Technische Universität München
Fakultät für Physik

Ferienkurs

Experimentalphysik 1

WS 2016/17

Übung 4

Ronja Berg (ronja.berg@ph.tum.de)
Katharina Scheidt (katharina.scheidt@tum.de)

A. Übungen

A.1. Schwingung einer Schraubenfeder

Eine homogene Schraubenfeder der Länge $l = 0{,}6\,\mathrm{m}$, der Gesamtmasse $m_0 = 150\,\mathrm{g}$ und der Federkonstante $D = 12\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$ ist am oberen Ende aufgehängt und schwingt frei.

a) Welche Randbedingungen (Schwingungsknoten oder Schwingungsbauch) gelten an den Federenden bei den longitudinalen Eigenschwingungen der Feder?

b) Als Schwingungsgleichung ergibt sich für eine solche Feder

$$\frac{\partial^2 x}{\partial z^2} = \frac{m_0}{Dl^2}\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \quad .$$

Wie groß ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit c für Longitudinalwellen in der Feder?

c) Berechne für die Grundschwingung die Eigenfrequenz f_0 der Feder.

d) Welche Effektivmasse m_{eff} kann man der Feder zuschreiben? Dabei soll ein Körper der Masse m_{eff} am unteren Ende der als masselos gedachten Feder hängen und mit der Frequenz f_0 schwingen.

Lösung

a) Am oberen Federende (fest) muss sich ein Schwingungsknoten befinden, am unteren Federende (frei) ein Schwingungsbauch.

b) Ein Vergleich mit der allgemeinen Schwingungsgleichung führt auf

$$c = \sqrt{\frac{Dl^2}{m_0}} = 5{,}37\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

c) Da am oberen Ende ein Schwingungsknoten und am unteren ein Schwingungsbauch ist, muss die Länge der Feder genau $\frac{1}{4}$ der Wellenlänge sein. Somit erhält man für die Eigenfrequenz der Grundschwingung mit $\lambda_0 = 4l$

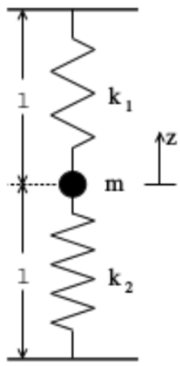
$$f_0 = \frac{c}{\lambda_0} = \frac{c}{4l} = 2{,}24\,\mathrm{Hz} \quad .$$

d) Setzt man die allgemeine Formel für die Eigenfrequenz einer harmonischen Schwingung an, so ergibt sich

$$f_0 = \frac{1}{2\pi}\omega = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{D}{m_{eff}}} \stackrel{!}{=} \frac{1}{4}\sqrt{\frac{D}{m_0}} \implies m_{eff} = \frac{4}{\pi^2}m_0 = 60{,}8\,\mathrm{g}$$

A.2. Kugel zwischen zwei Federn

Eine Kugel der Masse m ist vertikal mit zwei Federn zwischen zwei Wänden eingespannt. Falls sich die Kugel in der Ruhelage $z = 0$ befindet, besitzen beide Federn die Länge l. Die Länge der Feder 2 entspricht ihrer Ruhelänge. Feder 1 ist aufgrund der durch die Kugel wirkenden Gewichtskraft um l_0 vorgespannt.



a) Wie lautet die Bewegungsgleichung für die Kugel?

b) Löse die Bewegungsgleichung mit dem Ansatz $z(t) = z_1 \sin(\omega t) + z_2 \cos(\omega t) + z_3$. Benutze dafür folgende Anfangsbedingungen: $z(t=0) = z_0$ und $\dot{z}(t=0) = 0$.

Lösung

a) Die Bewegungsgleichung für das Federpendel lautet

$$\vec{F} = \vec{F}_{k1} + \vec{F}_{k2} + \vec{F}_g \quad .$$

Die Bewegung erfolgt nur in z-Richtung

$$m\ddot{z} = -k_1(z - l_0) - k_2 z - mg \quad .$$

Folglich ergibt sich

$$\ddot{z} = -\frac{k_1 + k_2}{m} z + \frac{k_1 l_0}{m} - g \quad .$$

b) Löse die Bewegungsgleichung mit dem Ansatz $z(t) = z_1 \sin(\omega t) + z_2 \cos(\omega t) + z_3$. Benutze dafür folgende Anfangsbedingungen: $z(t = 0) = z_0$ und $\dot{z}(t = 0) = 0$.

Einsetzen des in der Aufgabenstellung gegebenen Ansatzes $z(t) = z_1 \sin(\omega t) + z_2 \cos(\omega t) + z_3$ in die Bewegungsgleichung unter Verwendung folgender Abkürzungen $c_1 = \frac{k_1+k_2}{m}$ und $c_2 = \frac{k_1}{m} l_0 - g$.

$$\dot{z}(t) = z_1 \omega \cos(\omega t) - z_2 \omega \sin(\omega t)$$
$$\ddot{z}(t) = -z_1 \omega^2 \sin(\omega t) - z_2 \omega^2 \cos(\omega t)$$

Damit folgt

$$-z_1 \omega^2 \sin(\omega t) - z_2 \omega^2 \cos(\omega t) = -c_1 z_1 \sin(\omega t) - c_1 z_2 \cos(\omega t) - c_1 z_3 + c_2$$

Aus einem Koeffizientenvergleich folgt

$$\omega = \sqrt{c_1} \qquad \text{und} \qquad z_3 = \frac{c_2}{c_1} = \frac{k_1 l_0 - gm}{k_1 + k_2} \quad .$$

Einsetzen der Anfangsbedingungen $z(t = 0) = z_0$ und $\dot{z}(t = 0) = 0$ folgt

$$z_1 = 0 \qquad \text{und} \qquad z_2 = z_0 - z_3 \quad .$$

Damit gilt

$$z(t) = \left(z_0 - \frac{k_1 l_0 - mg}{k_1 + k_2} \right) \cos(\omega t) + \frac{k_1 l_0 - mg}{k_1 + k_2} \quad .$$

Für die Ruhelage $z = 0$ gilt

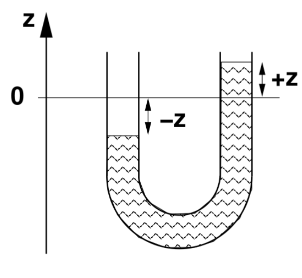
$$k_1 l_0 - mg = 0 \quad .$$

Folglich ist l_0 gleich $\frac{mg}{k_1}$. Damit reduziert sich die Bewegungsgleichung für die Masse auf

$$z(t) = z_0 \cos(\omega t) \quad .$$

A.3. Wasserschwingung im U-Rohr

Ein senkrecht stehendes, oben offenes U-Rohr mit konstantem Querschnitt $A = 2\,\mathrm{cm}^2$ wird mit $V = 100\,\mathrm{cm}^3$ Wasser (Dichte $\rho_{Wasser} = 1\,\mathrm{g/cm}^3$) gefüllt. Der Flüssigkeitsspiegel des ruhenden Wassers definiert den Nullpunkt der vertikalen z-Achse (siehe Skizze). Durch einen kurz dauernden Überdruck in einem der Schenkel werden die Flüssigkeitssäulen gegeneinander um eine Höhendifferenz $2z_0$ verschoben und schwingen anschließend ungedämpft.



a) Geben Sie die Kraft $F(z)$ an, die auf das Wasser wirkt, wenn die Auslenkung der Flüssigkeitssäulen $\pm z$ beträgt. Welche Masse wird von dieser Kraft beschleunigt? Zeigen Sie, dass das System durch die Schwingungsgleichung $V\ddot{z} + 2Agz = 0$ beschrieben wird.

b) Sind die Schwingungen harmonisch? Welche Schwingungsperiode haben sie? Wie ändert sich die Periode, wenn statt Wasser das gleiche Volumen Quecksilber (Dichte $\rho_{Hg} = 13{,}55\,\mathrm{g/cm^3}$) verwendet wird?

Lösung

a) Es wirkt die Gewichtskraft des gesamten Wasseranteils, der oberhalb des Wasserspiegels der anderen Seite liegt:

$$F(z) = -mg = -V_z \rho_W g = -2zA\rho_W g$$

(negatives Vorzeichen, da $F(z)$ in negative z-Richtung wirkt).
Die gesamte Wassermasse wird beschleunigt, also ist die Trägheitskraft $V\rho_W \ddot{z}$ und damit nach dem 2. Newtonschen Gesetz

$$V\ddot{z} = -2Agz \quad .$$

b) Dies ist eine harmonische Schwingung mit der Kreisfrequenz

$$\omega = \sqrt{\frac{2Ag}{V}} = 6{,}26\,\frac{1}{\mathrm{s}}$$

, somit ergibt sich für die Schwingungsperiode

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 1{,}0\,\mathrm{s} \quad .$$

Da die Frequenz von ρ unabhängig ist, ändert sich T nicht, wenn man Quecksilber statt Wasser verwendet.

A.4. Getriebener harmonischer Oszillator

Auf einen gedämpften Oszillator wirke die äußere Kraft $F(t) = F_0 \sin(\omega t)$. Die Bewegungsgleichung, die dieses System beschreibt lautet

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F}{m}\sin(\omega t) \quad .$$

Berechne die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichung im eingeschwungenen Zustand unter Verwendung der komplex ergänzten Differentialgleichung.

Lösung

Die komplex ergänzte Differentialgleichung lautet

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F}{m} e^{i\omega t} \quad . \tag{1}$$

Der Imaginärteil $\mathrm{Im}(x(t))$ der Lösung dieser Differentialgleichung entspricht der Lösung der gegebenen Bewegungsgleichung. Die allgemeine Lösung dieser Gleichung setzt sich zusammen aus der Lösung der homogenen Gleichung x_h und einer partikulären Lösung x_p. Da die homogene Lösung stets einen exponentiell abfallenden Faktor enthält, spielt sie im eingeschwungenen Zustand – also für große Zeiten t – keine Rolle mehr.

$$x(t) = \underbrace{x_h(t)}_{\propto e^{-\gamma t}} + x_p(t) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} x_p(t) \quad .$$

Im Folgenden müssen wir also nur die partikuläre Lösung bestimmen. Wir erwarten, dass durch den Antrieb eine Schwingung mit der Frequenz der äußeren Kraft induziert wird. Der Oszillator wird der äußeren Kraft folgen, es kann aber eine Phasenverschiebung auftreten. Wir machen daher für die partikuläre Lösung den Ansatz

$$x^*(t) = a e^{i(\omega t - \varphi)}$$

und setzen diesen in die komplex ergänzte Differentialgleichung (1) ein. Somit erhalten wir

$$\begin{aligned} a(-\omega^2 + 2i\gamma\omega + \omega_0^2) e^{i(\omega t - \varphi)} &= \frac{F_0}{m} e^{i\omega t} \\ \omega_0^2 - \omega^2 + 2i\gamma\omega &= \frac{F_0}{am} e^{i\varphi} \quad . \end{aligned}$$

Auf beiden Seiten der Gleichung haben wir nun komplexe Zahlen. Die beiden Zahlen sind gleich, wenn ihre Beträge und ihre Imaginärteile gleich sind, also

$$\begin{aligned} (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2 &= \frac{F_0^2}{a^2 m^2} \\ 2\gamma\omega &= \frac{F_0}{am} \sin(\varphi) \quad . \end{aligned}$$

Daraus erhalten wir für die Amplitude a und Phase φ unserer Lösung

$$\begin{aligned} a &= \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} \\ \sin(\varphi) &= \frac{2am\gamma\omega}{F_0} \quad . \end{aligned}$$

Mit diesen Parametern ist die erzwungene Schwingung als Lösung von der gegebenen Bewegungsgleichung gerade

$$x(t) = \mathrm{Im}(x^*(t)) = \mathrm{Im}\left(a e^{i(\omega t - \varphi)}\right) = a \sin(\omega t - \varphi) \quad .$$

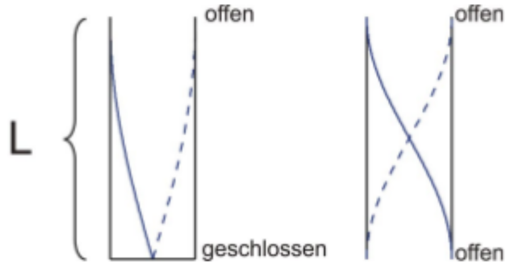
A.5. Stehende Schallwellen

Die von einer Orgelpfeife umschlossene Luftsäule wird so zu Schwingungen angeregt, dass sich eine stehende Welle ausbildet. Bei einer offenen Pfeife hat dabei die Luftsäule an beiden Enden der Pfeife einen Schwingungsbauch, bei einer einseitig geschlossenen Pfeife weißt die Luftsäule an einem Ende einen Schwingungsknoten am anderen Ende einen Schwingungsbauch auf. Mit der Orgelpfeife soll ein Ton der Frequenz $f = 35\,\mathrm{Hz}$ (Grundton) erzeugt werden. Die Schallgeschwindigkeit in Luft beträgt $c_S = 340\,\mathrm{m/s}$.

a) Wie lang muss die schwingende Luftsäule sein, wenn eine offene bzw. geschlossene Pfeife verwendet wird?

b) Berechne und skizziere das Obertonspektrum sowohl für die offene als auch für die geschlossene Pfeife.

Lösung



Grundschwingungen in ein- und beidseitig offenen Pfeifen.

a)

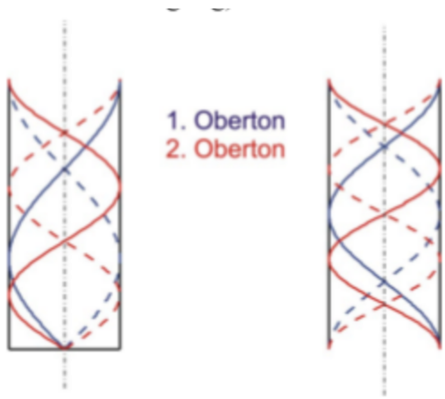
$$f = 35\,\mathrm{Hz} \qquad c_S = 340\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \qquad c = f \cdot \lambda$$

Einseitig offene Pfeife: Für die Grundschwingung folgt aus den Randbedingungen

$$L = \frac{\lambda}{4} \qquad c_S = 4Lf \implies L = \frac{c_S}{4f} = \frac{340\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}}{4\cdot 35\,\mathrm{s}} = 2{,}43\,\mathrm{m} \tag{2}$$

Beidseitig offen: $L = \frac{\lambda}{2} \implies L = \frac{c_S}{2f} = \frac{340 m\cdot s}{2\cdot 35\,\mathrm{s}} = 4{,}86\,\mathrm{m}$

b) Berechne und skizziere das Obertonspektrum sowohl für die offene als auch für die geschlossene Pfeife. Dabei ist die Grundschwingung $f_0 = 35\,\mathrm{H}$. Die beiden Pfeifentypen haben aufgrund ihres unterschiedlichen Obertonspektrums eine deutlich unterschiedliche Klangfarbe. Das unterschiedliche Obertonspektrum kommt daher, dass bei der beidseitig offenen Pfeife nur jeder zweite Oberton auch im Spektrum der einseitig offenen Pfeife vorkommt.



1. und 2. Oberton für die beiden Orgelpfeifen.

n-ter Oberton in einseitig offener Pfeife:	n-ter Oberton in beidseitig offener Pfeife:
$L = \frac{\lambda}{4} + n\frac{\lambda}{2}$	$L = \frac{\lambda}{2} + n\frac{\lambda}{2}$
$f_n = \frac{c_S}{\lambda} = \frac{c_S}{L}\left(\frac{1}{4} + \frac{n}{2}\right)$	$f_n = \frac{c_S}{\lambda} = \frac{c_S}{2 \cdot L}(1+n)$
$f_n = f_0 \cdot (1+2n)$	$f_n = f_0 \cdot (1+n)$

A.6. Zwei Wellen in Phase

Zwei ebene Wellen der Frequenz $f_1 = 300\,\mathrm{Hz}$ und $f_2 = 24\,\mathrm{Hz}$ laufen mit der Phasengeschwindigkeit $c = 340\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ in die gleiche Richtung. In einem Punkt A haben sie gleiche Phasen. Diesen Punkt A wählen wir als Ursprung des Koordinatensystems.

a) In welchem Abstand x_1 sind sie zum ersten Mal wieder in Phase?

b) Nach welcher Laufzeit t_2 sind sie zum ersten Mal wieder in Phase?

Lösung

a) Eine Ebene Welle hat allgemein folgende Form

$$y(x,t) = y_0 \cos(\omega t - kx - \varphi_0) \quad .$$

Dabei ist die Phase $\phi = \omega t - kx + \varphi_0$ und mit $\omega = 2\pi f$ und $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{c/f} = \frac{2\pi f}{c}$ folgt dann

$$\phi = 2\pi f(t - \frac{x}{c}) + \varphi_0$$

Am Ort $x_0 = 0$ haben beide Wellen gleiche Phase. Bestimmen wir diese Phase zu $\varphi_0 = 0$ für beide Wellen. Die Phasen der beiden Wellen an einem beliebigen Ort ϕ_1 und ϕ_2 ergeben sich dann zu

$$\begin{aligned}\phi_1(t,x) &= 2\pi f_1(t - \frac{x}{c})\\ \phi_2(t,x) &= 2\pi f_2(t - \frac{x}{c})\end{aligned}$$

Die Phasen beider Wellen sind auch an all jenen Orten und Zeitpunkten gleich, an denen für den Phasenunterschied $\Delta\varphi$ gilt

$$\Delta\varphi = n \cdot 2\pi \quad \text{mit} \quad n \in Z$$

Am Ort x_1 muss für alle Zeitpunkte gelten

$$\begin{aligned}\phi_2(t,x_1) &= \phi_1(t,x_1) + n \cdot 2\pi\\ 2\pi f_2\left(t - \frac{x_1}{c}\right) &= 2\pi f_1\left(t - \frac{x_1}{c}\right) + n \cdot 2\pi \qquad (3)\end{aligned}$$

Dies soll für den Zeitpunkt $t = 0$ berechnet werden

$$\begin{aligned}-f_2\frac{x_1}{c} &= -f_1\frac{x_1}{c} + n\\ \frac{x_1}{c}(f_1 - f_2) &= n\\ x_1 = \frac{cn}{f_1 - f_2} \stackrel{n=1}{=} \frac{340\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{60\,\frac{1}{\mathrm{s}}} &= 5{,}7\,\mathrm{m}\end{aligned}$$

b) Nach welcher Laufzeit t_2 sind sie zum ersten Mal wieder in Phase?
Die Wellen sind in Phase wenn Gleichung (3) erfüllt ist. Betrachten wir einen fixen Ort, der Einfachheit halber $x = 0$ dann folgt aus Gleichung (3)

$$\begin{aligned}2\pi f_2 t_2 &= 2\pi f_1 t_2 + n \cdot 2\pi\\ (f_2 - f_1)t_2 &= n\\ t_2 = \frac{n}{f_2 - f_1} \stackrel{n=1}{=} \frac{1}{-60\,\frac{1}{\mathrm{s}}} &= -17\,\mathrm{ms}\end{aligned}$$

A.7. Fortschreitende Seilwelle

Über ein Seil laufen Wellen in positiver x-Richtung mit der Phasengeschwindigkeit c. Die Periodendauer der Teilchenschwingung ist T, ihre Amplitude ist η_m. Zur Zeit $t_0 = 0$ befindet sich bei x_0 gerade ein Wellenberg. $c = 0{,}8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ $\quad T = 0{,}5\,\mathrm{s}$ $\quad \eta_m = 8{,}0\,\mathrm{cm}$ $\quad x_0 = \frac{3}{4}\lambda$ $\quad t_1 = \frac{T}{2}$ $\quad t_2 = \frac{3}{4}T$ $\quad x_1 = \frac{\lambda}{4}$

a) Berechne die Wellenlänge λ.

b) Wie lautet die Funktion $\eta(t, x)$ für diese Welle?

c) Zeichne die Momentbilder der Welle $\eta(x)$ für t_1 und t_2.

d) Wie sieht die Funktion $\eta_1(t)$ an der Stelle x_1 aus?

Lösung

a) Berechne die Wellenlänge λ.
Aus $c = \frac{\lambda}{T}$ folgt $\lambda = cT$ und somit

$$\lambda = 0{,}4\,\mathrm{m} \quad . \tag{4}$$

b) Wie lautet die Funktion $\eta(t, x)$ für diese Welle?
In der Wellenfunktion für die in positiver x-Richtung fortschreitende Welle $\eta(t, x) = \eta_m \cos(\omega t - kx + \alpha)$ ist α zu bestimmen.

Die Aussage, dass sich ein Wellenberg zur Zeit $t_0 = 0$ bei $x_0 = \frac{3}{4}\lambda$ befindet, lässt sich durch

$$\eta\left(0, \frac{3}{4}\lambda\right) = \eta_m \tag{5}$$

ausdrücken. Setzt man in die Wellenfunktion für t und x die Werte $t_0 = 0$ und $x_0 = \frac{3}{4}\lambda$ ein, so folgt

$$\begin{aligned}\eta\left(0, \frac{3}{4}\right) &= \eta_m \cos\left(-k\frac{3}{4}\lambda + \alpha\right)\\ &= \eta_m \cos\left(-\frac{2\pi}{\lambda}\frac{3}{4}\lambda + \alpha\right)\\ &= \eta_m \cos\left(\alpha - \frac{3}{2}\pi\right) = \eta_m\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}\cos\left(\alpha - \frac{3}{2}\pi\right) &= 1\\ \alpha - \frac{3}{2}\pi &= 0\\ \alpha &= \frac{3}{2}\pi\end{aligned}$$

Die damit bestimmte Wellenfunktion

$$\eta(t, x) = \eta_m \cos\left(\omega t - kx + \frac{3}{2}\pi\right) \tag{6}$$

lässt sich noch so umformen, dass explizit kein Nullphasenwinkel auftritt. Wegen

$$\cos\left(\varphi + \frac{3}{2}\pi\right) = \sin(\varphi) \tag{7}$$

kann man auch schreiben

$$\eta(t,x) = \eta_m \sin(\omega t - kx) \quad .$$

ω und k sind durch die Größen T und λ zu ersetzten:

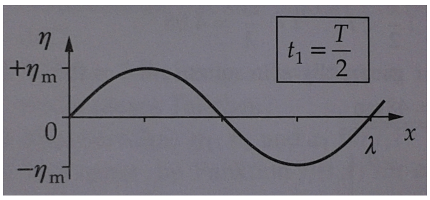
$$\eta(t,x) = \eta_m \sin\left(2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)\right) \tag{8}$$

c) Zeichne die Momentbilder der Welle $\eta(x)$ für t_1 und t_2.
Das zum Zeitpunkt t_1 beobachtete Momentbild der Welle $\eta_1(x)$ folgt aus der in b) aufgestellten Wellenfunktion durch Einsetzten von $t_1 = \frac{T}{2}$ für t:

$$\begin{aligned}\eta_1(x) &= \eta(t_1, x)\\ &= \eta_m \sin\left(2\pi\left(\frac{1}{2} - \frac{x}{\lambda}\right)\right)\\ &= \eta_m \sin\left(\pi - 2\pi\frac{x}{\lambda}\right)\end{aligned}$$

Wegen $\sin(\pi - \varphi) = \sin(\varphi)$ lässt sich dieses Ergebnis auch folgendermaßen schreiben

$$\eta_1(x) = \eta_m \sin(2\pi\frac{x}{\lambda}) \tag{9}$$

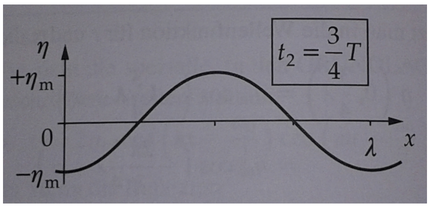


Entsprechende Überlegungen werden für $t_2 = \frac{3}{4}T$ durchgeführt

$$\eta_2(x) = \eta_m \sin\left(\frac{3}{2}\pi - 2\pi\frac{x}{\lambda}\right)$$

mit $\sin\left(\frac{3}{2}\pi - \varphi\right) = -\cos(\varphi)$ folgt

$$\eta_2(x) = -\eta_m \cos\left(2\pi\frac{x}{\lambda}\right) \tag{10}$$



d) Wie sieht die Funktion $\eta_1(t)$ an der Stelle x_1 aus?
Für den Ort $x_1 = \frac{\lambda}{4}$ wird die Wellenfunktion mit $\eta_1(t)$ bezeichnet. Sie lautet

$$\begin{aligned}\eta_1(t) &= \eta(t, x_1)\\ &= \eta_m \sin\left(2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{1}{4}\right)\right)\\ &= \eta_m \sin\left(\frac{2\pi t}{T} - \frac{\pi}{2}\right)\end{aligned}$$

Wegen $\sin\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos(\varphi)$ ist die folgende Darstellung möglich:

$$\eta_1(t) = -\eta_m \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \tag{11}$$