Technische Universität München
Fakultät für Physik

Ferienkurs

Experimentalphysik 1

WS 2016/17

Übung 2

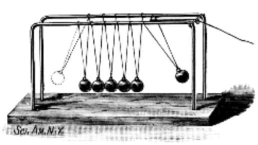
Ronja Berg (ronja.berg@ph.tum.de)
Katharina Scheidt (katharina.scheidt@tum.de)

Inhaltsverzeichnis

A. Übungsaufgaben

A.1. Stoßpendelkette

An einer Stoßpendelkette sind 6 Kugeln gleicher Massen aufgehängt, so dass sie sich gerade berühren. Eine bestimmte Anzahl von Kugeln wird angehoben und losgelassen. Der erfolgende Stoß soll als elastisch, eindimensional und zentral genähert werden. Was passiert? Warum? Begründe anhand einer kleinen Rechnung.



Lösung

Die selbe Anzahl von Kugeln entfernt sich auf der anderen Seite der Kette mit der selben Geschwindigkeit wie die auftreffenden Kugeln. Beim Auftreffen haben alle n Kugeln die selbe Geschwindigkeit v. Nach Impulserhaltung gilt dann für die Geschwindigkeit v' der weggestoßenen Kugeln

$$nmv = n'mv' \quad .$$

Gleichzeitig gilt jedoch wegen der Energieerhaltung

$$n\frac{m}{2}v^2 = n'\frac{m}{2}v'^2 \quad .$$

Setzt man die Impuls- in die Energieerhaltung ein, z.B. $n = n'\frac{v'}{v}$, so ergibt sich

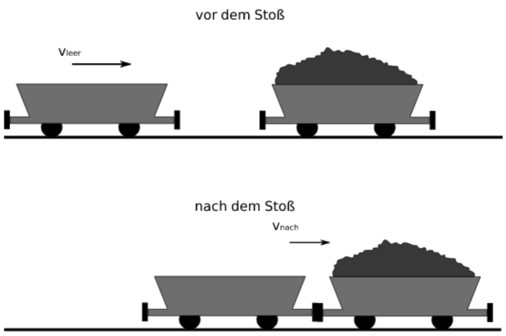
$$v = v' \quad .$$

Mit der Impulserhaltung wiederum ist dann auch

$$n = n' \quad .$$

A.2. Güterwaggon-Crash

An einer Bahnstrecke stößt ein leerer Güterwaggon mit einem identischen aber beladenen Güterwaggon zusammen. Der leere Waggon $m_l = 10\,\mathrm{t}$ hat eine Geschwindigkeit von $v_l = 14{,}4\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ und prallt auf den stehenden Waggon. Bei diesem Zusammenstoß koppeln die beiden Waggons zusammen und bewegen sich nach dem Stoß mit der Geschwindigkeit $v' = 2{,}52\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$.



a) Um welche Art des Stoßprozesses handelt es sich hier? Berechne das Gewicht der Ladung des zweiten Waggons.

b) Vergleiche die kinetische Energie vor dem Stoß mit der kinetischen Energie nachher. Erläutere das Ergebnis.

Lösung

a) Da beide Waggons zusammen koppeln und sich nach dem Stoß als ein Objekt fortbewegen, handelt es sich um einen inelastischen Stoß. Der volle Waggon hat vor dem Stoß keinen Impuls. Der Impuls des leeren Waggons ist damit der Gesamtimpuls vor dem Stoß

$$p_v = m_l \cdot v_l \quad .$$

Die Masse der Ladung sei m_k. Der Komplex von beiden Waggons nach dem Stoß hat einen Impuls von

$$p_n = (2m_l + m_k)v' \quad .$$

Durch die Impulserhaltung gilt

$$p_v = p_n \quad .$$

Und damit ergibt sich das Gewicht der Ladung zu

$$m_k = m_l \cdot \frac{v_l}{v'} - 2m_l = 37\,\mathrm{t} \quad .$$

b) Vergleiche die kinetische Energie vor dem Stoß mit der kinetischen Energie nachher. Erläutere das Ergebnis.
Die Energie vor dem Stoß ist

$$E_{vor} = \frac{1}{2} m_l \cdot v_l^2 = 80 \cdot 10^3\,\mathrm{J} \quad .$$

Mit der nun berechneten Masse der Ladung ergibt sich für die kinetische Energie nach dem Stoß

$$E_{nach} = \frac{1}{2}(2m_l + m_k)v'^2 = 14 \cdot 10^3\,\mathrm{J} \quad .$$

Da es sich um einen inealstischen Stoß handelt, ist die kinetische Energie nach dem Stoß geringer, als die vor dem Stoß. Die Differenz der beiden Energien wurde in Wärme umgewandelt.

A.3. Personenimpulserhaltung

Zwei Personen der Massen m_1 und m_2 mit den Geschwindigkeiten $v_1 = v_2 = 10\frac{km}{h}$ rennen in der Universität auf dem Flur frontal ineinander. Beim Aufprallen halten sich die Personen aneinander fest und bewegen sich gemeinsam weiter. Wie groß ist die Geschwindigkeit der beiden Personen nach dem Stoß bei einem Massenverhältnis in folgenden Fällen und in welche Richtung bewegen sie sich jeweils?

a) 1:1 (Student gegen Student)

b) 2:1 (Technischer Assistent gegen Student)

c) 10:1 (Sehr dicker Professor gegen Student)

d) Was passiert im Fall c), wenn sich die Personen nicht aneinander festhalten (der Bauch des Professors ist perfekt elastisch). Welche Geschwindigkeit hat der Student nach dem Zusammenstoß?

Lösung
Umgerechnet beträgt die Geschwindigkeit der Personen $v_1 = v_2 = 10\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = 2{,}78\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.
Allgemein gilt

$$v' = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} \quad \text{mit} \quad v_1 = -v_2 \tag{1}$$

a)

$$m_1 = m_2 \implies v' = 0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Die beiden Personen bleiben stehen.

b) Die beiden Personen bewegen sich in Richtung des technischen Assistenten:

$$m_1 = 2m_2 \implies v' = \frac{1}{3}v_1 = 0{,}93\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

c) Die beiden Personen bewegen sich in Richtung des dicken Professors:

$$m_1 = 10m_2 \implies v' = \frac{9}{11}v_1 = 2{,}27\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

d) Da es sich um einen vollkommen elastischen Stoß handelt, gilt die Impuls- und Energieerhaltung:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_3 + m_2 v_4$$

Mit $v_1 = -v_2$ und $m_1 = 10m_2$ kann man die Impulserhaltungsgleichung nach v_3 auflösen

$$\begin{aligned} 10m_2 v_1 - m_2 v_1 &= 10m_2 v_3 + m_2 v_4 \\ v_3 = \frac{10m_2 v_1 - m_2 v_1 - m_2 v_4}{10m_2} &= 0.9v_1 - 0.1v_4 \end{aligned}$$

Mittels der Energieerhaltung und Einsetzten des Ergebnisses aus der Impulserhaltung, sowie den Bedingungen $v_1 = -v_2$ und $m_1 = 10m_2$ erhält man eine quadratische Gleichung für v_4.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 &= \frac{1}{2}m_1 v_3^2 + \frac{1}{2}m_2 v_4^2 \\ \frac{1}{2}10m_2 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_1^2 &= \frac{1}{2}10m_2(0.9v_1 - 0.1v_4)^2 + \frac{1}{2}m_2 v_4^2 \\ 5.5v_1^2 - 5(0.9v_1 - 0.1v_4)^2 - 0.5v_4^2 &= 0 \\ 5.5v_1^2 - 4.05v_1^2 + 0.9v_1 v_2 - 0.05v_4^2 - 0.5v_4^2 &= 0 \\ 11{,}19\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2 + 2{,}5\,\mathrm{m/s} \cdot v_4 - 0.55v_4^2 &= 0 \end{aligned}$$

Löst man diese quadratische Gleichung erhält man

$$v_4 = \frac{2.5 \pm \sqrt{6.25 + 24.62}}{1.1} \frac{m}{s} \quad .$$

also $v_4 = 7{,}33\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ als Geschwindigkeit des Studenten nach dem elastischen Stoß. Das zweite Ergebnis, $v_4 = -2{,}78\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, beschreibt die Situation ohne Stoß, das heißt die beiden Körper treffen sich nicht und jeder behält seine Geschwindigkeit und Richtung bei.)

A.4. Nicht-zentraler Stoß von Billiardkugeln

Eine Billiardkugel trifft eine zweite identische Billiardkugel und wird beim Stoß um $45\,^\circ$ aus ihrer Ursprungsrichtung abgelenkt. Zeige, dass im Fall einer elastischen Kollision die zweite Billiardkugel im Winkel von $90\,^\circ$ zur ersten fliegen muss.
Hinweis: Es handelt sich um einen nicht-zentralen Stoß.

Lösung
Sei α der Winkel zwischen der anrollenden Kugel (Kugel A) und der anfänglich ruhenden Kugel (Kugel B). Bei einem elastischen Stoß gelten die Impuls- und Energieerhaltungssätze. Somit ist

$$\vec{p}_A = \vec{p}_{A'} + \vec{p}_{B'} \implies \vec{v}_A = \vec{v}_{A'} + \vec{v}_{B'} \quad .$$

Quadriert man diese Gleichung erhält man

$$\vec{v}_A^2 = \vec{v}_{A'}^2 + \vec{v}_{B'}^2 + 2\vec{v}_{A'} \cdot \vec{v}_{B'} \quad . \tag{2}$$

Mit der Energieerhaltung ergibt sich

$$\frac{1}{2}mv_A^2 = \frac{1}{2}mv_{A'}^2 + \frac{1}{2}mv_{B'} \implies v_A^2 = v_{A'}^2 + v_{B'}^2 \quad . \tag{3}$$

Vergleichen wir dies nun mit Gleichung (2), so ergibt sich

$$\begin{aligned}
&2\vec{v}_{A'} \cdot \vec{v}_{B'} = 0 \\
&\vec{v}_{A'} \cdot \vec{v}_{B'} = |\vec{v}_{A'}| \cdot |\vec{v}_{B'}| \cdot \cos(\alpha) = 0 \\
&\implies \alpha = 90\,^\circ
\end{aligned}$$

A.5. Rangierender Waggon

Beim Rangieren stößt ein Waggon der Masse $m_A = m$ mit der Geschwindigkeit v_0 auf zwei einzeln stehende Waggons der Massen $m_B = \frac{1}{2}m$ und $m_C = \frac{3}{4}m$

a) Wie viele Zusammenstöße finden insgesamt statt, wenn diese elastisch ablaufen? Mit welchen Geschwindigkeiten v_A, v_B und v_C bewegen sich die Waggons nach dem letzten Zusammenstoß?

b) Wie ändert sich das Ergebnis, wenn die beiden stehenden Waggons vertauscht sind?

Lösung

a) Da es sich um einen elastischen Stoß handelt, ist sowohl der Impuls als auch die Energie erhalten. Zusätzlich ist es ein zentraler Stoß wodurch wir folgende allgemeine Formeln verwenden könnten

$$v_1{}' = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2 v_2}{m_1 + m_2} \qquad v_2{}' = \frac{(m_1 - m_2)v_2 + 2m_1 v_1}{m_1 + m_2} \quad .$$

Da wir aber kräftig üben wollen, versuchen wir die Geschwindigkeiten mit Hilfe der Erhaltungssätze zu berechnen. Für die Impulserhaltung beim **ersten Stoß** zwischen Waggon A und B erhalten wir

$$m_A v_0 = m_A v_{1A} + m_B v_{1B} \implies m v_0 = m v_{1A} + \frac{1}{2} m v_{1B} \implies v_{1A} = v_0 - \frac{1}{2} v_{1B} \tag{4}$$

wobei v_{1A} und v_{1B} die Geschwindigkeiten von Waggon A und Waggon B nach dem Stoß sind. Mit der Energieerhaltung erhalten wir

$$\frac{1}{2} m_A v_0^2 = \frac{1}{2} m_A v_{1A}^2 + \frac{1}{2} m_B v_{1B}^2$$

$$\implies m v_0^2 = m v_{1A}^2 + \frac{1}{2} m v_{1B}^2$$

Mit dem Ausdruck für v_{1A} aus Gleichung (4) berechnet sich dies zu

$$v_0^2 = v_0^2 - v_0 v_{1B} + \frac{1}{4} v_{1B}^2 + \frac{1}{2} v_{1B}^2$$

$$\implies \frac{3}{4} v_{1B}^2 = v_0 v_{1B} \implies v_{1B} = \frac{4}{3} v_0 \quad .$$

Damit ergibt sich die Geschwindigkeit von Waggon A nach dem Stoß zu

$$v_{1A} = v_0 - \frac{1}{2} v_{1B} = (1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}) v_0 = \frac{1}{3} v_0 \quad .$$

Das heißt beide Waggons bewegen sich nun in Richtung von Waggon C. Für den **zweiten Stoß** zwischen Waggon B und C ergibt sich folgende Gleichung für die Impulserhaltung

$$\frac{1}{2} m v_{1B} = \frac{1}{2} m v_{2B} + \frac{3}{4} m v_{2C} \implies v_{2B} = v_{1B} - \frac{3}{2} v_{2C}$$

wobei v_{2B} und v_{2C} die Geschwindigkeiten von Waggon B und Waggon C nach dem zweiten Stoß sind. Mit der Energieerhaltung erhalten wir

$$\frac{1}{2}(\frac{1}{2}m)v_{1B}^2 = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}m)v_{2B}^2 + \frac{1}{2}(\frac{3}{4}m)v_{2C}^2$$

$$\Longrightarrow \; v_{1B}^2 = (v_{1B}^2 - 3v_{1B}v_{2C} + \frac{9}{4}v_{2C}^2) + \frac{3}{2}v_{2C}^2$$

Daraus ergibt sich für die Geschwindigkeit des Waggons C

$$v_{2C} = \frac{4}{5}v_{1B} = \frac{4}{5}\frac{4}{3}v_0 = \frac{16}{15}v_0$$

und für die des Waggons B

$$v_{2B} = v_{1B} - \frac{3}{2}v_{2C} = -\frac{4}{15}v_0 \quad .$$

Damit bewegt sich Waggon B nun in die entgegengesetzte Richtung und wird noch einmal mit Waggon A kollidieren. Somit gibt es 3 Zusammenstöße. Für den **dritten Zusammenstoß** ergibt sich mit den Geschwindigkeiten v_{3A} und v_{3B} nach dem Stoß

$$mv_{1A} + \frac{1}{2}mv_{2B} = mv_{3A} + \frac{1}{2}mv_{3B} \quad .$$

$$\frac{3}{15}v_0 = v_{3A} + \frac{1}{2}v_{3B} \;\Longrightarrow\; v_{3B} = \frac{6}{15} - 2v_{3A}$$

Zusammen mit der Energieerhaltung erhält man dann

$$mv_{2A}^2 + (\frac{1}{2}m)v_{2B}^2 = mv_{3A}^2 + \frac{1}{2}v_{3B}^2$$

$$(\frac{1}{9} + \frac{8}{15^2})v_0 = v_{3A}^2 + (\frac{1}{2}\frac{36}{15^2})v_0^2 - \frac{12}{15}v_0v_{3A} + 2v_{3A}^2$$

$$\frac{25+8-18}{225}v_0^2 = 3v_{3A}^2 - \frac{12}{15}v_0v_{3A}$$

$$\Longrightarrow \; 45v_{3A}^2 - 12v_0v_{3A} - v_0^2 = 0$$

Diese Gleichung lässt sich nun mit der Mitternachtsformeln lösen wodurch wir zwei Ergebnisse erhalten

$$v_{3A}^{(1/2)} = \frac{12v_0 \pm \sqrt{(12)^2v_0^2 + 4\cdot 45v_0^2}}{90} \;\Longrightarrow\; v_{3A}^{(1)} = \frac{1}{3} \qquad v_{3A}^{(2)} = -\frac{1}{15}$$

Das erste Ergebnis ist genau die Geschwindigkeit, die Waggon A vor dem Stoß hatte, also quasi der Fall, dass sich die beiden Kugeln ungehindert kreuzen würden. Da die Waggons aber noch ein drittes Mal kollidieren, macht nur die zweite Lösung physikalisch Sinn. Damit erhalten wir für die Geschwindigkeit von Waggon B

$$v_{3B} = \frac{6}{15}v_0 + \frac{2}{15}v_0 = \frac{8}{15}v_0 \quad .$$

Nach dem dritten Stoß bewegt sich Waggon A also entgegen seiner anfänglichen Geschwindigkeit mit $v_{3A} = -\frac{1}{15}v_0$. Waggon B bewegt sich mit $v_{3B} = \frac{8}{15}v_0$ entgegengesetzt von Waggon A. Er ist langsamer als Waggon C, der eine Geschwindigkeit von $v_{2C} = \frac{16}{15}v_0$. Somit kommt es zu keiner weiteren Kollision.

b) Wie ändert sich das Ergebnis, wenn die beiden stehenden Waggons vertauscht sind? Da wir nun wahrscheinlich gezeigt haben, dass wir wunderbar mit Impuls- und Energieerhaltungssätzen umgehen können, wollen wir diesen Aufgabenteil mit der Gleichung (**??**) lösen. Außerdem macht es in der Klausur auch stets Sinn den kürzesten Rechenweg zu wählen um Zeit zu sparen, wenn nicht speziell nach einer bestimmten Rechnung gefragt ist.

1. Stoß: Waggon A kollidiert mit Waggon B

$$m_1 = m \qquad m_2 = \frac{3}{4}m \qquad v_1 = v_0 \qquad v_2 = 0$$

Damit erhalten wir für die Geschwindigkeiten nach dem Stoß

$$v_{1A} = \frac{\left(m - \frac{3}{4}m\right)v_0}{m + \frac{3}{4}m} = \frac{1}{7}v_0$$

$$v_{1B} = \frac{2mv_0}{m + \frac{3}{4}m} = \frac{7}{8}v_0 \quad .$$

2. Stoß: Waggon B kollidiert mit Waggon C

$$m_1 = \frac{3}{4}m \qquad m_2 = \frac{m}{2} \qquad v_1 = v_{1B}\frac{8}{7}v_0 \qquad v_2 = 0$$

Nach dem zweiten Stoß haben Waggon B und C somit folgende Geschwindigkeiten

$$v_{2B} = \frac{\left(\frac{3}{4}m - \frac{m}{2}\right)\frac{8}{7}v_0}{\frac{3}{4}m + \frac{m}{2}} = \frac{8}{35}v_0$$

$$v_{2C} = \frac{\frac{6}{4}m\frac{8}{7}v_0}{\frac{3}{4}m + \frac{m}{2}} = \frac{48}{35}v_0$$

Nach dem zweiten Stoß bewegen sich alle 3 Waggons in die gleiche Richtung. Nun ist Waggon A am langsamsten und Waggon C am schnellsten

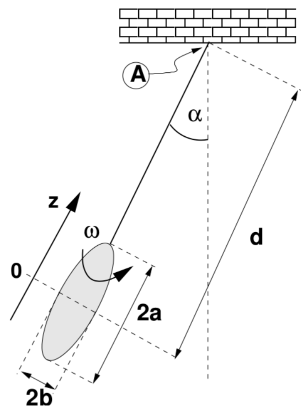
$$v_A = \frac{5}{35} v_0 \qquad v_B = \frac{8}{35} v_0 \qquad v_C = \frac{48}{35} v_0 \quad .$$

und somit kommt es zu keinem weiteren Stoß.

A.6. Ellipsoid-Präzession

Ein Rotationsellipsoid mit homogener Dichte ρ und Halbachsen a (entlang der Symmetrieachse) und b (senkrecht dazu) wird mit Winkelgeschwindigkeit ω um seine Symmetrieachse in Drehung versetzt und dann wie in der Skizze gezeigt an einer frei drehbaren, näherungsweise masselosen Stange aufgehängt. Der Schwerpunkt des Ellipsoids ist dabei eine Strecke d von Aufhängepunkt A der Stange entfernt.

a) Der Ellipsoidradius als Funktion des Abstandes z vom Mittelpunkt ist durch $r^2 = b^2(1 - (z/a)^2)$ gegeben. Zeige durch geeignete Integrationen, dass die Ellipsoidmasse $M = \rho \cdot 4\pi ab^2/3$ ist und das Massenträgheitsmoment $I = 0.4Mb^2$ beträgt. *Hinweis:* Das Trägheitsmoment einer infinitesimal dünnen Zylinderscheibe mit Radius r und Masse dm beträgt d$I = r^2 \cdot \mathrm{d}m/2$.



b) Wie lauten Betrag und Richtung des Drehimpulses des Ellipsoids und des durch die Gewichtskraft erzeugten Drehmoments bzgl. des Aufhängepunkts A der Stange.

c) Leite die Winkelgeschwindigkeit Ω her, mit der Ellipsoid und Stange unter dem Einfluss der Schwerkraft um die senkrechte Achse präzessieren.

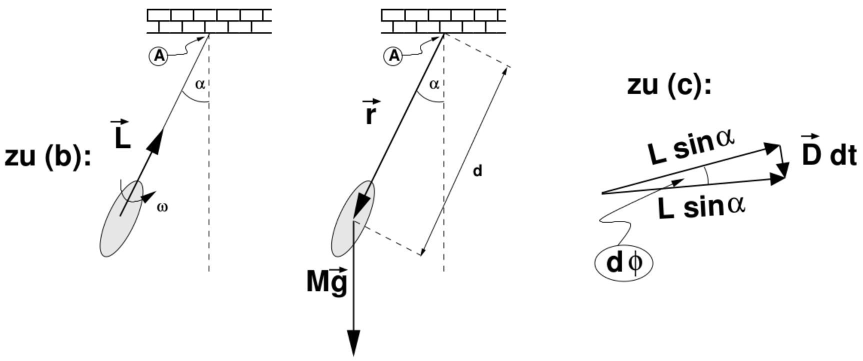
Lösung

a) Wähle die z-Achse in Richtung der Symmetrieachse des Rotationsellipsoids. Die Integration über z entspricht damit der Summation über infinitesimale Zylinderscheiben mit Radius $r(z)$. Für die Masse folgt

$$M = \int_V \rho \mathrm{d}V = \rho \int_{-a}^{a} 2\pi r(z)^2 dz = 2\pi\rho b^2 \int_0^a \left(1 - \left(\frac{z}{a}\right)^2\right) \mathrm{d}z$$
$$= 2\pi\rho b^2 \left(a - \frac{a^3}{3a^2}\right) = \frac{4\pi}{3}\rho ab^2 \quad .$$

Für das Trägheitsmoment gilt (verwende Hinweis mit $\mathrm{d}m = \rho\pi r(z)^2\mathrm{d}z$):

$$I = \int_{-a}^{a} \frac{1}{2} r(z)^2 \mathrm{d}m = 2\pi\rho \int_0^a \frac{1}{2} r(z)^4 \mathrm{d}z = \pi\rho b^4 \int_0^a \left(1 - \left(\frac{z}{a}\right)^2\right)^2 \mathrm{d}z$$
$$= \pi\rho b^4 \underbrace{\left(a - \frac{2a^3}{3a^2} + \frac{a^5}{5a^4}\right)}_{=8a/15} = \frac{8\pi}{15}\rho a b^4 = \frac{2}{5}Mb^2 = 0.4Mb^2$$



b) Der Drehimpuls des Ellipsoids hat den Betrag $L = |\vec{L}| = I\omega = 0.4Mb^2\omega$. Dabei zeigt $\vec{L}$ in Richtung der Stange zum Aufhängepunkt A hin.
   Das Drehmoment wird verursacht durch die Gewichtskraft $M\vec{g}$ und hat den Betrag $D = |\vec{D}| = |\vec{r} \times (M\vec{g})| = Mgd\sin(\alpha)$. $\vec{D}$ steht senkrecht auf $\vec{g}$ und $\vec{r}$, zeigt also senkrecht aus der Zeichenebene heraus.

c) Wegen $\vec{D} = \mathrm{d}\vec{L}/dt$ ändert sich $\vec{L}$ im infinitesimalen Zeitintervall t um $\mathrm{d}\vec{L}$. Aus der Skizze (Sicht von oben) ist zu entnehmen:

$$\mathrm{d}\phi = \frac{|\mathrm{d}\vec{L}|}{L\sin(\alpha)} = \frac{|\vec{D}|\mathrm{d}t}{L\sin(\alpha)} = \frac{Mgd\sin(\alpha)}{I\omega\sin(\alpha)}\mathrm{d}t \implies \Omega = \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = \frac{gd}{0.4b^2\omega}$$

A.7. Kugelrennen und Rotation

Zum Experimentieren gibt es zwei Kugeln, die den gleichen Radius R haben und die gleiche Masse M. Leider ist nicht bekannt, welches die Hohlkugel ist und welches die Vollkugel ist. Um dies herauszufinden lässt man beide Kugeln eine schiefe Ebene herunter rollen. Welche Kugel kommt zuerst unten an und warum? Gegebenen Falles kann einen Rechnung hilfreich sein.

Lösung

Betrachten wir die Energieerhaltung ganz allgemein

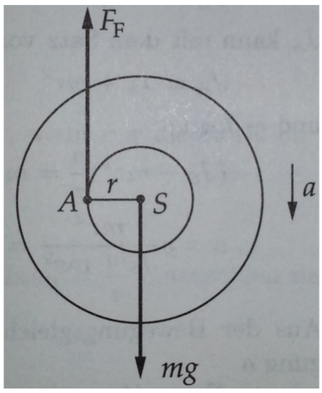
$$E_{pot} = E_{kin} + E_{rot}$$
$$M \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot M \cdot v^2 + \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2 \quad \text{mit} \quad \omega = \frac{v}{R} \quad \text{folgt}$$
$$M \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \left(M + \frac{I}{R^2}\right) \cdot v^2 \qquad \Longrightarrow \qquad v = \sqrt{\frac{2 \cdot M \cdot g \cdot h}{M + \frac{I}{R^2}}}$$

Wir erkennen $v \propto \sqrt{\frac{1}{I}}$, also ist die Geschwindigkeit größer wenn das Trägheitsmoment kleiner ist. Folglich muss die Kugel mit dem kleineren Trägheitsmoment schneller unten ankommen. Da bei der Hohlkugel die Masse insgesamt weiter außen sitzt, d.h. weiter von der Drehachse entfernt ist, ist ihr Trägheitsmoment größer als das der Vollkugel. Also kommt die Vollkugel vor der Hohlkugel unten an und wir wissen wieder welche Kugel welche ist.

(Man muss die genauen Formeln für die Trägheitsmomente der Vollkugel $I_V = \frac{2}{5}mr^2$ und Hohlkugel $I_H = \frac{2}{5}m\frac{R_a^5 - R_i^5}{R_a^3 - R_i^3} > I_V$ dafür gar nicht kennen.)

A.8. JoJo - Translation und Rotation

Ein JoJo besteht aus einer Rolle mit der Masse $m = 135\,\mathrm{g}$ und dem Trägheitsmoment $J_S = 140\,\mathrm{g \cdot cm^2}$, auf die ein Faden der Länge $l = 83\,\mathrm{cm}$ aufgewickelt ist. Der Radius der Trommel ist $r = 12{,}5\,\mathrm{mm}$.



a) Mit welcher Beschleunigung a bewegt sich die Rolle nach dem Loslassen nach unten?

b) Wie groß ist die Fadenkraft F_F?

c) Welche Sinkgeschwindigkeit v_1 hat die Rolle, wenn der Faden vollständig abgewickelt ist?

Lösung

a) Die Translationsbeschleunigung a der Rolle erhält man aus der Bewegungsgleichung $F = ma$. F ist die Summe aller am Körper angreifenden Kräfte (unabhängig von deren Angriffspunkten). Das sind hier die Gewichtskraft mg der Rolle und die (vorläufig unbekannte) Fadenkraft F_F

$$ma = mg - F_F$$

Gleichzeitig mit der Translation führt die Rolle eine Rotation aus. Da sich von der Rolle in der Zeit t die Länge s des Fadens abwickelt, um die der

Schwerpunkt sinkt, gilt $s = r \cdot \varphi$ (Abrollbedingung). Daraus folgt

$$\ddot{s} = r\ddot{\varphi} \quad \text{oder} \quad a = r\alpha$$

Die Bewegungsgleichung der Rotation

$$J_A \alpha = M_A$$

kann für eine beliebige Lage der Achse aufgestellt werden.

Schwerpunktachse S:

$$J_S \alpha = M_S$$

Zu M_S liefert nur F_F einen Beitrag

$$M_S = F_F r$$

Somit ergibt sich mit $\alpha = \frac{a}{r}$

$$J_S \alpha = F_F r \qquad \Longrightarrow \qquad F_F = \frac{J_S a}{r^2}$$

F_F wird in die Bewegungsgleichung der Translation eingesetzt

$$ma = mg - \frac{J_S a}{r^2}$$

und es folgt

$$a\left(m + \frac{J_S}{r^2}\right) = mg \qquad \Longrightarrow \qquad a = \frac{g}{1 + \frac{J_S}{mr^2}} = 5{,}9\,\mathrm{m/s^2}$$

Momentane Drehachse A:

$$J_A \alpha = M_A$$

Dieser Ansatz liefert das gleiche Ergebnis wie oben, ohne dass die Bewegungsgleichung der Translation benutzt werden muss , da in M_A nur die bekannte Gewichtskraft der Rolle eingeht

$$J_A \alpha = mgr$$

J_A kann mit dem *Satz von Steiner* durch J_S ersetzt werden

$$J_A = J_S + mr^2$$

und es folgt das selbe Ergebnis

$$(J_S + mr^2)\frac{a}{r} = mgr \qquad \Longrightarrow \qquad a = g\frac{mr^2}{J_S + mr^2} = \frac{g}{1 + \frac{J_S}{mr^2}} = 5{,}9\,\mathrm{m/s^2}$$

b) Aus der Bewegungsgleichung der Translation folgt bei nunmehr bekannter Beschleunigung a

$$F_F = m(g-a) = mg\left(1 - \frac{1}{1+\frac{J_S}{mr^2}}\right) = \frac{mg}{1+\frac{mr^2}{J_S}} = 0{,}528\,\mathrm{N}$$

c) Wegen der konstanten Beschleunigung a werden der zurückgelegte Weg s und die Geschwindigkeit v der Rolle mit Hilfe der Gesetze der gleichmäßig beschleunigten Bewegung ermittelt

$$\begin{aligned} s &= \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + s_0 \\ v &= at + v_0 \end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung von $v_0 = 0$ und $s_0 = 0$ gilt zur Zeit t_1 , zu der das Band vollständig abgewickelt ist $(s = l)$

$$l = \frac{1}{2}at_1^2 \quad \text{und} \quad v_1 = at_1$$

t_1 wird eliminiert

$$\begin{aligned} t_1 &= \sqrt{\frac{2l}{a}}; \quad v_1 = \sqrt{2al} \\ v_1 &= \sqrt{\frac{2gl}{1+\frac{J_S}{mr^2}}} = 3{,}13\,\mathrm{m/s} \end{aligned}$$

Alternativer Lösungsweg:

Die Geschwindigkeit v_1 kann auch mit Hilfe des Energieerhaltungssatzes berechnet werden. Im Startpunkt ist nur die potentielle Energie $E_{pot} = mgl$ vorhanden, die nach Abwickeln des Bandes vollständig in kinetische Energie umgesetzt wird: $E_{kin} = E_{pot}$.

Je nach der gewählten Beschreibung der Bewegung setzt sich die Energie unterschiedlich zusammen: Translation und zusätzliche Rotation um die Schwerpunktachse S ergibt

$$E_{kin} = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}J_S\omega_1^2 = \frac{1}{2}mv_1^2\left(1 + \frac{J_S}{mr^2}\right)$$

wobei die Abrollbedingung $\omega_1 = \frac{v_1}{r}$ verwendet wurde.
(*Anmerkung:* Das gleiche Ergebnis für die kinetische Energie erhalten wir, wenn nur die Rotation um die momentane Drehachse A betrachtet wird. Dann ist $E_{kin} = \frac{1}{2}J_A\omega_1^2$ wobei nach dem *Satz von Steiner* $J_A = J_S + mr^2$ und

ebenfalls die Abrollbedingung $\omega_1 = \frac{v_1}{r}$ einzusetzen ist.) Der Energiesatz lautet somit

$$\frac{1}{2}mv_1^2\left(1+\frac{J_S}{mr^2}\right) = mgl$$

Für die Geschwindigkeit erhalten wir daraus ebenso

$$v_1 = \sqrt{\frac{2gl}{1+\frac{J_S}{mr^2}}} = 3{,}13\,\mathrm{m/s}$$

A.9. Kreisbewegungen/Corioliskraft

In einer ringförmigen Raumstation will man durch Rotation ein künstliches Schwerefeld erzeugen.

(a) Mit welcher Kreisfrequenz ω müssen die im Radius R=1km angelegten Mannschaftsräume um die Ringachse rotieren, damit sich die dort untergebrachte Besatzung heimisch fühlt, d.h. eine Beschleunigung von $g = 9,81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ erfährt?

(b) Mit welcher Geschwindigkeit und in welcher Richtung muss ein Astronaut den Ringkorridor entlang rennen, wenn er die künstliche Schwerkraft (i) um 10% verringern und (ii) um 10% vergrößern will?

(c) Mangels Sicht nach außen weiß der Astronaut nicht, mit welchem Drehsinn die Raumstation rotiert. Wie kann er dies mit Hilfe eines Fadens, eines Gewichts und einer Stahlkugel herausfinden?

Lösung

(a) Die Zentrifugalbeschleunigung muss gleich g sein, also:

$$\omega^2 R = g \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{R}} = 0,099\frac{1}{\mathrm{s}}$$

(b) Die Coriolis-Kraft zeigt in (entgegen der) Richtung der Zentrifugalkraft, wenn der Astronaut in (entgegen der) Drehrichtung läuft. Also muss er (i) entgegen, (ii) in Drehrichtung laufen. In beiden Fällen muss für die Geschwindigkeit gelten:

$$2v\omega = 0,1\omega^2 R \Rightarrow v = 0,1\omega\frac{R}{2} = 4,95\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

(c) Er baut aus Faden und Gewicht ein Lot und hängt dieses an der Decke auf. Vom Aufhängungspunkt lässt er die Stahlkugel fallen und beobachtet, in welche Richtung sie vom Lot abweicht. Die Richtung der Abweichung gibt die Drehrichtung an.