int_0^{\infty} \rho d\rho \delta(R - \rho) \int_{-\infty}^{\infty} dz \Theta\left(\frac{h}{2} - |z|\right) \int_0^{2\pi} d\varphi = Q.$$

1 Elektrostatik im Vakuum

1.1 Coulombgesetz und Feldgleichungen

1.1.1 Feld und Potential einer Punktladung

Grundlage für die Elektrostatik ist das experimentell erschlossene Coulombgesetz

$$\vec{F}_C = \frac{k}{r^2} \cdot q \cdot Q \cdot \hat{e}_r. \quad (1.1)$$

Wobei Q und q die Ladungen sind, zwischen welchen die Kraft berechnet wird. Der Faktor k ist eine Konstante und nur aus Einheitentechnischen Gründen vorhanden. Im SI Einheitensystem würde diese Konstante $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ betragen. Dies liegt an der Definition der Basiseinheit Ampere und der damit verbundenen Definition der Ladung $1\text{ C} = 1\text{ As}$. Um sich Schreibarbeit zu sparen definieren wir allerdings hier die sogenannten Gauss-Einheiten (welche auch zwingend in der Klausur zu verwenden sind). Hierbei wird einfach $k = 1$ gesetzt, wodurch die Einheit des Stroms und damit auch der Ladung bzw. Kraft usw. direkt aus den Basiseinheiten (hier Centimeter, Gramm und Second, **cgs**) abgeleitet werden.

Nun ist es zweckmäßig das elektrische Feld über die beobachteten Kräfte zu definieren:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}_C}{q} = k \cdot \frac{Q}{r^2} \hat{e}_r, \quad (1.2)$$

wobei davon ausgegangen wird, dass sich die erzeugende Ladung im Ursprung befindet. Dieses Vektorfeld ist ein Gradientenfeld. Das heißt, dass sich ein elektrostatisches Potential definieren lässt, welches folgende Bedingung erfüllt:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\Phi(\vec{r}). \quad (1.3)$$

Das Potential hat dann folgende Form:

$$\Phi(\vec{r}) = k \cdot \frac{Q}{r} \quad (1.4)$$

Im weiteren Verlauf des Skripts wird der Faktor $k = 1$ nicht mehr explizit genannt.

1.1.2 Mehrere Punktladungen - Das Superpositionssystem

Nun wollen wir das Feld mehrerer Punktladungen betrachten. Sowohl für das elektrostatische Potential als auch für die elektrischen Felder gilt das Superpositionsprinzip. Das bedeutet, um das Feld für eine Anordnung von n Punktladungen zu erhalten, addiert man einfach die Felder der einzelnen Ladungen. Hieraus folgt dann für Feld

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^n \frac{Q_i(\vec{r} - \vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3}. \quad (1.5)$$

und Potential

$$\Phi(\vec{r}) = \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}. \quad (1.6)$$

1.1.3 Kontinuierliche Ladungsverteilung

Um nun komplexere Probleme berechnen zu können, müssen wir von Punktladungen zu Ladungsdichten übergehen. Aus der Summe wird dann ein Integral, und das elektrische Feld hat folgende Form:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}')(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}, \quad (1.7)$$

wobei $\rho(\vec{r})$ die Ladungsdichte beschreibt. Dieses Integral ist vektoriell, weshalb es in den meisten Fällen viel einfacher ist das Potential zu berechnen, und daraus dann auf das elektrische Feld zu schließen. Das elektrostatische Potential hat folgende Form:

$$\Phi(\vec{r}) = \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (1.8)$$

1.1.4 Gauß'scher Integralsatz und Poissongleichung

Ein wichtiger Satz aus der Analysis ist der Gauß'sche Integralsatz:

$$\oint_{F=\partial V} d\vec{F} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \iiint_V dV (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r})). \quad (1.9)$$

Dieser Satz besagt anschaulich, dass der Fluss durch eine geschlossene Fläche gleich der Quellen im Inneren dieser Fläche ist. Er spielt eine große Rolle in der Elektrostatik. Betrachten wir nun z.B den Fluss des elektrischen Feldes durch eine geschlossene Fläche. Wir erhalten allgemein:

$$\oint_{F=\partial V} d\vec{F} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = 4\pi \iiint_V dV \rho(\vec{r}). \quad (1.10)$$

Durch Vergleich mit dem Gauß'schen Integralssatz erhalten wir folgende Maxwellgleichung:

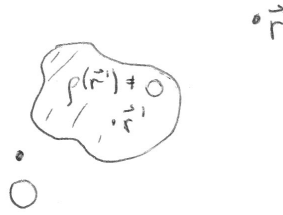
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = 4\pi\rho(\vec{r}) \quad (1.11)$$

Hieraus folgt mit $\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\Phi(\vec{r})$ direkt die Poissongleichung

$$\Delta\Phi(\vec{r}) = -4\pi\rho(\vec{r}). \quad (1.12)$$

1.2 Multipolentwicklung

Nun interessieren wir uns für das Potential sowie das elektrische Feld einer Ladungsverteilung $\rho(\vec{r}')$ in großer Entfernung \vec{r} zur Quelle.



Hierzu Taylorentwickeln wir den inversen Abstand:

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} &= (r^2 + r'^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{r}')^{-1/2} = \frac{1}{r} \left(1 - \frac{2\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^2} + \frac{r'^2}{r^2} \right)^{-1/2} \\ &= \frac{1}{r} \left[1 - \frac{1}{2} \left(-\frac{2\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^2} + \frac{r'^2}{r^2} \right) + \frac{3}{8} \left(\frac{2\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^2} + \dots \right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{r} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^3} + \frac{1}{2r^5} [3(\vec{r} \cdot \vec{r}')^2 - \vec{r}^2 \cdot \vec{r}'^2] + \dots \end{aligned} \quad (1.13)$$

Setzt man dies nun in Gleichung (1.8) ein, erhält man folgenden Ausdruck für das Potential

$$\Phi(\vec{r}) = \left[\frac{1}{r} \int d^3r' \rho(\vec{r}') + \frac{\vec{r}}{r^3} \int d^3r' \vec{r}' \rho(\vec{r}') + \frac{1}{2r^5} \sum_{i,j=1}^3 x_i x_j \int d^3r' (3x'_i x'_j - \delta_{ij} \vec{r}'^2) \rho(\vec{r}') \right]$$

Das erste Integral ist hierbei der Monopol-Term, das zweite der Dipol-Term, das dritte der Quadrupol-Term. Höhere Ordnungen werden in der Regel nicht berücksichtigt. Das erste Integral gibt die Gesamtladung:

$$q = \int d^3r' \rho(\vec{r}') \quad (1.14)$$

Das zweite Integral wird Dipolmoment genannt.

$$\vec{p} = \int d^3r' \vec{r}' \rho(\vec{r}') \quad (1.15)$$

Das dritte Integral ist der Quadrupoltensor.

$$Q_{ij} = \int d^3r' (3x'_i x'_j - \delta_{ij} \vec{r}'^2) \rho(\vec{r}'). \quad (1.16)$$

Zu beachten ist die Symmetrie des Quadrupoltensors: $Q_{ij} = Q_{ji}$. Des Weiteren ist der Quadrupoltensor auch spurfrei: $Q_{11} + Q_{22} + Q_{33} = 0$.

Das Potential kann also letztendlich dargestellt werden als:

$$\Phi(\vec{r}) = \left[\underbrace{\frac{q}{r}}_{\sim \frac{1}{r}} + \underbrace{\frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3}}_{\sim \frac{1}{r^2}} + \underbrace{\frac{1}{2r^5} \sum_{i,j=1}^3 x_i x_j Q_{ij}}_{\sim \frac{1}{r^3}} \right]. \quad (1.17)$$

Nun betrachten wir die Form eines reinen Dipolfeldes.

$$\vec{E}_{\text{Dipol}}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} \left(\frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} \right) = \left(\frac{3\vec{r}(\vec{p} \cdot \vec{r})}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3} \right). \quad (1.18)$$

1.3 Randwertprobleme

Es gibt zwei relevante Arten des Randwertproblems.

- **Das Dirichlet'sche Randwertproblem:**
 $\Phi(\vec{r})$ ist auf einer Randfläche $F = \partial V$ vorgegeben.
- **Das Neumann'sche Randwertproblem:**
 Die Normalenableitung von $\frac{\partial \Phi}{\partial n} = n \cdot \vec{\nabla} \Phi$ ist auf einer Randfläche $F = \partial V$ vorgegeben.

Allgemein kann man diese Probleme allgemein lösen mit Hilfe einer Green'schen Funktion.

$$\Phi(\vec{r}) = \int_V dV' G_D(\vec{r}, \vec{r}') \rho(\vec{r}') - \frac{1}{4\pi} \oint dF' \Phi(\vec{r}') \frac{\partial}{\partial n'} G_D(\vec{r}, \vec{r}') \quad (1.19)$$

Es gestaltet sich in den meisten Fällen sehr schwierig die Green'sche Funktion zu bestimmen.

1.3.1 Methode der Bildladungen

Die Methode der Bild- oder Spiegelladungen stellt eine effektive Methode dar, um die Green'sche Funktion für bestimmte physikalische Probleme zu konstruieren. Allgemein wird das Dirichlet'sche Randwertproblem durch folgende Green'sche Funktion gelöst:

$$G_D(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{|\vec{r}' - \vec{r}|} + f(\vec{r}, \vec{r}') \quad (1.20)$$

Wobei man sich den Term $f(\vec{r}, \vec{r}')$ physikalisch als Potential einer Ladungsverteilung vorstellen kann, welche außerhalb des betrachteten Volumens liegt, und die Randbedingung erfüllt, dass G_D auf der Randfläche verschwindet.

* Beispiel: Punktladung vor Metallplatte

Es befindet sich eine Punktladung q im Abstand a über einer geerdeten unendlich großen Metallplatte. Berechnen sie das Potential im oberen Halbraum, sowie die induzierte Flächenladungsdichte.

Um das Potential zu berechnen bilden wir den Ansatz mit einer Spiegelladung entgegengesetzter Ladung $-q$ im Abstand a' .

$$G_D(\vec{r}, \vec{r}') = \left(\frac{1}{|\vec{r}' - \vec{r}|} + \frac{q_B}{|\vec{r}' - \vec{r}_B|} \right)_{z=0} = 0 \quad (1.21)$$

Durch Lösen dieser Gleichung erhält man $q_B = -1$ und $\vec{r}_B = (x, y, -z)$. Dies ergibt das Potential

$$\Phi(x, y, z) = Q \left([x^2 + y^2 + (z - a)^2]^{-\frac{1}{2}} - [x^2 + y^2 + (z + a)^2]^{-\frac{1}{2}} \right). \quad (1.22)$$

Zu beachten ist, dass dieses Potential nur im oberem Halbraum $z > 0$ gilt. Also gilt das Potential **NIE** in dem Bereich in dem die Spiegelladung platziert wurde. Für weitere Aufgaben kann nun benutzt werden, dass die Spiegelladung hinter einer Metallplatte immer den gleichen Abstand wie die erzeugende Ladung hat, und die entgegengesetzte Ladung.

ACHTUNG! Nur Ladungen und Ladungsverteilungen spiegeln, keine komplexeren Strukturen.

Nun erhalten wir aus dem Potential das elektrische Feld:

$$\vec{E}(x, y, 0) = -\vec{\nabla}\Phi(x, y, z)\Big|_{z=0} = -2Qa(x^2 + y^2 + a^2)^{-\frac{3}{2}}\vec{e}_z \quad (1.23)$$

Aus dem Sprung der Normalenkomponente (Metallplatten schirmen ab d.h im Halbraum $z < 0$ ist das elektrische Feld 0) lässt sich die influenzierte Flächenladungsdichte errechnen.

$$\sigma(x, y) = \frac{1}{4\pi}E_z(x, y, 0) = -2Qa[x^2 + y^2 + a^2]^{-\frac{3}{2}} \quad (1.24)$$

1.4 Energie und Arbeit im elektrischen Feld

Nun, da wir elektrische Felder für alle möglichen Ladungsverteilungen berechnen können, interessieren wir uns noch für die Energie sowie die Energiedichte im elektrischen Feld. Zuerst berechnen wir die Arbeit, die nötig ist um eine Punktladung q aus dem unendlichen an den Ort \vec{r} zu bringen.

$$W(\vec{r}) = -q \int_{\infty}^{\vec{r}} d\vec{r}' \cdot \vec{E}(\vec{r}') = q\Phi(\vec{r}) \quad (1.25)$$

Um nun auf Ladungsverteilungen überzugehen, berechnen wir zuerst die Kraft um N Punktladungen q_i von ∞ an den jeweiligen Ort \vec{r}_i zu bringen:

$$W_i = q_i \sum_{j=1}^{i-1} \frac{q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \quad (1.26)$$

Die gesamte potentielle Energie ergibt sich dann aus der Summe der W_i

$$W = \sum_{i=2}^N W_i = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1; i \neq j}^N \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}. \quad (1.27)$$

Nun wollen wir auf Kontinuierliche Ladungsverteilungen übergehen.

$$W = \frac{1}{2} \int d^3r \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}')\rho(\vec{r})}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{8\pi} \int d^3r |E(\vec{r})|^2 \quad (1.28)$$

Hierüber können wir eine Energiedichte definieren:

$$w = \frac{1}{8\pi}|E(\vec{r})|^2 \quad W = \int d^3r w = \frac{1}{8\pi} \int d^3r |\vec{E}(\vec{r})|^2. \quad (1.29)$$

2 Magnetostatik im Vakuum

Bewegte Ladungen („Ströme“) erzeugen Magnetfelder. In der Magnetostatik beschränken wir uns auf zeitunabhängig Ströme $\vec{j}(\vec{r}, t) = \vec{j}(\vec{r})$.

2.1 Stromdichte

Ausgangspunkt unserer Betrachtung ist (vgl. Ladungsdichte ρ) die Stromdichte

$$\vec{j} = \frac{\text{Strom}}{\text{Querschnittsfläche}} \times \text{Stromrichtung.} \quad (2.1)$$

Für dünne, stromdurchflossene Drähte können wir feststellen

$$\vec{j} = \frac{I}{\Delta F} \frac{d\vec{\ell}}{d\ell} \Rightarrow \vec{j} d^3r = I d\vec{\ell}. \quad (2.2)$$

Eine weitere, sehr intuitive Darstellung von \vec{j} ist die der bewegten Ladungsdichte:

$$\vec{j}(\vec{r}) = \rho(\vec{r}) \cdot \vec{v}(\vec{r}) \stackrel{\text{z.B.}}{=} \rho(\vec{r}) \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}). \quad (2.3)$$

Da Ladung eine Erhaltungsgröße ist, gilt die **Kontinuitätsgleichung**

$$\frac{\partial \rho(\vec{r}, t)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{r}, t) = 0 \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{r}) = 0 \text{ (statisch)}. \quad (2.4)$$

Die Änderung der elektrischen Ladung in einem (endlichen) Teilvolumen entspricht dem Stromfluss durch eine berandende Oberfläche.

2.1.1 Kräfte

Im Magnetfeld beobachtet man, dass der Beitrag zur Kraft, sich durch folgendes Kraftgesetz beschreiben lässt:

$$d\vec{F}(\vec{r}) = \frac{I}{c} d\vec{\ell} \times \vec{B}(\vec{r}). \quad (2.5)$$

Das hier eingeführte Vektorfeld \vec{B} nennt man „magnetische Flussdichte“ (oder hier vereinfacht „Magnetfeld“ oder einfach \vec{B} -Feld). Die Wahl der Lichtgeschwindigkeit c als Proportionalitätskonstante im Gaußschen Einheitensystem vereinfacht viele Formeln der Elektrodynamik.

Ersetzen wir $I d\vec{\ell} = I dt \vec{v} = dq \vec{v}$ können wir die Kraft berechnen, die auf eine bewegte Punktladung im Magnetfeld wirkt (Lorentz-Kraft)

$$\vec{F} = q \left(\frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} \right). \quad (2.6)$$

Um die Kraft zweier Leiterschleifen L_1, L_2 aufeinander zu berechnen erhalten wir nach einigen Umformungen

$$\vec{F}_{21} = \frac{I_1 I_2}{c} \oint_{L_1} \oint_{L_2} d\vec{r}_1 \cdot d\vec{r}_2 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} = -\vec{F}_{12} \quad (2.7)$$

Es ist zu bemerken, dass senkrecht aufeinander stehende Linienelemente $d\vec{r}_1 \cdot d\vec{r}_2 = 0$ nicht zur Gesamtkraft beitragen. Ferner ziehen sich parallele Ströme an, während sich antiparallele Ströme abstoßen.

2.2 Feldgleichungen

2.2.1 Biot-Savart Gesetz

Zur Bestimmung des Magnetfeldes $\vec{B}(\vec{r})$ kann man im Allgemeinen das **Biot-Savart-Gesetz** verwenden:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{I}{c} \oint_L d\vec{r}' \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \frac{1}{c} \int d^3r' \vec{j}(\vec{r}') \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}. \quad (2.8)$$

★ **Beispiel: Magnetfeld (auf z -Achse) einer kreisförmigen Leiterschleife**

Wir interessieren uns für das Feld auf der z -Achse (d.h. $\vec{r} = z \cdot \hat{e}_z$) einer kreisförmigen Leiterschleife in xy -Ebene mit Ursprung bei $z = 0$. In Zylinderkoordinaten können wir diese Leiterschleife parametrisieren als

$$\vec{r}' = \begin{pmatrix} R \cos \varphi' \\ R \sin \varphi' \\ 0 \end{pmatrix} \quad d\vec{r}' = \begin{pmatrix} -R \sin \varphi' \\ R \cos \varphi' \\ 0 \end{pmatrix} d\varphi' = R \hat{e}_{\varphi'} d\varphi'$$

Wir berechnen zuerst

$$\vec{r} - \vec{r}' = z \hat{e}_z - R \hat{e}_{\rho'} \quad |\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{R^2 + z^2} \quad d\vec{r}' \times (\vec{r} - \vec{r}') = \begin{pmatrix} Rz \cos \varphi' \\ Rz \sin \varphi' \\ R^2 \end{pmatrix} d\varphi'$$

und setzen ein in (2.8), wobei Terme $\sim \sin \varphi', \cos \varphi'$ bei $\int_0^{2\pi} d\varphi' \dots$ verschwinden:

$$\vec{B}(z) = \frac{I}{c} \int_0^{2\pi} d\varphi' \frac{1}{\sqrt{R^2 + z^2}^3} \begin{pmatrix} Rz \cos \varphi' \\ Rz \sin \varphi' \\ R^2 \end{pmatrix} = \frac{2\pi}{c} \frac{IR^2}{\sqrt{R^2 + z^2}^3} \hat{e}_z \quad (2.9)$$

Die zu diesem Problem gehörige Stromdichte $\vec{j}(\vec{r}) = I \delta(\rho - R) \delta(z) \hat{e}_{\varphi}$ würde letztendlich auf die selbe Rechnung führen.

2.2.2 Vektorpotential

Analog zur Elektrostatik ist es nützlich, in der Magnetostatik ein **Vektorpotential** zu definieren.

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int d^3r' \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \vec{\nabla} \Lambda \quad \vec{B}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}) \quad (2.10)$$

mit beliebigem Skalarfeld $\Lambda(\vec{x})$. Dieses Skalarfeld setzen wir in Coulomb-Eichung $\Lambda \equiv 0$. Diese Eichung vereinfacht die Herleitungen für die folgenden Formeln, hat jedoch keinen Einfluss auf die physikalischen Zusammenhänge.

Ist die Richtung von \vec{j} konstant (z.B. $\vec{j} \parallel \hat{e}_z$), so ist $\vec{A} \parallel \vec{j}$.

In Coulomb-Eichung gilt folgender Zusammenhang:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = -\Delta \vec{A}. \quad (2.11)$$

Damit können wir die Maxwell-Gleichungen für \vec{B} (in Abwesenheit eines \vec{E} -Feldes) bestimmen

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{r}) = 0 \quad \vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}) = \frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{r}) = -\Delta \vec{A}. \quad (2.12)$$

Die rechte Gleichung wird als **Feldgleichung der Magnetostatik** bezeichnet. Mit ihrer Hilfe kann das \vec{B} -Feld aus Symmetrieüberlegungen berechnet werden, ohne die Definitionsformel (2.10) zu benutzen.

★ **Beispiel: ρ -abhängiger Stromfluss in z -Richtung**

Wir betrachten eine zylindersymmetrische Anordnung, bei der die Stromdichte $\parallel \hat{e}_z$ nur vom horizontalen Abstand ρ zur Symmetrieachse abhängt:

$$\vec{j}(\vec{r}) = j(\rho) \hat{e}_z \quad \Rightarrow \quad \vec{A} = A_z(\rho) \hat{e}_z$$

Mit der Feldgleichung (2.12) müssen wir nun folgende Differentialgleichung (für alle Bereiche von \vec{j}) lösen

$$-\frac{4\pi}{c} \vec{j} = -\frac{4\pi}{c} j(\rho) \hat{e}_z = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial A_z(\rho)}{\partial \rho} \right) \hat{e}_z = \Delta \vec{A}$$

Die Integrationskonstanten müssen aus physikalischen Randbedingungen (z.B. Endlichkeit von \vec{A}) und Stetigkeitsbedingungen ($\vec{A} \neq \infty$ ist überall stetig und stetig differenzierbar an Stellen mit endlicher Stromdichte $\vec{j} \neq \infty$) bestimmt werden.

Das Magnetfeld \vec{B} erhält man schließlich durch

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = -\frac{\partial A_z(\rho)}{\partial \rho} \hat{e}_\varphi \equiv B(\rho) \hat{e}_\varphi.$$

2.2.3 Ampere'sches Gesetz

Mittels des Stokes'schen Satzes und der Feldgleichung (2.12) erhalten wir das **Ampere'sche Durchflutungsgesetz**:

$$\oint_{C=\partial F} d\vec{r} \cdot \vec{B}(\vec{r}) = \iint_F d\vec{F} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r})) = \frac{4\pi}{c} \iint_F d\vec{F} \cdot \vec{j}(\vec{r}) = \frac{4\pi}{c} I_{\text{eing}}. \quad (2.13)$$

Wir können also durch geschickte Wahl eines Weges $C = \partial F$ das Magnetfeld \vec{B} mit dem eingeschlossenen Strom in der umrandeten Fläche F verbinden. Es ist wichtig darauf zu achten, dass $d\vec{F}$ gemäß der Rechten-Hand-Regel richtig orientiert ist, sonst erhält man das falsche Vorzeichen!

In der Anwendung ist dieses Gesetz sehr nützlich, wenn man durch Symmetrieüberlegungen (oder Rechnungen) bereits Erwartungen an die Form von $\vec{B}(\vec{r})$ hat.

★ **Beispiel: ρ -abhängiger Stromfluss in z -Richtung**

Aus Symmetrieüberlegungen ist es nützlich, die Kurve C in Richtung von \vec{B} zu legen. Dies können wir für variable Abstände ρ von der z -Achse machen um verschiedene Bereiche zu behandeln.

$$\vec{B}(\vec{r}) = B(\rho) \hat{e}_\varphi = -\frac{\partial A_z(\rho)}{\partial \rho} \hat{e}_\varphi \quad \vec{r} = \rho \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ z \end{pmatrix} \quad d\vec{r} = \rho \hat{e}_\varphi d\varphi$$

Da $B(\rho)$ keine Abhängigkeit von der Integrationsvariable φ hat, können wir es mit dem Durchflutungsgesetz sehr leicht extrahieren:

$$\int_0^{2\pi} B(\rho) \cdot \rho d\varphi = 2\pi\rho B(\rho) = \frac{4\pi}{c} I_{\text{eing.}}(\rho) \quad B(\rho) = \frac{2I_{\text{eing.}}(\rho)}{c} \frac{1}{\rho}$$

2.3 Magnetischer Dipol

Die Multipolentwicklung des Vektorpotentials $\vec{A}(\vec{r})$ liefert einen verschwindenden Monopol-Term. Für große Entfernung ist der führende Term der Dipolterm:

$$\vec{A}(\vec{r}) \rightarrow \vec{A}_{\text{Dipol}}(\vec{r}) = \frac{\vec{\mu} \times \vec{r}}{r^3} \quad (2.14)$$

Das zugehörige magnetische Dipolfeld lautet (analog zu (1.18))

$$\vec{B}_{\text{Dipol}}(\vec{r}) = \left(\frac{3\vec{r}(\vec{\mu} \cdot \vec{r})}{r^5} - \frac{\vec{\mu}}{r^3} \right) \quad (2.15)$$

Der **Magnetische Dipolmomentvektor** $\vec{\mu}$ (unabhängig von der Wahl des Ursprungs) ist definiert als

$$\vec{\mu} = \frac{1}{2c} \int d^3r' \vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}') = \frac{I}{2c} \oint_L \vec{r}' \times d\vec{r}' \quad (2.16)$$

★ **Beispiel: Ebene, Stromdurchflossene Leiterschleife**

Ein wichtiger Spezialfall ist die ebene, stromdurchflossene Leiterschleife, für die das magnetische Moment einfach $\text{Strom} \cdot \text{Fläche} \cdot \text{Einheitsnormale} / c$ ist:

$$\vec{\mu} = \frac{I}{2c} \oint_L \vec{r}' \times d\vec{r}' = \frac{I}{2c} \int 2d\vec{F} = \frac{I \cdot F \cdot \vec{n}}{c} \quad (2.17)$$

Ein äußeres Magnetfeld übt eine Kraft \vec{F} auf einen Dipol aus. Diese können wir als negativen Gradienten der Wechselwirkungsenergie W darstellen:

$$\vec{F} = \vec{\nabla}(\vec{\mu} \cdot \vec{B}) = -\vec{\nabla}W \quad W = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} \quad (2.18)$$

Ein wichtiger Spezialfall ist das **Wechselwirkungspotential zweier magnetischer Dipole**:

$$W_{12} = -\vec{\mu}_1 \cdot \vec{B}_2^{\text{Dipol}}(\vec{r}_2) = \left(\frac{\vec{\mu}_1 \cdot \vec{\mu}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} - 3 \frac{(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \cdot \vec{\mu}_1 (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \cdot \vec{\mu}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^5} \right) \quad (2.19)$$

Durch geschickte Definition konnten wir eine starke Analogie Abschnitt 1.2 erzeugen, denn

$$\vec{\mu} \rightarrow \vec{p} \quad \vec{B} \rightarrow \vec{E}. \quad (2.20)$$

3 Felder in polarisierbarer Materie

3.1 Dielektrische Verschiebung und Magnetische Erregung

Bisher haben wir sämtliche Probleme nur im Vakuum behandelt. Nun wollen wir dazu übergehen, Elektromagnetische Felder in Materie zu betrachten.

Die normalen Maxwellgleichungen sind immer noch allgemein gültig, allerdings müsste man z.B. jeden induzierten Multipol einzeln betrachten und mit einrechnen. Um sich dies zu vereinfachen, benutzt man die Statistik und erhält „neue“ Maxwell-Gleichungen für Felder in Materie, welche diese induzierten Multipole statistisch berücksichtigen. Man führt sich hierzu zwei neue Hilfsgrößen ein.

Die erste nennt man **Dielektrische Verschiebung**, welche folgendermaßen definiert ist:

$$\vec{D}(\vec{r}) = \vec{E}(\vec{r}) + 4\pi\vec{P}(\vec{r}) \equiv \epsilon_r\vec{E}(\vec{r}) \quad (3.1)$$

Hierbei bezeichnet \vec{P} die Polarisation, welche für jedes Material einzeln bestimmt werden muss. Meistens gibt man allerdings nicht die Polarisation sondern die relative Permittivität ϵ_r an.

Analog hierzu definiert man sich zu \vec{B} die Hilfsgröße \vec{H} (**Magnetische Erregung**):

$$\vec{B} = \vec{H} + 4\pi\vec{M} = \mu_r\vec{H} \quad (3.2)$$

Hierbei nennt man \vec{M} Magnetisierung, und μ_r relative Permeabilität.

Die gesamten **Makroskopischen Maxwellgleichungen** sind dann:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 4\pi\rho_{\text{frei}} \quad (3.3)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (3.4)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (3.5)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}_{\text{frei}} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (3.6)$$

Wichtig sind hierbei noch die **Übergangsbedingungen** an Grenzflächen (GF). Mit der Grenzflächennormale \vec{n} (Richtung Bereich 2) gilt:

- Die Tangentialkomponente von \vec{E} ist stetig:

$$\vec{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{E}_{2;\parallel}(\text{GF}) = \vec{E}_{1;\parallel}(\text{GF}). \quad (3.7)$$

- Die Normalkomponente von \vec{D} springt um die freie Flächenladungsdichte σ_{frei} :

$$\vec{n} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = 4\pi\sigma_{\text{frei}} \quad \Rightarrow \quad D_{2;\perp}(\text{GF}) = D_{1;\perp}(\text{GF}) + 4\pi\sigma_{\text{frei}}. \quad (3.8)$$

Daraus lässt sich auch die Polarisationsflächenladungsdichte σ_{pol} bestimmen:

$$\vec{n} \cdot (\vec{P}_2 - \vec{P}_1) = -\sigma_{\text{pol}}. \quad (3.9)$$



- Die Tangentialkomponente von \vec{H} springt um die freie Flächenstromdichte \vec{J}_{frei} :

$$\vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \frac{4\pi}{c} \vec{J}_{\text{frei}} \quad \Rightarrow \quad \vec{H}_{2;\parallel}(\text{GF}) = \vec{H}_{1;\parallel}(\text{GF}) + \frac{4\pi}{c} \vec{J}_{\text{frei}}. \quad (3.10)$$

- Die Normalkomponente von \vec{B} ist stetig:

$$\vec{n} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{B}_{2;\perp}(\text{GF}) = \vec{B}_{1;\perp}(\text{GF}). \quad (3.11)$$

3.2 Elektrostatistische Energie

Durch die Reaktion der Materie auf Ladungen ändert sich auch die Energiedichte des elektrischen Feldes:

$$w(\vec{r}) = \frac{1}{8\pi} \vec{D}(\vec{r}) \cdot \vec{E}(\vec{r}). \quad (3.12)$$

Hierdurch ergibt sich die gesamte Arbeit zu

$$W = \frac{1}{8\pi} \int_V d^3r \vec{D}(\vec{r}) \cdot \vec{E}(\vec{r}). \quad (3.13)$$

4 Elektrodynamik

Bisher haben wir nur statische Problemstellungen behandelt. Nun fragen wir uns was passiert, falls sich die Felder zeitlich ändern.

4.1 Faraday'sches Induktionsgesetz

Zuerst definieren wir den magnetischen Fluss:

$$\phi_m = \int_F d\vec{F} \cdot \vec{B} \quad (4.1)$$

Das Faraday'sche Induktionsgesetz ist experimentel bestimmt und gibt an welche Spannung in einer Leiterschleife C induziert wird:

$$U_{\text{ind}} = -\frac{1}{c} \frac{d\phi_m}{dt} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_F d\vec{F} \cdot \vec{B} = \int_F d\vec{F} \cdot \text{rot } \vec{E}. \quad (4.2)$$

Die differentielle Form ist Teil der uns bekannten Maxwellgleichungen:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (4.3)$$

Eine wichtige Größe hierbei ist die gegenseitige Induktivität. Diese Gegeninduktivität ist definiert über folgende Gleichung:

$$\phi_2 = \int_F d\vec{F}_2 \cdot \vec{B}_1(\vec{r}_2) \equiv L_{21} I_1. \quad (4.4)$$

Für zwei Leiterkreise ergibt sich die Gegeninduktivität zu:

$$L_{21} = L_{12} = \frac{1}{c} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\vec{r}_1 \cdot d\vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}. \quad (4.5)$$

Eine Änderung des Stroms im Kreis C_1 induziert eine Spannung in Kreis C_2 :

$$U_2^{\text{ind}} = -\frac{d\phi_2}{dt} = -L_{21} \frac{dI_1}{dt}. \quad (4.6)$$

Eine weitere wichtige Größe ist die Selbstinduktivität. Man erhält sie, indem man die Formel der Gegeninduktivität eines Leiterkreises auf sich selbst anwendet. Danach verwendet man $I d\vec{r} = \vec{j} d^3r$:

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{c} \oint_C \oint_C \frac{d\vec{r}_1 \cdot d\vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} = \frac{1}{c} \int_V d^3r_1 \int_V d^3r_2 \frac{\vec{j}(\vec{r}_1) \cdot \vec{j}(\vec{r}_2)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} \\ &= \frac{1}{I^2} \int_V d^3r \vec{j}(\vec{r}) \cdot \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\ell}{I^2} \int_{F=\text{Querschnitt}} dF \vec{j}(\vec{r}_\perp) \cdot \vec{A}(\vec{r}_\perp). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Die Größe $\frac{L}{\ell}$ bezeichnet man als Selbstinduktivität pro Längeneinheit.

„Kochrezept“: Induktion

1. Feststellen ob sich \vec{B} , \vec{A} oder beides ändert.
2. Die jeweilige Änderung mathematisch formulieren.
3. Die konstanten Größen vor das Integral ziehen.
4. Das Integral sollte sich nun vereinfacht haben und man kann es leicht berechnen.

4.2 Lösung der Maxwellgleichungen

Ziel ist es die Maxwellgleichungen für vorgegebene Ladungs- und Stromquellen zu lösen.

Zur Erinnerung: Die Maxwellgleichungen im Vakuum sind:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho \quad (4.8)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (4.9)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (4.10)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (4.11)$$

Zuerst benutzen wir (4.8) und (4.10). Da \vec{B} divergenzfrei ist, kann man es als Rotation eines Vektorpotentials darstellen:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}. \quad (4.12)$$

Setzen wir dies in (4.10) ein, erhalten wir

$$\text{rot } \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\text{rot } \vec{A}) = 0 = \text{rot} \left(\vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right). \quad (4.13)$$

Da die Rotation 0 ergibt, muss dies als Gradient darstellbar sein. Hieraus folgt:

$$-\vec{\nabla} \Phi = \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}. \quad (4.14)$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}. \quad (4.15)$$

Nun kann man die Potentialdarstellungen der Felder in (4.11) einsetzen.

$$-\Delta \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \text{div } \vec{A} = 4\pi\rho \quad (4.16)$$

$$-\Delta \vec{A} + \text{grad div } \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \text{grad } \Phi + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j} \quad (4.17)$$

oder

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \vec{A} + \text{grad} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \text{div } \vec{A} \right) = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}. \quad (4.18)$$

Nun wählen wir innerhalb der Eichfreiheit die Lorenz-Eichung

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0. \quad (4.19)$$

Also Folge dieser Eichung entkoppeln die Gleichungen bezüglich Φ und \vec{A} .

Die resultierenden Gleichungen sind dann

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \Phi(\vec{r}, t) = -4\pi \rho(\vec{r}, t) \quad (4.20)$$

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \vec{A}(\vec{r}, t) = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{r}, t). \quad (4.21)$$

4.3 Retardierte Potentiale

Löst man die Maxwellgleichungen für vorgegebene Ladungs und Stromquellen, erhält man folgende zwei Wellengleichungen für die Potentiale:

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \Phi(\vec{r}, t) = -4\pi \rho(\vec{r}, t) \quad \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \vec{A}(\vec{r}, t) = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{r}, t). \quad (4.22)$$

Sucht man eine Lösung dieser Wellengleichung, ergeben sich die eindeutigen retardierten Potentiale

$$\Phi(\vec{r}, t)^{\text{ret}} = \int d^3 r' \frac{\rho(\vec{r}', t - \frac{1}{c} |\vec{r} - \vec{r}'|)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (4.23)$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t)^{\text{ret}} = \frac{1}{c} \int d^3 r' \frac{\vec{j}(\vec{r}', t - \frac{1}{c} |\vec{r} - \vec{r}'|)}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (4.24)$$

Hieraus definieren wir die Energiedichte

$$w_{\text{em}}(\vec{r}, t) = \frac{1}{8\pi} (\vec{D} \cdot \vec{E} + \vec{B} \cdot \vec{H}). \quad (4.25)$$

bzw. im Vakuum

$$w_{\text{em}}(\vec{r}, t) = \frac{1}{8\pi} (|\vec{E}|^2 + |\vec{B}|^2). \quad (4.26)$$

sowie den Poynting-Vektor (Energiestromdichte)

$$\vec{S}(\vec{r}, t) = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{H}. \quad (4.27)$$

beziehungsweise für $\mu = 1$ (also insbesondere im Vakuum)

$$\vec{S}(\vec{r}, t) = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{B}. \quad (4.28)$$

Die Energieerhaltung ist durch das sog. Poynting'sche Theorem gegeben:

$$\frac{\partial w_{\text{em}}}{\partial t} + \text{div } \vec{S} = -\vec{j} \cdot \vec{E}. \quad (4.29)$$

5 Elektromagnetische Wellen

Oszillierende Ladungs- (bzw. Stromdichten) erzeugen elektromagnetische Strahlung. Wir beschäftigen uns nun mit der Erzeugung, Ausbreitung und Interaktion dieser Strahlung.

5.1 Einführung

5.1.1 Komplexe Felder

Um die Rechnungen zu vereinfachen, benutzen wir komplexe Physikalische Größen, bei denen wir den Räumlichen Anteil (Amplitude) und die zeitliche Oszillation trennen. Die physikalischen Lösungen sind schließlich der Realteil des Endergebnisses.

$$\vec{X}(\vec{r}, t) = \text{Re} \left(\vec{X}(\vec{r}) e^{-i\omega t} \right) \quad (5.1)$$

Achtung: Sofern wir Felder multiplizieren (z.B. $\vec{E} \times \vec{B}$) müssen wir die Realteile vorher bilden, da ansonsten Real- und Imaginärteile mischen.

Mit Kenntnis der Amplitude $\vec{X}(\vec{r})$ können wir zeitliche Ableitungen sehr einfach handhaben.

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{X}(\vec{r}, t) = \text{Re} \left(-i\omega \vec{X}(\vec{r}) e^{-i\omega t} \right) \quad (5.2)$$

Sonstige (räumliche) Operationen (z.B. $\vec{\nabla} \times$) konzentrieren sich nur auf den Amplitudenteil, weswegen wir uns für die meisten Berechnungen nur mit $\vec{X}(\vec{r})$ beschäftigen.

5.1.2 Fernfeldnäherung

Zur Vereinfachung der zu untersuchenden Prozesse nehmen wir an, dass

$$r' \leq R_0 \ll \lambda \ll r \quad \lambda = \frac{2\pi c}{\omega} \quad k = \frac{\omega}{c} \quad (5.3)$$

Wir betrachten also sehr langwellige Strahlung (im Vergleich zur Ausdehnung R_0 der Strahlenquelle) und beschränken uns auf große Abstände r (Fernfeld), bei denen Ladungs- und Stromdichte verschwinden.

In erster Näherung brechen wir daher Entwicklungen ab bei

$$\mathcal{O} \left(\frac{1}{r^2} \right) \quad \mathcal{O} \left(\frac{kr'}{r} \right). \quad (5.4)$$

★ Beispiel: Nützliche Näherungen

Folgende Näherungen kommen häufig bei Berechnungen vor:

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{r} \left(1 - \frac{2\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^2} + \frac{r'^2}{r^2} \right)^{-1/2} = \frac{1}{r} + \mathcal{O} \left(\frac{1}{r^2} \right) \quad (5.5)$$

$$k |\vec{r} - \vec{r}'| = kr \left(1 - \frac{2\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^2} + \frac{r'^2}{r^2} \right)^{1/2} = kr \left(1 - \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^2} + \mathcal{O} \left(\frac{r'^2}{r^2} \right) \right) \quad (5.6)$$

$$e^{ik|\vec{r} - \vec{r}'|} = e^{ikr} \left(1 + k \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r} + \mathcal{O} \left(\frac{r'^2}{r^2} \right) \right) \quad (5.7)$$

$$\vec{\nabla} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) = \frac{e^{ikr}}{r} \cdot \left(ik - \frac{1}{r} \right) \hat{e}_r = ik \frac{e^{ikr}}{r} \hat{e}_r + \mathcal{O} \left(\frac{1}{r^2} \right) \quad (5.8)$$

5.2 Elektrische und Magnetische Dipolstrahlung

Bei gegebener Stromdichte kann das retardierte Vektorpotential $\vec{A}(\vec{r}, t) = \vec{A}(\vec{r})e^{-i\omega t}$ entwickelt werden

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{r}) &= \frac{1}{c} \int d^3r' \vec{j}(\vec{r}') \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \\ &= \frac{e^{ikr}}{cr} \int d^3r' \left[\vec{j}(\vec{r}') \right] \end{aligned} \quad (\mathbf{E1})$$

$$- \frac{e^{ikr}}{cr} \int d^3r' \left[\left(\frac{1}{r} - ik \right) \frac{1}{2} \hat{e}_r \times \left(\vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}') \right) \right] \quad (\mathbf{M1})$$

$$+ \frac{e^{ikr}}{cr} \int d^3r' \left[\left(\frac{1}{r} - ik \right) \frac{1}{2} \left((\hat{e}_r \cdot \vec{r}') \cdot \vec{j}(\vec{r}') + (\hat{e}_r \cdot \vec{j}(\vec{r}')) \cdot \vec{r}' \right) \right] \quad (\mathbf{E2})$$

Die ersten 3 auftretenden Terme können als Elektrische Dipolstrahlung (**E1**), Magnetische Dipolstrahlung (**M1**) und Elektrische Quadrupolstrahlung (**E2**) aufgefasst werden. Im folgenden beschränken wir uns nur auf E1 und M1.

5.2.1 Elektrische Dipolstrahlung (E1)

Eine oszillierende Ladungsverteilung

$$\rho(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r})e^{-i\omega t} \quad (5.9)$$

erzeugt in führender Ordnung ein Vektorpotential, das sich mit dem elektrischen Dipolmoment \vec{p} verknüpfen lässt:

$$\vec{A}_{\mathbf{E1}} \equiv \frac{e^{ikr}}{cr} \int d^3r' \left[\vec{j}(\vec{r}') \right] = -ik \frac{e^{ikr}}{r} \vec{p} \quad (5.10)$$

Die Amplitudenvektoren des \vec{B} - und \vec{E} -Feldes können wir bestimmen durch

$$\vec{B}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}) \quad \vec{E}(\vec{r}) = \frac{i}{k} \vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}) \quad (5.11)$$

und für erhalten für die resultierenden Fernfelder (Kugelwellen)

$$\vec{B}_{\mathbf{E1}} = k^2 \frac{e^{ikr}}{r} (\hat{e}_r \times \vec{p}) \quad \vec{E}_{\mathbf{E1}} = k^2 \frac{e^{ikr}}{r} (\hat{e}_r \times \vec{p}) \times \hat{e}_r \quad \vec{E}_{\mathbf{E1}} = \vec{B}_{\mathbf{E1}} \times \hat{e}_r. \quad (5.12)$$

Die Energie, die pro Zeit durch einen Teil einer Kugel mit Radius r fließt, ist $dP = \hat{e}_r \cdot \vec{S}_{\text{av}} r^2 d\Omega$. Somit ist die Strahlungsleistung pro Raumwinkel:

$$\frac{dP_{\mathbf{E1}}}{d\Omega} = \hat{e}_r \cdot \vec{S}_{\text{av}} r^2 = \frac{cr^2}{8\pi} \hat{e}_r \cdot \text{Re} \left(\vec{E}(\vec{r}) \times \vec{B}^*(\vec{r}) \right) = \frac{c}{8\pi} k^4 |\vec{p} \times \hat{e}_r|^2 \quad (5.13)$$

Wählen wir $\vec{p} \parallel \hat{e}_z$, so gilt $|\vec{p} \times \hat{e}_r|^2 = |\vec{p}|^2 \sin^2 \theta$.

Für gesamte, abgestrahlte Leistung gilt

$$P_{\mathbf{E1}} = \int d\Omega \frac{dP}{d\Omega} = \frac{c}{3} k^4 |\vec{p}|^2. \quad (5.14)$$



5.2.2 Magnetische Dipolstrahlung (M1)

Für eine verschwindende Ladungsverteilung (Annahme bei oszillierendem Strom)

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = \vec{j}(\vec{r})e^{-i\omega t} \quad \rho(\vec{r}, t) = 0 \quad (5.15)$$

kann im führenden Term des Vektorpotentials das magnetische Dipolmoment identifiziert werden.

$$\vec{A}_{M1} = ik \frac{e^{ikr}}{r} \left[\hat{e}_r \times \left(\frac{1}{2c} \int d^3r' \vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}') \right) \right] = ik \frac{e^{ikr}}{r} (\hat{e}_r \times \vec{\mu}) \quad (5.16)$$

Für die elektrischen und magnetischen M1-Fernfelder (Kugelwellen) erhalten wir

$$\vec{B}_{M1} = -k^2 \frac{e^{ikr}}{r} \hat{e}_r \times (\hat{e}_r \times \vec{\mu}) \quad \vec{E}_{M1} = -k^2 \frac{e^{ikr}}{r} (\hat{e}_r \times \vec{\mu}). \quad (5.17)$$

Die Strahlungsleistung ist

$$\frac{dP_{M1}}{d\Omega} = \frac{c}{8\pi} k^4 |\vec{\mu} \times \hat{e}_r|^2 \quad P_{M1} = \frac{c}{3} k^4 |\vec{\mu}|^2. \quad (5.18)$$

Offensichtlich ist hier wieder die Analogie erkennbar, wenn $\vec{p} \rightarrow \vec{\mu}$.

5.3 Ebene Wellen

\vec{E} - und \vec{B} -Felder können sich als ebene Wellen im Raum ausbreiten. Im folgenden untersuchen wir kurz die Grundlagen und einige Resultate dieser Aussage.

5.3.1 Wellengleichung

In Anwesenheit von freien Ladungs- und Stromquellen ($\rho = \vec{j} = 0$) können die makroskopischen Maxwellgleichungen im homogenen isotropischen Medium entkoppelt werden.

$$\left(\frac{\mu\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right) \vec{E}(\vec{r}, t) = 0 \quad \left(\frac{\mu\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right) \vec{B}(\vec{r}, t) = 0 \quad (5.19)$$

Hierbei handelt es sich um Wellengleichungen mit Phasengeschwindigkeit

$$v_{\text{ph}} = \frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{c}{n} \quad c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} \quad n = \sqrt{\mu\varepsilon}. \quad (5.20)$$

Elektromagnetische Wellen können sich also auch im Vakuum $\varepsilon = \mu = 1$ ausbreiten.

Die Wellengleichungen (5.19) werden durch folgende monochromatische, ebene Wellen gelöst:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \text{Re}\left(\vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}\right) \quad \vec{B}(\vec{r}, t) = \text{Re}\left(\vec{B}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}\right) \quad (5.21)$$

In homogenen, isotropen Medien gilt die Dispersionsrelation

$$\omega = \frac{c}{n} |\vec{k}|. \quad (5.22)$$

Da in (5.21) die zeitliche und räumliche Abhängigkeit in den Phasenfaktor absorbiert wurde, und die Amplitudenvektoren \vec{E}_0, \vec{B}_0 nun konstant sind, können wir folgende nützliche Ersetzungen machen:

$$\vec{\nabla} \rightarrow i\vec{k} \quad \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow -i\omega = -i\frac{ck}{c} \quad (5.23)$$

Damit folgt direkt aus den Maxwell-Gleichungen:

$$\vec{k} \perp \vec{E}(\vec{r}, t) \quad \vec{k} \perp \vec{B}(\vec{r}, t) \quad \vec{E}(\vec{r}, t) \perp \vec{B}(\vec{r}, t) \quad (5.24)$$

Das gilt auch, wenn \vec{k} komplex ist (Absorption). Für die Amplituden (und falls \vec{k} reell ist auch für die physikalischen Felder) gilt:

$$\vec{B}_0 = \frac{c}{\omega} \vec{k} \times \vec{E}_0 \quad |\vec{E}_0| = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} |\vec{B}_0| \quad (5.25)$$

5.3.2 Polarisation

Unter Kenntnis von \vec{k} , sind die Richtungen von \vec{E} und \vec{B} noch nicht eindeutig bestimmt. Die Zeitabhängigkeit der Richtung der Felder bezeichnet man als Polarisation.

Der komplexe Amplitudenvektor \vec{E}_0 kann in zwei reelle Vektoren \vec{b}_1 und \vec{b}_2 zerlegt werden (wobei die zusätzliche Phase α geeignet gewählt wird).

$$\vec{E}_0 = (\vec{b}_1 + i\vec{b}_2) e^{-i\alpha} \quad \vec{b}_1 \perp \vec{k} \quad \vec{b}_2 \perp \vec{k} \quad (5.26)$$

Explizites Einsetzen dieser Amplitude liefert (z.B: im kartesischen Orthonormalsystem)

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = E_1(\vec{r}, t)\hat{e}_1 + E_2(\vec{r}, t)\hat{e}_2 = \begin{pmatrix} b_1 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t - \alpha) \\ \pm b_2 \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t - \alpha) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.27)$$

Der Feldvektor bewegt sich offensichtlich auf einer Ellipse (bei festem \vec{r} um \vec{k})

$$\left(\frac{E_1(\vec{r}, t)}{b_1}\right)^2 + \left(\frac{E_2(\vec{r}, t)}{b_2}\right)^2 = 1. \quad (5.28)$$

Im Allgemeinen ist eine Welle elliptisch polarisiert, es gibt aber auch folgende Sonderfälle:

$$\vec{E}_0 e^{i\alpha} = (\vec{b}_1 + i\vec{b}_2) = \begin{cases} b\hat{e}_1 \text{ oder } \mp ib\hat{e}_2 & \text{linear polarisiert} \\ b(\hat{e}_1 \pm i\hat{e}_2) & \text{rechts / links zirkular polarisiert} \end{cases} \quad (5.29)$$

5.3.3 Energie und Impuls der Welle

Da \vec{E} - und \vec{B} -Felder zeitlich oszillieren ist es zweckmäßig, gemittelte Größen zu verwenden, wenn man sich für Energie und Impuls der Welle interessiert.

Für die vorliegende Betrachtung von Feldern der Art $a(t) = \text{Re}(a_0 e^{-i\omega t})$ ergibt die zeitliche Mittelung eines Produktes

$$\langle a(t)b(t) \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}(a_0 b_0^*). \quad (5.30)$$

Damit kann der gemittelte Poynting-Vektor (im einem Medium) dargestellt werden als

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{c}{8\pi} \frac{1}{\mu} \text{Re}(\vec{E}_0 \times \vec{B}_0^*) = \langle w_{\text{em}} \rangle \frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \hat{k} \quad (5.31)$$

mit der zugehörigen Energiedichte w_{em} und ihrem Mittelwert $\langle w \rangle_{\text{em}}$

$$w_{\text{em}} = \frac{1}{8\pi} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{B} \cdot \vec{H}) \quad \langle w_{\text{em}} \rangle = \frac{\varepsilon}{8\pi} |\vec{E}_0|^2 = \frac{1}{8\pi\mu} |\vec{B}_0|^2. \quad (5.32)$$

5.3.4 Brechung und Reflexion

Das Verhalten elektromagnetischer Wellen an Grenzflächen kann sehr einfach mit den kürzlich hergeleiteten Stetigkeitsbedingungen (keine freien Ströme und Ladungen) hergeleitet werden.

Wir untersuchen zwei Medien mit μ, ε bzw. μ', ε' und wiederholen die Ergebnisse für Reflexion und Transmission von Wellen.

Das **Reflexionsgesetz** besagt, dass Einfallswinkel und Ausfallswinkel gleich sind

$$\theta = \theta''. \quad (5.33)$$

Beim Übergang in ein anderes Medium wird die Richtung der Welle geändert, der Strahl wird gemäß dem **Snellius'schen Brechungsgesetz** „gebrochen“.

$$\frac{\sin \theta}{\sin \theta'} = \frac{n'}{n} \quad (5.34)$$

Nun wollen wir herausfinden, wie sich die Amplitudenvektoren verhalten. Hierfür unterscheiden wir zwischen senkrechtem Einfall ($\vec{E}_0 \perp$ zur Einfallsebene $\vec{n} \times \vec{k}$) und parallelem Einfall ($\vec{E}_0 \parallel (\vec{n} \times \vec{k})$). Der allgemeine, elliptische Fall kann durch Linearkombination bestimmt werden.

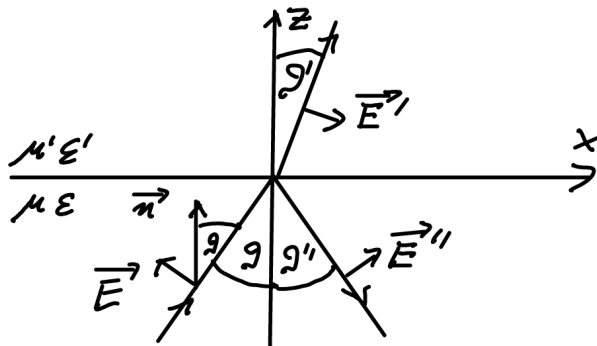


Abbildung 3: Winkel- und Amplitudenbezeichnungen für Transmission und Reflexion.

Wir erhalten die **Fresnel-Formeln** für Licht, das **senkrecht zur Einfallsebene** polarisiert ist

$$\left(\frac{E_0''}{E_0}\right)_{\perp} = \frac{\cos \theta - \sqrt{\frac{\epsilon' \mu}{\epsilon \mu'}} \cos \theta'}{\cos \theta + \sqrt{\frac{\epsilon' \mu}{\epsilon \mu'}} \cos \theta'} \stackrel{\mu=\mu'}{=} \frac{\sin(\theta' - \theta)}{\sin(\theta' + \theta)} \quad (5.35)$$

$$\left(\frac{E_0'}{E_0}\right)_{\perp} = \frac{2 \cos \theta}{\cos \theta + \sqrt{\frac{\epsilon' \mu}{\epsilon \mu'}} \cos \theta'} \stackrel{\mu=\mu'}{=} \frac{2 \cos \theta \sin \theta'}{\sin(\theta' + \theta)} \quad (5.36)$$

sowie die **Fresnel-Formeln** für Licht, das **parallel zur Einfallsebene** polarisiert ist

$$\left(\frac{E_0''}{E_0}\right)_{\parallel} = \frac{\epsilon' \tan \theta' - \epsilon \tan \theta}{\epsilon' \tan \theta' + \epsilon \tan \theta} \quad (5.37)$$

$$\left(\frac{E_0'}{E_0}\right)_{\parallel} = \frac{2 \epsilon \frac{n'}{n} \tan \theta}{\epsilon' \tan \theta' + \epsilon \tan \theta} \quad (5.38)$$

Aus Formel (5.38) ergibt sich ein interessantes Resultat (für $\mu = \mu'$): Die Intensität des Parallelanteils der reflektieren Welle wird 0, wenn die Welle unter dem sog. **Brewster-Winkel**

$$\tan \theta_B = \frac{n'}{n} \quad (5.39)$$

einfällt. Die reflektierte Welle ist also rein senkrecht zur Einfallsebene polarisiert.

6 Spezielle Relativitätstheorie

6.1 Einführung

In der speziellen Relativitätstheorie interessiert uns das Verhalten physikalischer Größen in verschiedenen Inertialsystemen (gleichförmig und geradlinig bewegte Bezugssysteme).

6.1.1 Grundlegende Postulate

Spezielles Relativitätsprinzip:

Die physikalischen Vorgänge sind unabhängig vom Inertialsystem, in welchem sie beobachtet werden.

Konstanz der Lichtgeschwindigkeit:

Die Maxwell-Gleichungen setzen voraus, dass sich Licht mit Geschwindigkeit c , unabhängig von der Quelle (also auch unabhängig vom Bewegungszustand der Quelle), ausbreitet. Die Lichtgeschwindigkeit c ist also konstant in jedem Bezugssystem.

Die Galileo-Transformation aus der klassischen Mechanik hält diesen Postulaten nicht stand, sie führen zu einer Gruppe an allgemeineren Transformationen, den Lorentz-Transformationen.³ Diese schließen Boosts (Wechsel in gleichförmig bewegtes IS) und Rotationen ein.

* Beispiel: Wechsel in IS' , welches sich mit $\vec{v} = v \cdot \hat{e}_z$ relativ zu IS bewegt

Wir gehen davon aus, dass die Koordinatensysteme im Ursprung übereinstimmen

$$t' = 0 \quad x' \quad \Leftrightarrow \quad t = 0 \quad x = 0. \quad (6.1)$$

Da sich Licht in beiden IS mit gleicher Geschwindigkeit c bewegt muss

$$0 = c^2 t^2 - \vec{x}^2 = c^2 t'^2 - \vec{x}'^2 \quad (6.2)$$

erfüllt sein.

Hieraus kann folgende lineare Transformationsvorschrift bestimmt werden:

$$t' = \gamma \left(t - \frac{v}{c^2} z \right) \quad z' = \gamma (z - vt) \quad x' = x \quad y' = y. \quad (6.3)$$

wobei wir

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \quad (6.4)$$

eingeführt haben.

Aus diesem Transformationsverhalten ergeben sich zwei interessante Effekte für die Begriffe „Raum“ und „Zeit“.

³Tatsächlich sind die Galileo-Transformationen als Grenzfall $c \rightarrow \infty$ wiederhergestellt.

6.1.2 Längenkontraktion

Längen, die im Ruhesystem ℓ_0 betragen, werden in bewegten IS verkürzt

$$\ell = \frac{1}{\gamma} \ell_0 = \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \ell_0. \quad (6.5)$$

6.1.3 Zeitdilatation

Zeiten, die im Ruhesystem t_0 betragen, werden in bewegten IS verlängert

$$t = \gamma t_0 = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} t_0. \quad (6.6)$$

6.2 Kovariante Formulierung

6.2.1 Tensorfelder im Minkowski-Raum

Das invariante Skalarprodukt der speziellen Relativitätstheorie

$$x \cdot y = x^0 y^0 - \vec{x} \cdot \vec{y} = x'^0 y'^0 - \vec{x}' \cdot \vec{y}' = x' \cdot y' \quad (6.7)$$

definiert eine Pseudo-Metrik, die Minkowski-Metrik

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (6.8)$$

Wir erweitern die Summenkonvention, die wir in Kapitel 0.2.1 kennengelernt haben:

- Über doppelt vorkommende Indizes wird summiert, **sofern** genau ein Index unten (kovariant) und genau ein Index oben (kontravariant) steht.
- Grundsätzlich werden Indizes, die von 0 bis 4 laufen, mit griechischen Buchstaben gekennzeichnet. Man beachte hier die Metrik.
- Räumliche Komponenten ($i = 1, 2, 3$) werden mit lateinischen Buchstaben gekennzeichnet.
- Bei Umformungen dürfen sich die Indexstellungen nicht ändern. Ko(ntra)variante Indizes bleiben Ko(ntra)variant. Eine Ausnahme stellen hierbei die Indizes dar, über die summiert wird, da $x_\mu y^\mu$ und $x^\mu y_\mu$ das gleiche Ergebnis liefern.

Wir definieren **Kontravariante** Vierervektoren (**Indices oben**) indem wir zwei zusammenhängende physikalische Konzepte vereinen, z.B. Zeit und Raum

$$x^\mu \equiv \begin{pmatrix} ct \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0 \\ \vec{x} \end{pmatrix} \quad \mu = 0, 1, 2, 3. \quad (6.9)$$

Dazugehörig definiert man den **Kovarianten** Vierervektor (**Index unten**) als

$$x_\mu = (x_0 \quad x_1 \quad x_2 \quad x_3) = (x^0 \quad -x^1 \quad -x^2 \quad -x^3) \quad (6.10)$$



Man beachte, dass für die 0-Komponente gilt $x^0 = x_0$, wobei für die i -Komponenten gilt $x^i = -x_i$.

Wir sehen, dass wir über die Metrik g Ko- und Kontravariante Objekte ineinander überführen können („Heben und Senken von Indizes“).

$$x^\mu = g^{\mu\nu} x_\nu \quad x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu. \quad (6.11)$$

Mit diesen Definitionen können wir das Skalarprodukt darstellen als

$$x \cdot y = g_{\mu\nu} x^\mu y^\nu = x^0 y^0 - x^i y^i = x^0 y^0 - \vec{x} \cdot \vec{y} \quad (6.12)$$

$$= g^{\mu\nu} x_\mu y_\nu = x_0 y_0 - x_i y_i = x^0 y^0 - (-x^i)(-y^i) = x^0 y^0 - \vec{x} \cdot \vec{y}. \quad (6.13)$$

Wir können partielle Ableitungen darstellen als

$$\partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \begin{pmatrix} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \\ -\vec{\nabla} \end{pmatrix} \quad \partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \begin{pmatrix} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \\ \vec{\nabla}^T \end{pmatrix}. \quad (6.14)$$

Kovariante Ableitungen wirken auf Kontravariante Objekte (und umgekehrt) - wie in Summenkonvention erwartet. Das Quadrat des Ableitungs-Vierervektor ist

$$\partial^2 \equiv \partial_\mu \partial^\mu = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 = \square. \quad (6.15)$$

Nun arbeiten wir Lorentz-Transformationen Λ in unser Konzept ein. Fassen wir Λ und seine Rücktransformation $[\Lambda]^{-1}$ als Variablen-Transformationen auf

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \quad [\Lambda^{-1}]^\nu{}_\mu = \Lambda_\mu{}^\nu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \quad (6.16)$$

mit den Eigenschaften, dass

$$\Lambda^\alpha{}_\mu \Lambda^\mu{}_\beta = \delta^\alpha{}_\beta \quad \text{und} \quad g_{\mu\nu} = \Lambda^\rho{}_\mu g_{\rho\sigma} \Lambda^\sigma{}_\nu \quad g = \Lambda^T g \Lambda. \quad (6.17)$$

★ Beispiel: Darstellung des Boosts in z -Richtung

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}^\mu{}_\nu \quad [\Lambda^{-1}]^\nu{}_\mu = \Lambda_\mu{}^\nu = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}^\nu{}_\mu \quad (6.18)$$

★ Beispiel: Rotation mit Rotationsmatrix R

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & R & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}^\mu{}_\nu \quad [\Lambda^{-1}]^\nu{}_\mu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & R^T & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}^\nu{}_\mu \quad (6.19)$$

Wir interessieren uns für das Verhalten physikalischer Größen, wenn wir sie in anderen Bezugssystemen betrachten. Dafür betten wir diese in Tensoren ein, die in festgelegter Weise transformieren.

- Skalar (Tensor 0. Stufe)

$$\Phi' = \Phi \quad (6.20)$$

- Vierervektor (Tensor 1. Stufe)

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} \quad x'_{\mu} = \Lambda_{\mu}^{\nu} x_{\nu} \quad (6.21)$$

- Tensor 2. Stufe

$$T'^{\mu\nu} = \Lambda^{\mu}_{\rho} \Lambda^{\nu}_{\sigma} T^{\rho\sigma} \quad T'_{\mu\nu} = \Lambda_{\mu}^{\rho} \Lambda_{\nu}^{\sigma} T_{\rho\sigma} \quad (6.22)$$

- Höhere Tensoren sind für unsere Betrachtungen nicht relevant. Die Verallgemeinerung ist jedoch offensichtlich.

6.2.2 Relativistische Kinematik

In allen (Stoß-)Prozessen gilt Viererimpuls-Erhaltung (Energieerhaltung und Impulserhaltung)

$$p_1 + \dots + p_n = p'_1 + \dots + p'_m \equiv P \quad (6.23)$$

mit dem Viererimpuls (m_i ist die Ruhemasse des Teilchens i)

$$(p_i)^{\mu} = p_i^{\mu} \equiv \begin{pmatrix} p_i^0 \\ \vec{p}_i \end{pmatrix}^{\mu} \quad cp_i^0 = E_i = \sqrt{m_i^2 c^4 + \vec{p}_i^2 c^2}. \quad (6.24)$$

Es ist oft nützlich, gegebene in das Schwerpunktsystem (System, bei dem die Summe der 3-Impulse $\vec{P} = \vec{0}$ ist) zu transformieren, dort zu lösen und dann zurück zu transformieren, wobei gilt, dass das Quadrat des Gesamtviererimpulses invariant ist

$$P^2 = (p_1 + p_2)^2 = \begin{cases} (p_1^0 + p_2^0)^2 - (\vec{p}_1 + \vec{p}_2)^2 & \text{Allgemein} \\ (\tilde{p}_1^0 + \tilde{p}_2^0)^2 & \text{Schwerpunktsystem} \end{cases} \quad (6.25)$$

6.3 Kovariante Formulierung der Elektrodynamik

Nun definieren wir die zentralen Größen der Elektrodynamik im Tensorkalkül.

6.3.1 Ladungsdichten und Potentiale

Wir können Ladungs- und Stromdichte zusammenfassen im **Viererstrom**, welcher die Kontinuitätsgleichung erfüllt

$$j^{\mu} \equiv \begin{pmatrix} \rho c \\ \vec{j} \end{pmatrix}^{\mu} \quad \partial_{\mu} j^{\mu} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (c\rho) + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0. \quad (6.26)$$

Wir können Skalar- und Vektorpotential in ein Viererpotential kombinieren

$$A^{\mu} \equiv \begin{pmatrix} \Phi \\ \vec{A} \end{pmatrix}^{\mu}. \quad (6.27)$$

Auch das Vierpotential ist bis auf eine Eichtransformation⁴ definiert:

$$A^\mu \mapsto A^\mu - \partial^\mu \chi = \begin{cases} \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \chi}{\partial t} & \mu = 0 \\ \vec{A} + \vec{\nabla} \chi & \mu = i. \end{cases} \quad (6.28)$$

6.3.2 \vec{E} - und \vec{B} -Felder

Die \vec{E} - und \vec{B} -Felder können nicht in Viervektoren dargestellt werden. Allerdings können sie im sog. Feldstärketensor

$$F^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix}^{\mu\nu} \quad (6.29)$$

und dessen dualem Feldstärketensor

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -B^1 & -B^2 & -B^3 \\ B^1 & 0 & E^3 & -E^2 \\ B^2 & -E^3 & 0 & E^1 \\ B^3 & E^2 & -E^1 & 0 \end{pmatrix}^{\mu\nu} \quad (6.30)$$

dargestellt werden.

Damit können die Maxwell-Gleichungen in kovarianter Form darstellt werden

$$\partial_\nu F^{\nu\mu} = \frac{4\pi}{c} j^\mu \quad \Rightarrow \begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho & \nu = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} & \nu = i \end{cases} \quad (6.31)$$

$$\partial_\nu \tilde{F}^{\nu\mu} = 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 & \nu = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 & \nu = i \end{cases} \quad (6.32)$$

Da der Feldstärketensor als Tensor 2. Stufe transformiert via

$$F'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\sigma F^{\rho\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & -E'^1 & -E'^2 & -E'^3 \\ E'^1 & 0 & -B'^3 & B'^2 \\ E'^2 & B'^3 & 0 & -B'^1 \\ E'^3 & -B'^2 & B'^1 & 0 \end{pmatrix}^{\mu\nu} \quad (6.33)$$

können wir für gegebene Lorentztransformation Λ die Felder \vec{E}' , \vec{B}' bestimmen. Man beobachtet, dass die Komponenten von \vec{E} , \vec{B} , die parallel zur Boost-Richtung sind nicht transformiert werden, während \vec{E} - und \vec{B} miteinander gemischt werden.

⁴Da Ableitungen vertauschen, bleiben die Feldstärketensoren F , \tilde{F} (und damit die physikalischen Felder) unverändert.