Technische Universität München
Fakultät für Physik

Ferienkurs

Experimentalphysik 1

WS 2016/17

Vorlesung 3

Ronja Berg (ronja.berg@ph.tum.de)
Katharina Scheidt (katharina.scheidt@tum.de)

Inhaltsverzeichnis

5 Reale feste und flüssige Körper

Bisher haben wir starre Körper betrachtet, die ihre Gestalt unter dem Einfluss einer Kraft nicht ändern. Dies entspricht nicht der Realität.

5.1 Deformation fester Körper

Wir betrachten im folgenden Deformationen von **isotropen** Festkörpern. Zu Beginn des Kapitels sollen aber noch ein paar Begriffe kurz erläutert werden:

Homogenität: die physikalischen Eigenschaften eines Körpers (Dichte, Elastizität, Härte, etc.) sind im Festkörper überall gleich.

Isotropie: die physikalischen Eigenschaften des Körpers sind zusätzlich unabhängig von der Richtung im Festkörper.

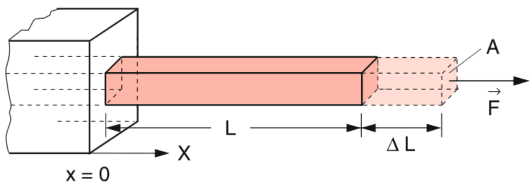
Wirken auf den Körper äußere Kräfte, kann er seine Gestalt ändern. Man spricht von einem **elastischen Körper**, wenn die Deformation nach der Krafteinwirkung wieder vollständig verschwindet. Bei einem **plastischen Körper** bleibt eine Formänderung nach der Krafteinwirkung zurück.

5.1.1 Das Hooke'sche Gesetz

Wirkt auf einen elastischen Körper der Länge L mit dem Querschnitt q, der bei $x = 0$ festgehalten wird, eine Zugkraft $\vec{F}$ in x-Richtung, so verlängert sich die Länge L um ΔL. Experimentell zeigt sich, dass bei genügend kleinem ΔL für den Betrag $F = |\vec{F}|$ gilt:

$$F = Eq\frac{\Delta L}{L}. \tag{1}$$

Die Proportionalitätskonstante E ist der **Elastizitätsmodul** mit der Einheit $[E] = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}$. Der Elastizitätsmodul ist materialabhängig. Bei Materialien mit hohem Elastizitätsmodul muss man eine große Kraft aufwenden um eine vorgegebene relative Längenänderung zu erreichen. Körper mit großem E zeigen also bei vorgegebener Kraft eine kleine Längenänderung.



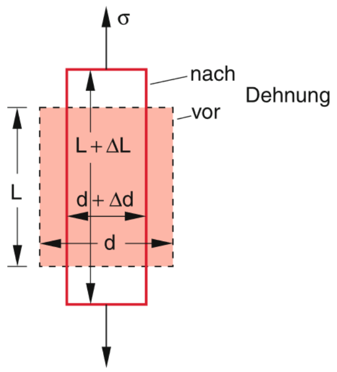
Mit der Zugspannung (Zugkraft pro Fläche) $\sigma = \frac{F}{A}$ und der relativen Dehnung $\varepsilon = \frac{\Delta L}{L}$ kann man das Hooke'sche Gesetz in die übersichtlichere Form

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \tag{2}$$

umschreiben. Der lineare Zusammenhang zwischen Zugspannung und Dehnung gilt allerdings nur für kleine relative Dehnungen! Bei größeren Auslenkungen aus der Ruhelage treten Verschiebungen von Netzebenen auf und der Körper beginnt zu fließen.

5.1.2 Querkontraktion

Bisher haben wir nur eindimensionale Deformationen betrachtet. Wird ein dreidimensionaler Körper unter dem Einfluss einer Zugspannung in zum Beispiel z-Richtung gedehnt, ändern sich auch die Querdimensionen (x-und y-Richtung). Durch die Zugspannung wird das Volumen vergrößert, die Volumenänderung ΔV ist also positiv. Für einen Stab mit Länge L und quadratischem Querschnitt der Fläche d^2 ergibt sich die Volumenänderung ΔV:



$$\Delta V = V_{\text{nach}} - V_{\text{vor}} = (d + \Delta d)^2 \cdot (L + \Delta L) - d^2 L \approx d^2 \Delta L + 2L \cdot d\Delta d. \tag{3}$$

Damit ergibt sich für die relative Volumenänderung $\frac{\Delta V}{V}$:

$$\frac{\Delta V}{V} \approx \frac{\Delta L}{L} + 2\frac{\Delta d}{d}. \tag{4}$$

Das Verhältnis von Querkontraktion zu Dehnung

$$\mu \overset{\text{Def}}{=} -\frac{\Delta d}{d} \Big/ \frac{\Delta L}{L} \tag{5}$$

wurde als **Querkontraktionszahl** oder auch **Poissonzahl** μ definiert. Damit können wir die relative Volumenänderung umschreiben zu:

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta L}{L}\left(1 + \frac{2\Delta d/d}{\Delta L/L}\right) = \varepsilon(1 - 2\mu) = \frac{\sigma}{E}(1 - 2\mu). \tag{6}$$

Wirkt statt der Zugspannung σ der Druck $p = \frac{F}{A} = -\sigma$ auf die gegenüberliegenden Seiten mit der Fläche d^2, werden ΔL und ΔV negativ. Δd hingegen wird positiv, weil sich die Querdimensionen des Quaders durch das Zusammendrücken vergrößern. Die relative Volumenänderung ergibt sich mit $\sigma = -p$.

Wirkt der Druck $p = -\sigma$ **von allen Seiten**, ergibt sich die Volumenänderung

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta L}{L} + \frac{2\Delta d}{d} = -\frac{3p}{E}(1 - 2\mu). \tag{7}$$

Führt man den **Kompressionsmodul** K ein durch die Definition

$$p = -K \cdot \frac{\Delta V}{V} \tag{8}$$

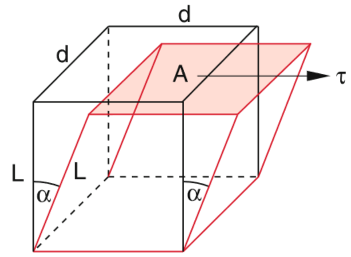
und die **Kompressibilität** $\kappa = 1/K$, so erhält man die Relation

$$\kappa = \frac{1}{K} = \frac{3}{E}(1-2\mu). \tag{9}$$

5.1.3 Scherung und Torsionsmodul

Scherungskräfte greifen tangential an einer Fläch A an. Die Schub-, bzw. Scherspannung $\vec{\tau}$ ist die pro Flächeneinheit wirkende tangential Kraft $\vec{F}$:

$$\vec{\tau} = \frac{\vec{F}}{A}. \tag{10}$$



Durch die Scherspannung τ werden die Kanten des Quaders um den Winkel α verkippt. Für kleine Winkel α gilt der Zusammenhang

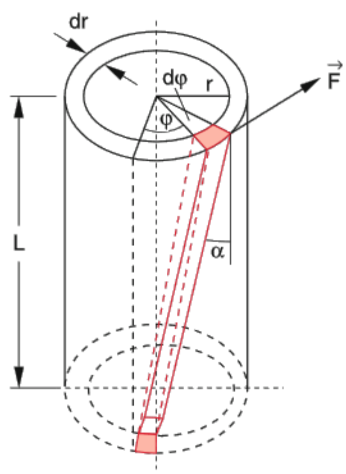
$$\tau = G \cdot \alpha. \tag{11}$$

Die Konstante G heißt **Schubmodul**, **Schermodul** oder auch **Torsionsmodul**. Die elastischen Konstanten E, μ, K und G sind miteinander verknüpft:

$$\frac{E}{2G} = 1+\mu \tag{12}$$
$$\frac{E}{3K} = 1-2\mu \tag{13}$$
$$\frac{2G}{3K} = \frac{1-2\mu}{1+\mu} \tag{14}$$

Bei der Scherung einer Säule (Länge L, Radius R) um den Winkel α greift eine Kraft $\vec{F}$ tangential an der Deckfläche an. Die notwendige Scherspannung ist:

$$\tau = G\frac{r\cdot\varphi}{L}. \tag{15}$$



Die Kraft $\mathrm{d}F$, die an einem Kreiselement angreift, ist:

$$\mathrm{d}F = \tau\cdot 2\pi r\mathrm{d}r = \frac{2\pi r^2\mathrm{d}r\cdot\varphi}{L}G. \tag{16}$$

Das Gesamte, zur Verdrillung notwendige Drehmoment ist:

$$D = \frac{\pi}{2}G\frac{R^4}{L}. \tag{17}$$

5.2 Hydrostatik

In der Hydrostatik behandelt man ruhende Flüssigkeiten. Bei ruhenden Flüssigkeiten spielen die Reibungskräfte noch keine Rolle, sie kommen erst bei der Hydrodynamik zum Tragen. Außerdem vernachlässigen wir zunächst noch Oberflächenkräfte und behandeln sie erst im Kapitel *Phänomene an Flüssigkeitsgrenzflächen*. Zunächst haben wir also nur mit **idealen Flüssigkeiten** zu tun.

5.2.1 Statischer Druck

Bei idealen Flüssigkeiten treten keine Tangentialkräfte auf, Kräfte wirken immer senkrecht zur Oberfläche. Der Druck durch eine Kraft senkrecht zur Flüssigkeitsoberfläche ist gegeben durch:

$$p = \frac{F}{A} \tag{18}$$

Unter Vernachlässigung des Eigengewichts der Volumenelemente in der Flüssigkeit und damit unter Vernachlässigung des Schweredrucks, ist der Druck im gesamten Flüssigkeitsvolumen konstant.

5.2.2 Schweredruck

Jedes Volumenelement $\mathrm{d}V$ in der Flüssigkeit im Schwerefeld der Erde hat das Gewicht $\rho \cdot g \cdot \mathrm{d}V$. Somit wirkt auf den Boden eines mit Flüssigkeit gefüllten Gefäßes ein Druck wegen des Gewichtes der darüberstehenden Flüssigkeit. Bei einer Flüssigkeitshöhe H ist der Schweredruck am Boden auf die Fläche A:

$$p(z) = \int_z^H \frac{\rho \cdot g \cdot A}{A} \mathrm{d}z' = \rho \cdot g \cdot (H - z). \tag{19}$$

Ein Maß für die Druckabhängigkeit der Dichte $\rho = \rho(p)$ ist die **Kompressibilität**:

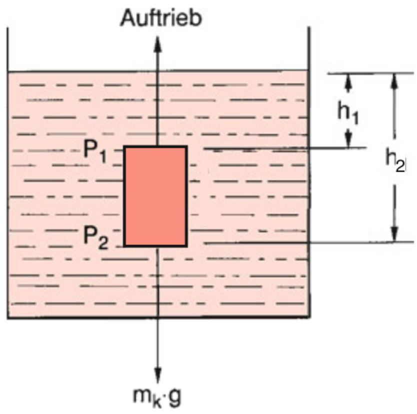
$$\kappa \overset{\mathrm{Def}}{=} -\frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial p} \tag{20}$$

Die Kompressibilität gibt die relative Volumenänderung bei einer Änderung des Drucks Δp des äußeren Drucks p an.

Der Schweredruck auf den Boden eines Gefäßes ist nur von der Höhe H der Flüssigkeit, nicht aber von der Gestalt des Gefäßes abhängig (**hydrostatisches Paradoxon**)!

5.2.3 Auftriebskraft

Befindet sich ein Körper in einer Flüssigkeit (Fl) oder in einem Gas unter dem Einfluss des Schweredrucks, so entsteht durch das Druckgefälle eine resultierende Kraft auf den Körper, die sogenannte **Auftriebskraft**. Die Auftriebskraft entspricht betragsmäßig der Gewichtskraft des verdrängten Volumens an Flüssigkeit, bzw. Gas (**Archimedisches Prinzip**). Taucht man einen Zylinder in eine Flüssigkeit, so heben sich die Kräfte auf die Seitenflächen auf, aber die Kraft auf die Bodenfläche ist größer als die Kraft auf die Deckfläche. Das liegt daran, dass der Druck auf Höhe der Bodenfläche höher ist als der Druck auf der Höhe der Deckfläche. Die Differenz zwischen den beiden Kräften ist die Auftriebskraft.

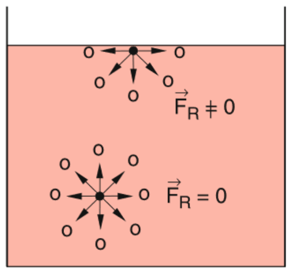


$$F_{\mathrm{A}} = F_2 - F_1 = (p_2 - p_1)A = \rho_{\mathrm{Fl}} g A (h_2 - h_1) = m_{\mathrm{Fl}} \cdot g \tag{21}$$

Die Auftriebskraft zeigt entgegen der Gewichtskraft. Für ein Volumenelement der Flüssigkeit heben sich die Auftriebskraft und die Gewichtskraft gerade auf, das Volumenelement schwebt.

5.3 Flüssigkeitsgrenzflächen

Moleküle, die sich im Inneren der Flüssigkeit befinden, erfahren keine resultierende Kraft ($\vec{F_{\mathrm{R}}} = 0$). Anders ist es jedoch mit Molekülen an der Grenzfläche der Flüssigkeit. Die resultierende Kraft zeigt in Innere der Flüssigkeit. Um ein Molekül aus dem Inneren an die Oberfläche zu bringen, muss gegen diese Kraft eine Arbeit verrichtet werden. Das bedeutet, dass ein Molekül an der Oberfläche eine um den Betrag der Arbeit höhere Energie besitzt.



Die **spezifische Oberflächenenergie** ε, bzw. die **Obeflächenspannung** σ ist

$$\varepsilon = \frac{\Delta W}{\Delta A} = \sigma, \tag{22}$$

wobei ΔW die Arbeit ist, die nötig ist um die Oberfläche um ΔA zu vergrößern. Für $\varepsilon > 0$ strebt die Flüssigkeit eine minimale Fläche an, da es Energie kostet, die Fläche zu erzeugen. Für $\varepsilon < 0$ strebt die Flüssigkeit eine maximale Fläche an. Der Wert von ε ist abhängig von den Bindungskräften zwischen den Molekülen der Flüssigkeit.

5.4 Reibung zwischen festen Körpern

5.4.1 Haftreibung

Wir wollen uns die Reibungskraft anhand eines kurzen Beispiels veranschaulichen. Ein Quader liegt auf einer horizontalen Platte. Dann lässt man eine Kraft $\vec{F}$ an dem Körper angreifen um ihn wegzuziehen oder wegzuschieben. Man macht die Beobachtung, dass der Körper in Ruhe bleibt, solange $|\vec{F}| = F$ einen bestimmten Wert $|\vec{F}_\mathrm{H}| = F_\mathrm{H}$ nicht überschreitet ($F \leq F_\mathrm{H}$). Das bedeutet, man muss die Kraft F_H aufwenden, um die „Verzahnung“der Oberflächen zu lösen. Man spricht hier von **Haftreibung**:

$$F_\mathrm{H} = \mu_\mathrm{H} \cdot F_\mathrm{N} \tag{23}$$

Die Kraft $\vec{F}_\mathrm{H}$ ist proportional zum **Betrag der Normalkraft** $\vec{F}_\mathrm{N}$. Der **Haftreibungskoeffizient** μ_H ist materialabhängig.

5.4.2 Gleitreibung

Wurde der Körper mit einer Kraft $F \geq F_\mathrm{H}$ in Bewegung versetzt, kann er jetzt durch die Kraft $F_\mathrm{G} < F_\mathrm{H}$ in Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit gehalten werden. Die **Gleitreibung** ist ebenfalls proportional zum Betrag der Normalkraft und auch der **Gleitreibungskoeffizient** μ_G ist eine materialspezifische Konstante. Wichtig ist, dass die Reibungskraft immer entgegengesetzt zur Bewegungsrichtung gerichtet ist.

$$F_\mathrm{G} = \mu_\mathrm{G} \cdot F_\mathrm{N}, \quad \text{bzw.} \quad \vec{F}_\mathrm{G} = -\mu_\mathrm{G} \cdot F_\mathrm{N} \cdot \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \tag{24}$$

5.4.3 Rollreibung

Wenn ein runder Körper auf einer ebenen Unterlage rollt, treten ebenfalls Reibungskräfte auf, die jedoch auf die Anziehungskräfte zwischen den Atomen zwischen dem rollenden Körper und der Unterlage zurückzuführen sind. Außerdem wird die Unterlage leicht eingedrückt, wenn der Körper darüber rollt. Experimentell findet man heraus, dass das Drehmoment, das man benötigt um das entgegengesetzte Drehmoment der Rollreibung zu überwinden gerade gegeben ist durch:

$$D_\mathrm{R} = \mu_\mathrm{R} \cdot F_\mathrm{N} \quad \text{mit} \quad \mu_\mathrm{R} = r \cdot \tan \alpha_\mathrm{R}. \tag{25}$$

α_R bezeichnet den Winkel, um den eine Ebene mindestens geneigt sein muss, damit der Körper anfängt zu rollen.

5.5 Hydrodynamik

Bei ruhenden Flüssigkeiten oder Gasen gilt, dass die Summe der Impulse über alle Teilchen verschwindet. Bei strömenden Flüssigkeiten und Gasen ist das nicht der Fall. Man beschreibt ein strömendes Medium durch die Kräfte, die darauf wirken , wie z.B.

- Druckdifferenzen: $\vec{F}_\mathrm{p} = -\mathrm{grad} p \Delta V$
- äußere Kräfte, z.B. Schwerkraft: $\vec{F}_\mathrm{g} = \Delta m \vec{g} = \rho \vec{g} \Delta V$
- Reibungskräfte zwischen den Volumenelementen $\vec{F}_\mathrm{R}$

Mit diesen Kräften können wir jetzt die Bewegungsgleichung aufstellen:

$$\vec{F} = m \cdot \ddot{r} = \rho \Delta V \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \vec{u} = \vec{F}_\mathrm{p} + \vec{F}_\mathrm{g} + \vec{F}_\mathrm{R}, \tag{26}$$

mit $\vec{u}(\vec{r}, t)$ dem Geschwindigkeitsfeld des Mediums. Die totale Änderung des Geschwindigkeitsfelds setzt sich aus zwei Beiträgen zusammen:

- Die Änderung von $\vec{u}$ mit der Zeit an einem festen Ort: $\dfrac{\partial u}{\partial t}$
- Die Änderung von $\vec{u}$ mit dem Ort zu einer festen Zeit: $\dfrac{\partial u}{\partial r} \cdot \dfrac{\partial r}{\partial t}$

Man kann sich die totale Zeitableitung einer beliebigen Variablen A anhand eines kleinen Beispiels gut klar machen: Wenn A das Wetter ist, dann kann es sich an einem bestimmten Ort, z.B. Garching, mit der Zeit ändern $(\dfrac{\partial A}{\partial t})$. Genauso kann das Wetter aber zur gleichen Zeit an verschiedenen Orten unterschiedlich sein $(\dfrac{\partial A}{\partial r} \cdot \dfrac{\partial r}{\partial t})$.

Die totale Zeitableitung des Geschwindigkeitsfeldes, auch substantielle Ableitung genannt, wird dann in der Vektorschreibweise zu:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \vec{u} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} \tag{27}$$

Mit der substantiellen Ableitung können wir die Bewegungsgleichung schreiben als:

$$\rho \Delta V \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} \right) = \vec{F}_\mathrm{p} + \vec{F}_\mathrm{g} + \vec{F}_\mathrm{R}. \tag{28}$$

5.5.1 Euler-Gleichung

Bei der Beschreibung von idealen Flüssigkeiten vernachlässigen wir Reibungseffekte. Damit vereinfacht sich Gleichung (28) zur **Euler-Gleichung**:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t} = \vec{g} - \frac{1}{\rho}\mathrm{grad}p. \tag{29}$$

5.5.2 Kontinuitätsgleichung

Die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho \cdot \vec{v}) = 0 \tag{30}$$

besagt, dass in ein Volumen genauso viel Flüssigkeit einströmt/ausströmt, wie es verliert/aufnimmt. Für inkompressible Flüssigkeiten gilt $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$. Die Kontinuitätsgleichung vereinfacht sich dann zu:

$$\mathrm{div}(\vec{v}) = 0. \tag{31}$$

Für die Strömung von Wasser durch ein Rohr, dessen Querschnittfläche sich von A_1 auf A_2 ändert, ändert sich die durchschnittliche Geschwindigkeit gemäß der Kontinuitätsgleichung für inkompressible Flüssigkeiten:

$$A_1 \cdot v_1 = A_2 \cdot v_2. \tag{32}$$

5.5.3 Bernoulli-Gleichung

Wir betrachten eine Flüssigkeit, die durch ein verjüngtes Rohr fließt. Durch die Verjüngung des Rohres muss aufgrund der Kontinuitätsgleichung die Flüssigkeit im dünneren Teil des Rohres schneller fließen als im weiten. Um das Flüssigkeitsvolumen $\Delta V_1 = A_1 \cdot \Delta x_1$ im weiten Teil des Rohres zu verschieben, muss die Arbeit

$$\Delta W_1 = F_1 \cdot \Delta x_1 = p_1 \cdot A_1 \cdot \Delta x_1 = p_1 \Delta V_1 \tag{33}$$

gegen den Druck p_1 verrichtet werden. Für den dünneren Teil des Rohres können wir analog die verrichtete Arbeit berechnen:

$$\Delta W_2 = F_2 \cdot \Delta x_2 = p_2 \Delta V_2. \tag{34}$$

Durch die Arbeit wird die potentielle Energie de Volumenelements verändert. Die kinetische Energie eines Volumenelements ist:

$$E_{\mathrm{kin}} = \frac{1}{2}\Delta m u^2 = \frac{1}{2}\rho \Delta V u^2. \tag{35}$$

Für ideale Flüssigkeiten muss die Summe aus potentieller und kinetischer Energie konstant bleiben, d.h.:

$$p_1 \Delta V_1 + \frac{1}{2}\rho_1 \Delta V_1 u_1^2 = p_2 \Delta V_2 + \frac{1}{2}\rho_2 \Delta V_2 u_2^2 = \mathrm{const.} \tag{36}$$

Für inkompressible Flüssigkeiten gilt, dass $\rho = \mathrm{const.}$ und damit $\Delta V_1 = \Delta V_2$. Damit kann Gleichung (36) umgeschrieben werden zur **Bernoulli-Gleichung**:

$$p + \frac{1}{2}\rho u^2 = p_0 = \text{const.} \tag{37}$$

Ist p' der Druck, der in der ruhenden Flüssigkeit herrschen würde (z.B. $p' = \rho g h$), so gilt:

$$p + \frac{1}{2}\rho u^2 + \rho g h = p_0 = \text{const.} \tag{38}$$

Die Konstante p_0 ist der **Gesamtdruck**, die Größe $p_\mathrm{S} = \frac{1}{2}\rho u^2$ ist der **Staudruck** und $p_0 - p_\mathrm{S}$ ist der **statische Druck**.