



Ferienkurs

Experimentalphysik 1

WS 2016/17

Vorlesung 4

Ronja Berg (ronja.berg@ph.tum.de)
Katharina Scheidt (katharina.scheidt@tum.de)

Inhaltsverzeichnis

6	Harmonische Oszillatoren	1
6.1	Freier ungedämpfter Oszillator	1
6.2	Freier gedämpfter Oszillator	2
6.3	Erzwungene Schwingungen	3
6.4	Energiebilanz	3
7	Mechanische Wellen	4
7.1	Wellengleichung	5
7.2	Beugung, Brechung und Reflexion	5
7.3	Wellen bei bewegten Quellen	7
8	Differentialgleichungen lösen	7
8.1	Charakteristische Gleichung der Exponentialfunktion	7
8.2	Trennung der Variablen	8
8.3	Variation der Konstanten	8
8.4	Ansatz von der rechten Seite	9

6 Harmonische Oszillatoren

6.1 Freier ungedämpfter Oszillator

Für den harmonischen Oszillator gilt das lineare Kraftgesetz

$$\mathbf{F} = -Dx\hat{\mathbf{e}}_x \quad (1)$$

wobei \mathbf{F} die rücktreibende Kraft ist, D die Federkonstante und x die Auslenkung von der Ruhelage $x = 0$. Als Bewegungsgleichung erhält man hiermit

$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = -Dx(t) \quad . \quad (2)$$

Mit dem Ausdruck $\omega_0^2 = D/m$, wobei ω_0 die Kreisfrequenz ist, erhält man nun die allgemeine Bewegungsgleichung einer freien ungedämpften Schwingung

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0 \quad . \quad (3)$$

Dies ist eine Differentialgleichung 2. Ordnung, die stets zwei linear unabhängige Lösungen besitzt. Sie kann mit Hilfe des Ansatzes

$$x(t) = ce^{\lambda t} \quad (4)$$

gelöst werden. Durch Ableiten und Einsetzen in Gleichung (3) erhalten wir das sogenannte charakteristische Polynom

$$\lambda^2 + \omega_0^2 = 0 \quad . \quad (5)$$

Die Lösungen für die Konstanten λ berechnen sich nun zu

$$\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0 \quad . \quad (6)$$

Das heißt $x_1(t) = c_1 \cdot e^{i\omega_0 t}$ und $x_2(t) = c_2 \cdot e^{-i\omega_0 t}$ lösen die Differentialgleichung. Die Linearkombination aus $x_1(t)$ und $x_2(t)$ muss eine reelle Funktion sein und somit muss $c_1 = c_2^* = c$ für die komplexen Konstanten gelten. Die Lösungsfunktion hat somit die Gestalt

$$x(t) = ce^{i\omega_0 t} + c^* e^{-i\omega_0 t} \quad . \quad (7)$$

Über eine Polardarstellung der komplexen Amplituden und der Verwendung der Eulerschen Formel $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$ lässt sich Gleichung (7) wie folgt darstellen

$$x(t) = C_1 \cdot \cos(\omega_0 t) + C_2 \cdot \sin(\omega_0 t) = A \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi) \quad . \quad (8)$$

Die Koeffizienten A , C_1 und C_2 können über die Anfangsbedingungen bestimmt werden. Schwingungen, die zur Zeit $t = 0$ eine verschwindende Geschwindigkeit haben, sind reine Cosinus-Schwingungen. Ist der Oszillator zur Zeit $t = 0$ in der Gleichgewichtslage und besitzt eine Anfangsgeschwindigkeit, so ist es eine reine Sinus-Schwingung.

Die Schwingungsdauer T , die Schwingungsfrequenz f und die Kreisfrequenz ω berechnen sich dabei über

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} \quad f = \frac{1}{T} \quad \omega = 2\pi f \quad . \quad (9)$$

6.2 Freier gedämpfter Oszillator

Herrschen zusätzlich Reibungskräfte während der Schwingung, wird die Oszillation gedämpft und es muss ein zusätzlicher Term in der Bewegungsgleichung beachtet werden. Normalerweise ist diese Reibungskraft proportional zur Geschwindigkeit $\dot{x}(t)$ und wirkt der Bewegung entgegen

$$\mathbf{F}_R = -b\dot{x}\hat{\mathbf{e}}_x \quad . \quad (10)$$

Für die allgemeine Bewegungsgleichung kann der Ausdruck $2\gamma = b/m$ verwendet werden, sodass man analog zu Gleichung (3)

$$\ddot{x}(t) + 2\gamma\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0 \quad (11)$$

mit Dämpfungskonstante γ erhält. Wie auch bei der ungedämpften Schwingung kann diese Differentialgleichung mit dem Ansatz $x(t) = ce^{\lambda t}$ gelöst werden. Im charakteristischen Polynom ist nun ein zusätzlicher Term vorhanden

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0 \quad (12)$$

und die Lösungen dieser Gleichung für die Konstanten λ sind

$$\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \quad . \quad (13)$$

Die allgemeine Lösung der Schwingungsgleichung einer gedämpften Schwingung (11) lautet somit

$$x(t) = e^{-\gamma t} \left[c_1 e^{\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t} + c_2 e^{-\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t} \right] \quad . \quad (14)$$

Es gilt nun drei Fälle zu unterscheiden, abhängig davon ob $\gamma^2 - \omega_0^2$ positiv, negativ oder genau null ist.

Schwache Dämpfung: Ist $\gamma < \omega_0$ so ist die Wurzel imaginär und der Exponent enthält einen komplexen Wert. Mit $\omega^2 = \omega_0^2 - \gamma^2$ lässt sich die allgemeine Lösung umschreiben zu

$$x(t) = e^{-\gamma t} [c \sin(\omega \cdot t) + c * \cos(\omega \cdot t)] = Ae^{-\gamma t} \sin(\omega \cdot t + \varphi) \quad . \quad (15)$$

Hierbei ist die Frequenz der Schwingung ω gering im Vergleich zur Frequenz ω_0 der ungedämpften Schwingung. Zusätzlich nimmt die Amplitude der Schwingung exponentiell mit der Zeit ab.

Starke Dämpfung: Ist $\gamma > \omega_0$ so ist die Wurzel positiv und der Exponent reell. Mit $\alpha = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$ erhalten wir eine allgemeine Lösung ohne einen oszillieren Teil

$$x(t) = e^{-\gamma t} [C_1 e^{\alpha t} + C_2 e^{-\alpha t}] \quad . \quad (16)$$

Nach einmaliger Auslenkung "kriecht" die Amplitude für $t \rightarrow \infty$ gegen null.

Aperiodischer Grenzfall: Im Grenzfall ist $\gamma = \omega_0$ und die Lösungen $\lambda_{1,2}$ sind nun entartet $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = -\gamma$. Da eine Differentialgleichung 2. Ordnung aber immer zwei Lösungen haben muss, benutzen wir folgenden Ansatz

$$x(t) = C(t)e^{\gamma t} \quad (17)$$

mit einem zeitabhängigen Vorfaktor $C(t)$. Setzen wir dies in die Bewegungsgleichung ein, so erhalten wir die allgemeine Lösung

$$x(t) = (C_1 \cdot t + C_2) e^{-\gamma t} \quad (18)$$

Es kommt zu einer ähnlichen Bewegung wie im Kriechfall, nur wird der Nullpunkt im aperiodischen Grenzfall schneller angestrebt.

6.3 Erzwungene Schwingungen

Bei einer erzwungenen Schwingung kommt es zu einer zusätzlichen äußeren antreibenden Kraft $F_{ext}(t)$, normalerweise in Form einer periodisch oszillierenden Kraft. Diese muss in der Bewegungsgleichung beachtet werden

$$m\ddot{x}(t) = -Dx(t) - b\dot{x}(t) + F_{ext} \cos(\omega t) \quad (19)$$

Für diese inhomogene Differentialgleichung erhalten wir eine Lösung, die sich aus Lösung der homogenen DGL und einer speziellen, der sogenannten partikulären Lösung zusammensetzt.

$$x(t) = C_1 e^{-\gamma t} \cos(\omega_1 t + \varphi) + C_2 \cos(\omega t + \varphi) \quad (20)$$

Der erste Term ist die Lösung eines freien, gedämpften Oszillators und der zweite kommt durch den Beitrag der Anregungsfrequenz zustande. Hierbei ist $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ die Frequenz der freien gedämpften Schwingung.

Nach einiger Zeit tritt der stationäre Zustand ein bei dem die Amplitude $C_1 e^{-\gamma t}$ gegen null geht. Dann bestimmt ausschließlich der zweite Term die Bewegung. Setzt man diesen in die Bewegungsgleichung ein lässt sich die Phasenverschiebung $\varphi(\omega)$ der erzwungenen Schwingung berechnen. Diese ergibt sich zu

$$\tan(\varphi(\omega)) = -\frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (21)$$

wobei man durch das negative Vorzeichen erkennt, dass sie stets der Erregerfrequenz nachhinkt.

6.4 Energiebilanz

Die kinetische Energie des harmonischen Oszillators ist

$$E_{kin} = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 = \frac{1}{2} m \omega_0^2 A^2 \sin^2(\omega_0 t) \quad (22)$$

ihr Mittelwert über eine Schwingungsperiode T ist

$$\overline{E_{kin}} = \frac{1}{T} \int_0^T dt E_{kin} = \frac{1}{T} \frac{1}{2} m \omega_0^2 A^2 \underbrace{\int_0^T dt \sin^2(\omega_0 t)}_{=T/2} = \frac{1}{4} m \omega_0^2 A^2 \quad (23)$$

Die potentielle Energie des harmonischen Oszillators ist mit $D = m\omega_0^2$

$$E_{pot} = \int_0^x dx' F = \frac{1}{2} D x^2 = \frac{1}{2} D A^2 \cos^2(\omega_0 t) = \frac{1}{2} m \omega_0^2 A^2 \cos^2(\omega_0 t) \quad . \quad (24)$$

Ihr Mittelwert über eine Schwingungsperiode T ist

$$\overline{E_{pot}} = \frac{1}{T} \int_0^T dt E_{pot} = \frac{1}{T} \frac{1}{2} m \omega_0^2 A^2 \underbrace{\int_0^T dt \cos^2(\omega_0 t)}_{=T/2} = \frac{1}{4} m \omega_0^2 A^2 \quad . \quad (25)$$

Die Summe von kinetischer und potentieller Energie beim harmonischen Oszillator

$$E_{kin}(t) + E_{pot}(t) = \frac{1}{2} m \omega_0^2 A^2 [\cos^2(\omega_0 t) + \sin^2(\omega_0 t)] = \frac{1}{2} m \omega_0^2 A^2 = E = const. \quad (26)$$

ist zu **jedem** Zeitpunkt gleich der konstanten Gesamtenergie des Systems (Energiesatz). Die Mittelwerte $\overline{E_{kin}}$ und $\overline{E_{pot}}$ sind bei der harmonischen Schwingung gleich. Sie sind proportional zum Quadrat der Schwingungsamplitude A und der Frequenz ω_0 .

7 Mechanische Wellen

Breiten sich Schwingungen durch die Kopplung von Oszillatoren aus, so spricht man von einer Welle. Eine Welle transportiert Energie und Impuls ohne gleichzeitigen Materietransport. Analog zur Beschreibung eines harmonischen Oszillators lässt sich eine eindimensionale ebene Welle definieren. Breitet sich diese mit der Zeit t in z -Richtung aus, kann sie durch folgende Formel beschrieben werden

$$\xi(z, t) = A \sin(\omega t - kz) \quad \text{oder} \quad \xi(z, t) = C e^{i(\omega t - kz)} \quad . \quad (27)$$

Hierbei ist k die Wellenzahl, die von der Wellenlänge abhängt $k = \frac{2\pi}{\lambda}$.

Die Phasengeschwindigkeit v_{ph}

$$v_{ph} = \frac{\omega}{k} = f \lambda \quad (28)$$

ist die Geschwindigkeit mit der sich ein Punkt konstanter Amplitude auf der Welle (z.B. ein Wellenberg) bewegt. Zur Beschreibung des Energietransports betrachtet man die kinetische Energie eines Massenelements Δm , das mit $\xi(t, z) = A \cos(\omega t - kz)$ oszilliert. Sie ist gegeben als

$$E_{kin} = \frac{1}{2} \Delta m \dot{\xi}^2 = \frac{1}{2} \rho \Delta V A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - kz) \quad . \quad (29)$$

Die mittlere kinetische Energiedichte, $\overline{E_{kin}}$, pro Schwingungsperiode und Volumenelement ΔV berechnet sich dadurch zu

$$\frac{\overline{E_{kin}}}{\Delta V} = \frac{1}{4} \rho A^2 \omega^2 = \frac{\overline{E_{pot}}}{\Delta V} \quad . \quad (30)$$

Mit $W = E_{kin} + E_{pot}$ ergibt sich die Gesamtenergiedichte ρ_E zu

$$\rho_E = \frac{W}{\Delta V} = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2 \quad . \quad (31)$$

Die Intensität der Welle als Produkt aus Phasengeschwindigkeit und Gesamtenergiedichte

$$I = v_{ph} \rho_E = \frac{1}{2} v_{ph} \rho A^2 \omega^2 \quad (32)$$

ist proportional zum Quadrat ihrer Amplitude A und ihrer Frequenz ω .

7.1 Wellengleichung

Die zeitliche und räumliche Entwicklung einer Welle wird durch die Wellengleichung beschrieben. Durch die Kopplung der Oszillatoren hat die Auslenkung eines Oszillators eine Auswirkung auf die Nachbaroszillatoren. Unter der Annahme, dass sich die Form der Auslenkung $\xi(z)$ bei der Ausbreitung in z -Richtung nicht ändern können die Wellenfunktionen $\xi(z, t)$ als Funktion des Argumentes $z - vt$ angesehen werden. Bei zweimaligem partiellen Differenzieren nach der Zeit t und dem Ort z lässt sich folgender Zusammenhang erkennen

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{1}{v} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad . \quad (33)$$

für eine ebene Welle die sich mit Phasengeschwindigkeit $v = v_{ph}$ ausbreitet. Dies ist die allgemeine Wellengleichung, die nicht nur für mechanische, sondern auch für elektromagnetische Wellen gilt.

Betrachtet man nicht nur monochromatische Wellen sondern Wellenpakete oder einen Wellenimpuls, so stellt man die Welle als Superposition von monochromatischen Frequenzanteilen mit Hilfe der Fourierzerlegung dar.

$$\xi(t, z) = \int_0^\infty A(\omega) e^{i(\omega t - kz)} d\omega \quad \text{und} \quad A(\omega) = \int_{-\infty}^\infty \xi(t, z) e^{i(\omega t - kz)} dt \quad (34)$$

Solche superpositionierten Wellen bestehen aus einer Einhüllenden und einem schnellen Frequenzanteil. Das Maximum der Einhüllenden bewegt sich mit der sogenannten Gruppengeschwindigkeit v_g

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{dv_{ph} k}{dk} = v_{ph} + k \frac{dv_{ph}}{dk} \quad (35)$$

Falls es keine Dispersion gibt, also v_{ph} nicht von der Wellenlänge λ bzw. der Wellenzahl k abhängt, so entspricht die Gruppengeschwindigkeit der Phasengeschwindigkeit.

7.2 Beugung, Brechung und Reflexion

Die Überlagerungen von Wellen werden allgemein als Interferenz bezeichnet. Die Konstruktion eines allgemeinen Interferenzmusters erfolgt mit dem Huygenschen Prinzip.

Huygensches Prinzip: Jeder Punkt einer allgemeinen Wellenfront ist Ausgangspunkt einer Kugelwelle. Die neue Wellenfront ist die Tangentialfläche an die Kugelwellen.

Bei Kugelwellen nimmt die Amplitude rasch mit dem Abstand ab:

$$\xi(r, t) = f(r) \sin(\omega t - kr) \quad \text{mit} \quad f(r) \propto \frac{1}{r} \quad (36)$$

Unter Beugung versteht man die Richtungsänderung einer Welle aufgrund eines Hindernisses. Bei der Beugung an einem Doppelspalt entsteht das Interferenzmuster durch den Gangunterschied ΔL

$$\Delta L = d \sin(\alpha) \quad (37)$$

Hierbei ist α der Winkel zur Richtung normal zum Doppelspalt. Ist ΔL ein **ganzzahliges** Vielfaches von λ , so interferieren die Wellen **konstruktiv**. Bei **halbzahligem** Vielfachen kommt es zur **destruktiven** Interferenz.

Betrachtet man N Punktquellen im Abstand δ so ist die Phasendifferenz zweier benachbarter Pfade $\Delta s = \delta \sin(\alpha)$ gegeben als

$$\Delta \varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta s = k \delta \sin(\alpha) \quad . \quad (38)$$

Die Intensität der Welle ist $I(\alpha) \propto |\text{Amplitude}|^2$ und hängt wie folgt von der Phasendifferenz ab

$$I(\alpha) \propto a^2 \frac{\sin^2(\frac{N}{2} \Delta \varphi)}{\sin^2(\frac{1}{2} \Delta \varphi)} \quad . \quad (39)$$

Durchquert eine Welle eine Grenze zwischen zwei Medien, in denen sie eine andere Ausbreitungsgeschwindigkeit besitzt, so wird ein Teil der Welle reflektiert. Bei der **Reflexion** einer ebenen Welle muss der Reflexionswinkel β an der Grenzfläche immer dem Einfallswinkel α entsprechen $\alpha = \beta$.

Der andere Teil setzt seine Ausbreitung im anderen Medium unter der Änderung seiner Ausbreitungsrichtung fort. Diesen Vorgang bezeichnet man als **Brechung**. Hierbei gilt das Snelliussches Brechungsgesetz

$$\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} = \frac{v_1}{v_2} \quad (40)$$

wobei v_1 die Geschwindigkeit der Welle im ersten Medium und v_2 die Geschwindigkeit im zweiten Medium ist. α und β beschreiben in diesem Fall die Winkel zwischen der Ausbreitungsrichtung und der Normalen zur Grenzfläche in den beiden Medien.

Bei der Überlagerung von laufenden Wellen kann es zu räumlich stationären Schwingungsmustern kommen, bei denen bestimmte Punkte im Raum in Ruhe sind. Diese Punkte werden Schwingungsknoten genannt. Ihre Lage ist von der Frequenz und den Randbedingungen abhängig. Die Amplitude solcher Wellen hängt periodisch vom Ort ab. Die Wellengleichung einer so genannten **stehenden Welle** ist

$$\xi_0 = \xi_1 + \xi_2 = A \cos(kz - \frac{\varphi}{2}) \cos(\omega t + \frac{\varphi}{2}) \quad . \quad (41)$$

Stehende Wellen treten auf einem begrenzten Wellenträger der Länge l nur auf, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. Ein festes und ein freies Ende: $\lambda_n = 4l/(2n + 1)$, $n \in \mathbb{N}_0$
2. Zwei feste oder zwei freie Enden: $\lambda_n = 2l/(n + 1)$, $n \in \mathbb{N}_0$

Das heißt, nur bei bestimmten (Eigen-)Frequenzen, können sich stehende Wellen ausbilden.

7.3 Wellen bei bewegten Quellen

Bewegen sich Quelle, Beobachter oder das Medium in dem sich die Welle ausbreitet so kommt es zu einer Frequenzverschiebung, dem so genannten **Doppler-Effekt**. Bewegt sich die Quelle mit v_q in Ausbreitungsrichtung der Welle, so verringert sich der Abstand Δx zwischen den Wellenbergen im Vergleich zum stationären Fall. Die resultierende Frequenzverschiebung vor und hinter der Quelle ergibt sich dann zu

$$f_{vor} = \frac{f_0}{1 - \frac{v_q}{v_l}} > f_0 \quad \text{und} \quad f_{nach} = \frac{f_0}{1 + \frac{v_q}{v_l}} < f_0 \quad (42)$$

wobei v_l die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle ist. Ist der Beobachter in Bewegung mit Geschwindigkeit v_b und die Quelle ist fest, so erhält man

$$f_{zu} = f_0 \left(1 + \frac{v_b}{v_l} \right) > f_0 \quad \text{und} \quad f_{weg} = f_0 \left(1 - \frac{v_b}{v_l} \right) < f_0 \quad . \quad (43)$$

8 Differentialgleichungen lösen

8.1 Charakteristische Gleichung der Exponentialfunktion

Leitet man eine Exponentialfunktion

$$x(t) = Ae^{Bt} \quad (44)$$

nach der Zeit ab, so erhält man

$$\frac{d}{dt}x(t) = A \cdot Be^{Bt} = B \cdot x(t) \quad (45)$$

also eine Funktion, die die gleiche Form wie die ursprüngliche Funktion $x(t)$ hat, und nur um einen bestimmten Faktor B gestreckt ist. Dieses Wissen können wir beim Lösen von Differentialgleichungen benutzen. Eine einfache homogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung hat zum Beispiel die Form

$$\frac{d}{dt}x(t) = \dot{x}(t) = cx(t) \quad . \quad (46)$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung ist eine Exponentialfunktion

$$x(t) = Ae^{ct} \quad . \quad (47)$$

Die Werte für A und c lassen sich aus den Anfangsbedingungen bestimmen.

8.2 Trennung der Variablen

Für separierbare Differentialgleichungen erster Ordnung gibt es eine einfache Lösung durch den Separationsansatz. Separierbare Gleichungen sind Gleichungen, die von mehreren Variablen abhängen und bei denen die Variablen getrennt werden können. Ein Beispiel ist

$$\dot{x}(t) = f(t) \cdot g(x) \quad . \quad (48)$$

Diese Gleichung kann man nun so umformulieren, dass eine Seite nur noch von x abhängt und die andere nur von t

$$\frac{dx}{dt} = f(t) \cdot g(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{g(x)} dx = f(t) dt \quad . \quad (49)$$

Um nun auf die Lösung zu kommen integriert man beide Seiten. Hier gibt es jedoch zwei mögliche Lösungswege. Entweder löst man ein bestimmtes Integral und nutzt bereits die Anfangsbedingungen um die Integralgrenzen zu bestimmen oder man löst die unbestimmten Integrale. Im zweiten Fall werden die Anfangsbedingungen benutzt um die Integrationskonstante anzupassen. Mit der Anfangsbedingung $x(t_0) = x_0$ erhält man als bestimmte Integrale

$$\int_{x_0}^{x(t)} \frac{dx}{g(x)} = \int_{t_0}^t f(t) dt \quad (50)$$

und im Falle der Lösung durch unbestimmte Integrale

$$\int \frac{dx}{g(x)} = \int f(t) dt + C \quad . \quad (51)$$

Die Integrationskonstante C muss nun mit Hilfe der Anfangsbedingung angepasst werden.

8.3 Variation der Konstanten

Ist eine Differentialgleichung gegeben, die eine Inhomogenität hat, in diesem Falle $s(t)$,

$$\dot{x}(t) + f(t) x(t) = s(t) \quad (52)$$

so setzt sich die Lösung immer aus der Lösung der homogenen Differentialgleichung mit $s(t) = 0$ und einer partikulären Lösung zusammen

$$x(t) = x_{hom}(t) + x_{part}(t) \quad . \quad (53)$$

Eine Möglichkeit eine solche Gleichung zu lösen ist die Variation der Konstanten. Hierbei wird zunächst die homogene Gleichung gelöst und dann eine zeitliche Abhängigkeit der Integrationskonstanten C für die partikuläre Lösung angesetzt. Als homogene Lösung erhält man

$$x_{hom}(t) = C e^{-\int f(t) dt} \quad (54)$$

und setzt dann für die partikuläre Lösung

$$x_{part}(t) = C(t) e^{-\int f(t) dt} \quad (55)$$

an. Durch Einsetzen in die gegebene Differentialgleichung kann die Integrationskonstante ermittelt werden und schließlich erhält man für die Gesamtlösung

$$x(t) = C e^{-\int f(t) dt} + e^{-\int f(t) dt} \int dt s(t) e^{-\int f(t) dt} \quad . \quad (56)$$

8.4 Ansatz von der rechten Seite

Zur Lösung einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} - \omega_0^2 x = c \quad (57)$$

kann der Ansatz von der rechten Seite gewählt werden. Dabei geht man davon aus, dass die Lösung der Differentialgleichung eine ähnliche Form hat wie die Störfunktion selbst. Für die Bestimmung der homogenen Lösung kann der Ansatz

$$x_{hom}(t) = e^{\lambda t} \quad (58)$$

benutzt werden. Dabei kommt man auf ein charakteristisches Polynom, durch das wir zwei verschiedene Werte für λ erhalten. Als homogene Lösung bekommt man dann

$$x_{hom}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} \quad (59)$$

Für die partikuläre Lösung wählen wir nun eine Funktion, welche die Gestalt der Störfunktion hat, in diesem Fall eine Konstante K . Nach Einsetzen in die Differentialgleichung können wir diese Konstante genau bestimmen

$$x_{part}(t) = K \quad \xrightarrow{\text{In DGL einsetzen}} \quad K = \frac{c}{\omega_0^2} \quad (60)$$

Haben wir nun eine komplizierte Störung

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} - \omega_0^2 x = 5e^{-3t} \quad (61)$$

dann können wir die Differentialgleichung nach dem gleichen Prinzip lösen. Wir machen nun für die partikuläre Lösung den Ansatz

$$x_{part}(t) = K \cdot e^{-3t} \quad (62)$$

und erhalten für die Konstante K und die partikuläre Lösung

$$K = \frac{5}{9 - 6\gamma - \omega_0^2} \quad \text{und} \quad x_{part}(t) = \frac{5}{9 - 6\gamma - \omega_0^2} e^{-3t} \quad (63)$$

Die Gesamtlösung ergibt sich dann zusammen mit der homogenen Lösung aus Gleichung (59) nach Bestimmung der Konstanten c_1 und c_2 durch die Anfangsbedingungen.