Technische Universität München
Fakultät für Physik

Ferienkurs

Experimentalphysik 1

WS 2016/17

Vorlesung 2

Ronja Berg (ronja.berg@ph.tum.de)
Katharina Scheidt (katharina.scheidt@tum.de)

Inhaltsverzeichnis

2 Systeme von Massenpunkten

Betrachtet man nicht nur einen einzigen Massenpunkt, sondern ein System aus mehreren Teilchen (Massenpunkten), so muss man neue Größen einführen um dieses System gut beschreiben zu können. Im Folgenden haben wir ein System von N Teilchen mit den Massen m_i, die sich an den Orten $\vec{r}_i$ befinden und eine Geschwindigkeit $\vec{v}_i$ besitzen. Die Gesamtmasse M eines solchen Systems berechnet sich zu

$$M = \sum_i m_i \tag{1}$$

also der Summe über alle Einzelmassen m_i.

Sehr hilfreich in der Beschreibung von Mehrteilchensystemen sind Schwerpunktkoordinaten. Der Schwerpunkt ist definiert als

$$\vec{r}_s = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} m_i \cdot \vec{r}_i \tag{2}$$

und seine Geschwindigkeit ist

$$\vec{v}_s = \frac{\mathrm{d}\vec{r}_s}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} m_i \cdot \vec{v}_i \quad . \tag{3}$$

Analog zur Gesamtmasse lässt sich der Gesamtimpuls eines Systems ausdrücken durch die Summe der Einzelimpulse $\vec{p}_i = m_i \cdot \vec{v}_i$

$$\vec{p}_s = M \cdot \vec{v}_s = \sum_i \vec{p}_i \quad . \tag{4}$$

Wirken keine äußeren Kräfte auf das System, so ist der Schwerpunktimpuls eine Erhaltungsgröße: $\vec{p}_s = const.$

2.0.1 Das Schwerpunktsystem

Als Schwerpunktsystem bezeichnet man das Koordinatensystem, dessen Ursprung im Schwerpunkt ruht. Es ist insbesondere bei der Berechnung von Stößen von großer Bedeutung. Für ein Teilchen i, das im Laborsystem den Ortsvektor $\vec{r}_i$ hat, berechnet sich der Ortsvektor im Schwerpunktsystem $\vec{r}_{i,s}$ über

$$\vec{r}_i = \vec{r}_s + \vec{r}_{i,s} \quad . \tag{5}$$

Auf Grund der Definition des Schwerpunkts verschwindet die Summe über die mit der Masse gewichteten Koordinaten sowie die Summe über die Zeitableitungen der Koordinaten im Schwerpunktsystem

$$\sum_i m_i \cdot \vec{r}_{i,s} = 0 \qquad \sum_i \vec{p}_{i,s} = 0 \quad . \tag{6}$$

Die **reduzierte Masse** μ (hier exemplarisch für zwei Teilchen) ist definiert über

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \qquad \Rightarrow \mu = \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2} \tag{7}$$

und ermöglicht eine einfache Darstellung der Bewegung von Teilchen die miteinander wechselwirken. Die kinetische Energie eines abgeschlossenen Systems zweier Teilchen im Schwerpunktsystem entspricht nämlich der kinetischen Energie eines Teilchens mit der reduzierten Masse μ, das sich mit der Relativgeschwindigkeit $\vec{v}_{12} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$ bewegt

$$E_{kin} = \frac{1}{2}\mu\vec{v}_{12} \quad .$$

2.0.2 Drehimpuls von Teilchensystemen

Massenpunkte die sich nicht exakt geradlinig bewegen, haben einen Drehimpuls. Dies gilt auch für Massenpunkte, die sich in einem äußeren Kraftfeld befinden und miteinander wechselwirken. Der Drehimpuls ist allgemein definiert als

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \tag{8}$$

und ist eine Erhaltungsgröße, wenn kein Drehmoment $\vec{D}$ wirkt

$$\vec{D} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \vec{r} \times \vec{F} \quad . \tag{9}$$

Auch der Drehimpuls eines System aus mehreren Massenpunkten lässt sich in Schwerpunktkoordinaten darstellen

$$\vec{L} = M\vec{r}_s \times \vec{v}_s + \vec{L}_s \tag{10}$$

und entspricht damit der Summe aus dem Drehimpuls der Gesamtmassen vereinigt im Schwerpunkt bezogen auf den Ursprung des Laborsystems $M\vec{r}_s \times \vec{v}_s$, und dem Gesamtdrehimpuls des Systems, $\vec{L}_s$ bezogen auf den Schwerpunkt. Letzteres kann für ein Zwei-Teilchen-System auch dargestellt werden als

$$\vec{L}_s = \vec{r}_{12} \times \mu\vec{v}_{12} \quad . \tag{11}$$

Der Gesamtdrehimpuls des Systems von Massenpunkten bezogen auf den Schwerpunkt, entspricht also dem Drehimpuls eines Teilchens mit dem Impuls $\mu\vec{v}_{12}$ und dem Ortsvektor $\vec{r}_{12} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$.

2.1 Stöße zwischen Teilchen

Wenn wir Stoßprozesse betrachten (z.B. stoßende Kugeln, kollidierende Fahrzeuge oder stoßende Elektronen) benutzen wir die Tatsache, dass in abgeschlossenen Systemen stets Energie- und Impulserhaltung gilt. Da die Systeme abgeschlossen sind spielen potentielle Energien dabei keine Rolle, die Gesamtenergie des Stoßsystems besteht somit aus kinetischen Energien bzw. eventuellen Wärmeenergien (welche aufgrund von Reibungsverlusten entstehen).

Als Grundgleichungen für Stoßprozesse erhalten wir durch diese Erhaltungssätze

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_1{}' + \vec{p}_2{}' \qquad \text{Impulserhaltung} \tag{12}$$

$$\frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} = \frac{p_1'^{\,2}}{2m_1'} + \frac{p_2'^{\,2}}{2m_2{}'} + Q \quad \text{Energieerhaltung} \tag{13}$$

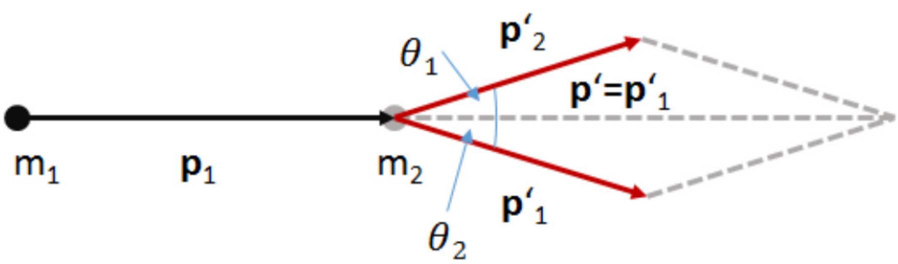
Je nach dem ob die kinetische Energie der Stoßpartner in andere Energieformen umgewandelt wird oder nicht, nimmt Q unterschiedliche Werte an.

1. **Elastische Stöße:** $Q = 0$, die kinetische Energie der Stoßpartner bleibt unverändert.
2. **Inelastische Stöße:** $Q > 0$, die kinetische Energie der Stoßpartner ist nach dem Stoß kleiner $\Rightarrow$ innere Energie der Stoßpartner hat zugenommen (Deformationsenergie).
3. **Superelastische Stöße:** $Q < 0$, die kinetische Energie der Stoßpartner ist nach dem Stoß größer $\Rightarrow$ innere Energie aus Anregungen der Stoßpartner wurde frei.

2.1.1 Elastische Stöße im Laborsystem

Im Folgenden betrachten wir die wesentlichen Aspekte eines Stoßes für den Fall eines ruhenden Stoßpartners, $\vec{p}_2 = 0$ und Massen, die beim Stoß unverändert bleiben: $m_1{}' = m_1$ und $m_2{}' = m_2$. Damit reduziert sich Gleichung (12) zu

$$m_1\vec{v}_1 = m_1\vec{v}_1{}' + m_2\vec{v}_2{}' \quad . \tag{14}$$



Bei einem zentralen Stoß kann diese Gleichung noch weiter vereinfacht werden, da der Stoßwinkel $\theta = 0°$ oder $\theta = 180°$ ist und man somit nicht vektoriell rechnen muss. Unter der Verwendung von $\vec{v}_1{}' \cdot \vec{v}_2{}' = v_1{}' \cdot v_2{}'$ erhält man

$$v_1{}' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \qquad v_2{}' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 \tag{15}$$

für die Geschwindigkeiten der beiden Teilchen nach dem Stoß. Falls wir nicht den Spezialfall eines ruhenden Stoßpartners haben ($\vec{p}_2 \neq 0$), also beide Teilchen in Bewegung sind und zentral gegeneinander stoßen, so ergeben sich die Geschwindigkeiten nach dem Stoß zu

$$v_1{}' = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2v_2}{m_1 + m_2} \quad \text{und} \quad v_2{}' = \frac{(m_1 - m_2)v_2 + 2m_1v_1}{m_1 + m_2}$$

2.1.2 Elastische Stöße im Schwerpunktsystem

Betrachten wir nun also den elastischen Stoß zweier Teilchen im Schwerpunktsystem, was bedeutet, dass sich der Koordinatenursprung im Schwerpunkt des Systems der beiden Teilchen befindet. Mit Gleichung (3) erhalten wir für die Geschwindigkeit des Schwerpunkts

$$\vec{v}_s = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2} \quad . \tag{16}$$

Laut Definition ist der Schwerpunktimpuls aus Gleichung (4) in diesem System null

$$\vec{p}_s = M\vec{v}_s = \sum_i m_i v_{i,s} = 0 \tag{17}$$

da sich alle auf den Schwerpunkt wirkenden Kräfte aufheben. Im Zweikörpersystem sind die Impulse also entgegengesetzt und gleich groß

$$\vec{p}_{1,s} = m_1\vec{v}_{1,s} = -m_2\vec{v}_{2,s} = -\vec{p}_{2,s} \quad \text{und} \quad \vec{p}\,'_{1,s} = m_1\vec{v}\,'_{1,s} = -m_2\vec{v}\,'_{2,s} = -\vec{p}\,'_{2,s} \tag{18}$$

Mit Hilfe des Energiesatzes aus Gleichung (13) kann man für einen elastischen Stoß mit $Q = 0$ sehen, dass

$$p_{1,s}^2 = {p'_{1,s}}^2 \quad \text{und} \quad p_{2,s}^2 = {p'_{2,s}}^2 \tag{19}$$

also dass die Beträge der Geschwindigkeiten und Impulse im Schwerpunktsystem erhalten bleiben. Somit behält jeder Stoßpartner beim elastischen Stoß seine kinetische Energie im Schwerpunktsystem.

2.1.3 Inelastische Stöße

Bei einem inelastischen Stoß ist die kinetische Energie nicht mehr erhalten. Hier muss bei der Energieerhaltung die restliche, innere Energie (Wärme, Reibung) $Q \neq 0$ beachtet werden. Der Impuls ist jedoch weiterhin eine Erhaltungsgröße. Beim einem **vollkommenen inelastischen Stoß** vereinigen sich die Massen m_1 und m_2 nach dem Stoß zu einer Masse $m_1 + m_2$ und bewegen sich mit einer Geschwindigkeit $v\,'$, so als würden sie zusammenkleben. Diese Geschwindigkeit erhält man direkt aus der Impulserhaltung

$$\vec{v}\,' = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2} = \vec{v}_s \tag{20}$$

welche genau der Geschwindigkeit des Schwerpunktes entspricht. Der Anteil der kinetischen Energie, der dabei in innere Energie umgewandelt wird ist somit

$$Q = E_{1,kin} + E_{2,kin} - {E_{kin}}' = \frac{1}{2}(m_1\vec{v}\,_1^2 + m_2\vec{v}_2^2) - \frac{1}{2}(m_1+m_2)\vec{v}\,'^{\,2} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2 = \frac{1}{2}\mu\vec{v}\,_{12}^2 \tag{21}$$

und entspricht damit genau die kinetische Energie der Relativbewegung beider Partner.

3 Klassische Mechanik des starren Körpers

Ein starrer Körper ist der Spezialfall eines Mehrteilchensystems, in dem die Teilchen alle ihre festen Abstände zueinander beibehalten. Man betrachtet die Massenpunkte m_i an den Orten $\vec{r}_i$ und erhält für das Gesamtvolumen V und die Gesamtmasse M des starren Körpers

$$V = \sum_{i=1}^{N} \Delta V_i \quad \text{bzw.} \quad M = \sum_{i=1}^{N} \Delta m_i \quad . \tag{22}$$

Verwendet man nun die Massendichte

$$\rho(\vec{r}) = \sum_i \rho_i(\vec{r}_i) = \sum_i \frac{\Delta m_i}{\Delta V_i} \tag{23}$$

und geht über zu infinitesimal kleinen Volumen- und Massenelementen, so erhält man

$$V = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=1}^{N} \Delta V_i = \int_V \mathrm{d}V \quad \text{bzw.} \quad M = \int_V \rho(\vec{r}) \mathrm{d}V \quad . \tag{24}$$

3.1 Kinematik des starren Körpers

Eine solche Massenverteilung besitzt einen Schwerpunkt der für $\Delta V \to 0$ und $N \to \infty$ beschrieben wird durch

$$\vec{r}_s = \frac{1}{M} \int_V \vec{r} \rho(\vec{r}) \mathrm{d}V \quad . \tag{25}$$

Mit Hilfe des Ortsvektors, der vom Schwerpunkt S zu einem Massenelement m_i zeigt $\vec{r}_{i,S} = \vec{r}_i - \vec{r}_S$ ergibt sich die Relativgeschwindigkeit

$$\frac{\mathrm{d}\vec{r}_{i,S}}{\mathrm{d}t} = \vec{v}_{i,S} = \vec{v}_i - \vec{v}_S \quad . \tag{26}$$

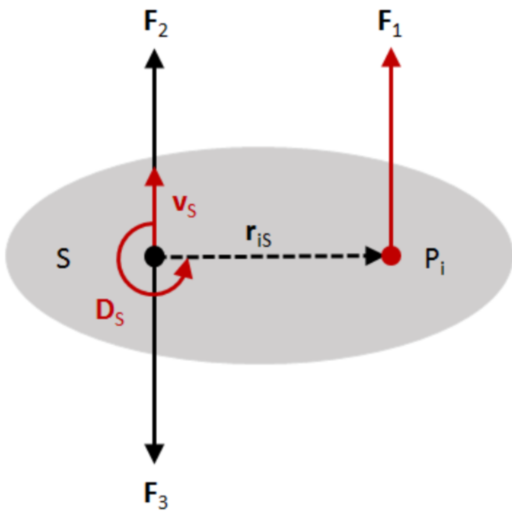
Da in einem starren Körper alle Abstände fest sind und somit $|\vec{r}_{i,S}|$ konstant ist, ergibt die Ableitung von $\vec{r}^{\,2}_{i,S}$ nach der Zeit t

$$2\vec{r}_{i,S} \cdot \vec{v}_{i,S} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_{i,S} = (\vec{\omega} \times \vec{r}_{i,S}) \quad . \tag{27}$$

Da $\vec{v}_{i,S}$ senkrecht auf $\vec{r}_{i,S}$ steht, besitzt das Massenelement im Schwerpunktsystem nur die Freiheit sich mit der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ um die Achse zu drehen, die durch den Schwerpunkt geht und senkrecht zu $\vec{v}_{i,S}$ steht. Allgemein gilt im Laborsystem

$$\vec{v}_i = \vec{v}_S + (\vec{\omega} \times \vec{r}_{i,S}) \quad . \tag{28}$$

Dies bedeutet dass sich die **Bewegung** eines starren Körpers aus der **Translation des Schwerpunkts** plus einer **Rotation** des Körpers **um den Schwerpunkt** zusammensetzt.



3.2 Dynamik starrer Körper

Bei Kräften, die an einem ausgedehnten Körper angreifen, muss im Gegensatz zur Dynamik einzelner Massenpunkte der Angriffspunkt P beachtet werden, an welchem die Kraft aufgewendet wird. Eine Kraft $\vec{F}_1$, die nicht im Schwerpunkt angreift, bewirkt daher ein Drehmoment bezogen auf den Schwerpunkt des starren Körpers

$$\vec{D}_S = \vec{r}_{i,S} \times \vec{F}_1 \tag{29}$$

Da $\vec{F}_1 + \vec{F}_3 = 0$ bewirken diese beiden Kräfte zusammen keine Beschleunigung des Schwerpunkts, sondern nur eine Rotation des Körpers. Die Schwerpunktsbeschleunigung wird durch die Kraft $\vec{F}_2$ hervorgerufen. Insgesamt ergibt sich für einen starren Körper

$$\vec{D} = \vec{r} \times \vec{F} = \underbrace{\vec{r} \times \vec{F}_{tangential}}_{\text{Änderung der Rot.Geschw.}} + \underbrace{\vec{r} \times \vec{F}_{\|Drehachse}}_{\text{Änderung Lage Rot.Achse}} + \underbrace{\vec{r} \times \vec{F}_{normal}}_{\text{kein Einfluss, da } \| \vec{r}} . \tag{30}$$

Ein starrer Körper befindet sich im Gleichgewicht, wenn

$$\sum_i \vec{F}_i = 0 \quad \text{und} \quad \sum_i \vec{D}_i = 0 \tag{31}$$

also wenn die Summe der an ihm angreifenden Kräfte und Drehmomente verschwindet.

3.3 Trägheitsmomente berechnen

Die Rotationsenergie eines starren Körpers ist gegeben durch

$$E_{rot} = \frac{1}{2} I \omega^2 \quad \text{mit} \quad I = \int_V r_\perp^2 \mathrm{d}m = \int_V r_\perp^2 \rho(\vec{r}) \mathrm{d}V \tag{32}$$

wobei I das Trägheitsmoment ist und $r_\perp$ der Abstand zur Rotationsachse. Das Trägheitsmoment ist ein Maß für die Massenverteilung in einem ausgedehnten Körper bezüglich einer

Rotationsachse. Für einen homogenen Vollzylinder berechnet sich das Trägheitsmoment zu

$$I = \rho \int_V r_\perp^2 \mathrm{d}V \overset{\mathrm{d}V=2\pi h r \mathrm{d}r}{\Longrightarrow} 2\pi\rho h \int_0^r r^3 \mathrm{d}r = \frac{1}{2}\pi\rho h r^4 \overset{\rho=M/(\pi r^2 h)}{\Longrightarrow} \frac{1}{2} M r^2 \quad . \tag{33}$$

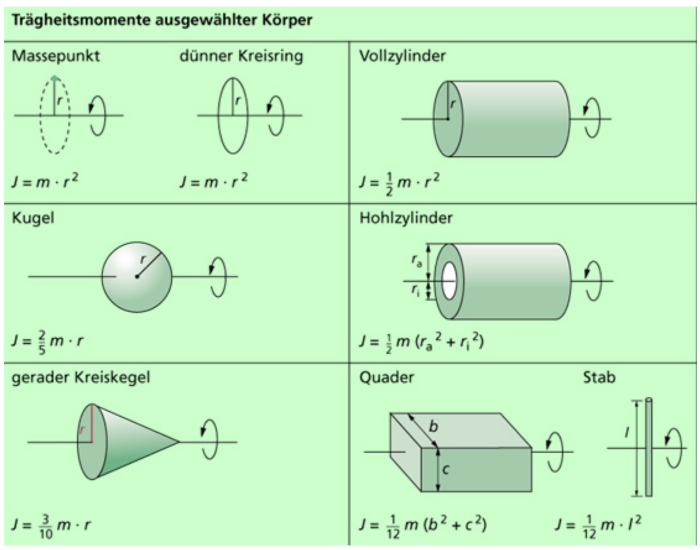
Für den **Schwerpunktdrehimpuls** gilt

$$L = I \cdot \omega \quad . \tag{34}$$

Er ist also proportional zur Winkelgeschwindigkeit ω in Analogie zur Definition des Impulses $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$.

Hier noch ein paar Beispiele von Trägheitsmomenten bekannter Körper

- Punktmasse im Abstand r um eine Drehachse: $I = mr^2$
- Zylinder um die Symmetrieachse: $I = \frac{1}{2}mr^2$
- Zylinder um eine Querachse $I = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{12}ml^2$
- Ein dünner Zylindermantel um die Symmetrieachse: $I \approx mr^2$
- Ein dicker Zylindermantel/ Hohlzylinder: $I = \frac{1}{2}m(r_a^2 + r_i^2)$
- Ein dünner Stab um die Symmetrieachse: $I = \frac{1}{12}ml^2$
- Eine massive Kugel um Achse durch den Mittelpunkt: $I = \frac{2}{5}mr^2$
- Quader um Achse durch den Mittelpunkt: $I = \frac{1}{12}m(b^2 + c^2)$
- Ein massiver Kegel um die Symmetrieachse: $I = \frac{3}{10}mr^2$



Quelle: https://www.lernhelfer.de/schuelerlexikon/physik-abitur/artikel/traegheitsmomente

Translation		Rotation	
Größe	**Definition**	**Größe**	**Definition**
Ort	x	Winkel	φ
Geschwindigkeit	$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$	Winkelgeschwindigkeit	$\omega = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$
Impuls	$p = m \cdot v$	Drehimpuls	$L = I \cdot \omega$
Masse	m	Trägheitsmoment	$I = \rho \int_V r^2 \mathrm{d}V$
Kinetische Energie	$E_{kin} = \frac{1}{2} m v^2$	Rotationsenergie	$E_{rot} = \frac{1}{2} I \omega^2$
Beschleunigung	$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}$	Winkelbeschleunigung	$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}$
Kraft	$F = m \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}$	Drehmoment	$M = I \frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}$

Tabelle 1: Vergleich Translation und Rotation

3.3.1 Satz von Steiner

Dreht sich ein Körper um eine Achse B, die nicht durch den Schwerpunkt verläuft, so gilt für das Trägheitsmoment:

$$I_B = I_S + a^2 M \quad . \tag{35}$$

Dabei ist I_S das Trägheitsmoment für eine parallele Achse durch den Schwerpunkt und der Term $a^2 M$ stellt das Trägheitsmoment eines Massenpunkts mit der Gesamtmasse M des starren Körpers im Abstand a zwischen Drehachse und Schwerpunkt dar.

Ein rollender Körper ist ein Spezialfall eines Rotators mit bewegtem Schwerpunkt und fixierter Drehachse. Dabei herrscht die Rollbedingung

$$v = \omega r \tag{36}$$

wenn sein Schwerpunkt bei konstanter Entfernung zur Oberfläche (r) und mit konstanter Geschwindigkeit v parallel zur Oberfläche rollt ohne zu rutschen. Seine kinetische Energie ergibt sich damit zu

$$E = E_{rot} + E_S = \frac{1}{2} I \omega^2 + \frac{1}{2} M v^2 = \frac{1}{2}(\frac{I}{r^2} + M) v^2 = \frac{1}{2}(I + M r^2)\omega^2 \quad . \tag{37}$$

Translation und Rotation hängen sehr eng miteinander zusammen. In Tabelle 3.3.1 sieht man sehr schön das Analogon der beiden. Es ist sehr hilfreich sich diese Zusammenhänge einzuprägen.

4 Bezugs- und Koordinatensystem

Wie wir im letzten Kapitel am Beispiel der Stöße von Teilchen gesehen haben kann die Wahl des richtigen Bezugssystems den Rechenweg erheblich vereinfachen. Es lohnt sich daher sich vor Beginn einer Aufgabe kurz Gedanken darüber zu machen, welches Bezugs- bzw. Koordinatensystem man verwendet und **dieses dem Korrektor durch eine Skizze zu veranschaulichen**.
So legt man z.B. bei einem schiefen Wurf das Koordinatensystem so, dass die x-Achse mit dem Boden zusammenfällt und der Koordinatenursprung in den Füßen des Werfers ruht.

Man könnte natürlich auch den Ursprung seines Koordinatensystem in die Sonne legen. In diesem Fall muss man jede Ortsangabe bezüglich der Sonne machen und in diesem Bezugssystem die Bewegung der Erde um die Sonne sowie die Rotation der Erde berücksichtigen. In vielen anderen Fällen ist die Wahl des Koordinatensystems nicht so trivial.

4.1 Galilei-Transformation

Die Galilei-Transformation beschreibt den Wechsel zwischen Koordinatensystemen, die sich mit einer konstanten Geschwindigkeit zueinander bewegen. Ein Beispiel für ein solches System ist das Schwerpunktsystem beim Stoß zweier Teilchen welches sich mit konstanter Geschwindigkeit relativ zum ruhenden System bewegt.

In weiterer Folge werden für das ruhende System ungestrichene Koordinaten und für das sich mit einer Geschwindigkeit $\vec{u}$ bewegende System gestrichene Koordinaten verwendet.

$$\vec{r}\,'(t) = \vec{r}(t) - \vec{u} \cdot t \tag{38}$$

$$\vec{v}\,'(t) = \vec{v}(t) - \vec{u} \tag{39}$$

Die Zeit vergeht in beiden Systemen gleich schnell $t\,' = t$, ebenso sind Kräfte gleich stark. Die Galilei-Transformation ist nur gültig wenn die Geschwindigkeit u sehr viel kleiner als die Lichtgeschwindigkeit ist ($|\vec{u}| < 0.1c$). Bei höheren Geschwindigkeiten wird die Galilei-Transformation durch die Lorentz-Transformation ersetzt (Näheres dazu beim Thema der speziellen Relativitätstheorie).

4.2 Beschleunigte Bezugssysteme

In beschleunigten Koordinatensystemen bewegen sich kräftefreie Körper nicht geradlinig und gleichförmig und die Kräfte sind nicht gleich. Um diesen Effekt zu kompensieren führt man sogenannte Scheinkräfte ein.

4.2.1 Gradlinig beschleunigte Bezugssysteme

Wird ein Koordinatensystem bezüglich eines anderen Koordinatensystems konstant entlang der x-Richtung mit Beschleunigung ξ_x beschleunigt, so gilt

$$x\,' = x - u_0 t + \frac{1}{2}\xi_x t^2 \quad . \tag{40}$$

Ein Teilchen im beschleunigten System hat somit eine Gesamtbeschleunigung von

$$\vec{a}\,' = \vec{a} - \vec{\xi} \quad . \tag{41}$$

Hat dieses Teilchen eine konstante Geschwindigkeit im Ruhesystem, also $\vec{a} = 0$, so gilt für die Kräfte im gestrichenen System

$$F = m\vec{a}\,' = -m\vec{\xi} \quad . \tag{42}$$

Es wirkt also eine Kraft, welche im ruhenden System gar nicht existiert, also eine Scheinkraft, die man Trägheitskraft nennt.

4.2.2 Rotierende Bezugssysteme

Nun betrachten wir ein mit ω gleichmäßig rotierendes Bezugssystem, welches den selben Ursprung wie das ruhende System besitzt. Wenn $\vec{r}$ bzw. $\vec{v}$ Ort bzw. Bahngeschwindigkeit im ungestrichenen (ruhenden) System und $\vec{v}\,'$ die Bahngeschwindigkeit im gestrichenen (mit $\vec{\omega}$ rotierenden System) sind, dann gilt

$$\vec{v}\,' = \vec{v} - \vec{\omega} \times \vec{r} \quad . \tag{43}$$

Nach ein bisschen Rechnung erhält man für die Beschleunigung

$$\vec{a}\,' = \vec{a} - 2(\vec{\omega} \times \vec{v}\,') - [\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r\,'})] \tag{44}$$

und damit für die Kraft, die ein Beobachter im gestrichenen System misst

$$\vec{F} = m\vec{a} - 2m(\vec{\omega} \times \vec{v}\,') - m[\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}\,')] \quad . \tag{45}$$

Die zwei zusätzlichen Komponenten, die im Vergleich zum ruhenden System zur Gesamtkraft beitragen sind die Corioliskraft $\vec{F_C} = -2 \cdot m \cdot (\vec{\omega} \times \vec{v}\,')$ und die Zentrifugalkraft $\vec{F}_{Zf} = -m \cdot \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r\,'})$, die beide Scheinkräfte sind.